УДК 519.21

А.Г. Буймов

Закономерности поведения кривых забывания

Предлагается математическая интерпретация базовых требований, которым должны удовлетворять функции забывания. Рассматриваются различные варианты функции «торможения» процессов распада следа памяти, введенной Уэйном Виккелгреном в дифференциальное уравнение вероятности сохранения запоминаемой информации. Изучается их влияние на поведение получаемых функций забывания и соответствие этих функций базовым требованиям. Получено новое решение уравнения, которое описывает поведение кривых забывания, качественно похожее на результаты заучивания информации путем интенсивных повторений.

Ключевые слова: кривые забывания, функция Виккелгрена.
doi: 10.21293/1818-0442-2017-20-4-138-141

Поиск «правильных» формул, описывающих реакцию памяти на изменение условий и техник запоминания и сохранения информации, обусловлен желанием исследователей получить инструмент прогнозирования этих реакций, инструмент формирования новых гипотез при подготовке и проведении новых экспериментов. Ниже приведена система требований (базовых свойств), ограничивающая выбор функций, которые могут использоваться в качестве моделей кривых забывания. Получена модель, позволяющая учесть эффект торможения процессов забывания информации на начальном этапе ее заучивания.

Базовые свойства кривых забывания

Пусть имеется образовательная программа $\{x_0(t_i), i=\overline{1,k}\}$, в процессе выполнения которой некоторому обучающемуся (ученику, студенту, стажеру, специалисту) в момент времени t_i передается информация $x_0(t_i)$, актуальная для запоминания, и пусть эта информация (актуальные знания, умения, навыки) усваивается и сохраняется в памяти ученика до момента времени $t > t_i$ с вероятностью $p_i(t_i, t)$.

Вероятности $p_i(t_i, t)$ могут рассматриваться как индивидуальные характеристики способности и готовности ученика к освоению и запоминанию предлагаемых элементов образовательной программы. Немецкий психолог Герман Эббингауз [1], впервые применивший количественные методы при исследовании процессов запоминания и сохранения (удержания) запомненной информации, назвал зависимости вероятностей $p_i(t_i, t)$ от длительности интервалов удержания $\tau = (t - t_i)$ кривыми или функциями забывания, а в качестве математической модели этих зависимостей предложил использовать выражение

$$r = a/(a + b\log\tau), \tau \geq 1, \qquad (1)$$

которое при измерении независимой переменной τ в минутах и численных значениях параметров $a = 1{,}84$, $b = 1{,}25$ хорошо согласовывалось с результатами его шестилетних (с 1879 по 1885 г.) экспериментов с собственной памятью.

История попыток психологов найти подходящие математические модели кривых забывания в программах экспериментального исследования свойств памяти людей разного возраста, разных профессий, разного состояния здоровья и т.д. отражена в обзорах [2–4]. В них отмечается, что до Эббингауза все исследования процессов запоминания разных видов информации, ее сохранения и забывания носили качественный характер. Общеизвестным было лишь то, что однажды запомненная информация или приобретенные навыки со временем постепенно теряются. В дальнейшем последователи Эббингауза были заняты развитием количественных методов исследования динамических процессов памяти, проводили эксперименты, накапливали опытные данные, конструировали параметрические модели кривых забывания, стараясь добиться хорошего согласования модели с опытными данными на всех (коротких и длинных) интервалах времени, прошедших после акта запоминания, по методу наименьших квадратов.

Было предложено и сопоставлено с данными экспериментальных исследований более сотни математических моделей кривых забывания, и постепенно, за период с 1879 по 1974 г., сформировалось общее мнение, что эти модели следует искать в классе функций со свойствами:

$$\lim_{\tau\to\infty} p(\tau) = 0;\ 1 \geq p(\tau) \geq 0;$$
$$dp(\tau)/d\tau \leq 0;\ d^2 p(\tau)/d\tau^2 \geq 0, \qquad (2)$$

т.е. в классе ограниченных неотрицательных непрерывных монотонно убывающих выпуклых функций с первыми двумя непрерывными производными. Этим требованиям удовлетворяет, например, экспоненциальная функция $p(\tau) = \exp(-c\tau)$.

В 1895 г. немецкий психолог, специалист в области экспериментальной психологии Адольф Йост обнаружил еще одно важное свойство памяти, согласно которому скорость забывания запомненной информации с течением времени уменьшается (Закон Йоста) [2]. Это свойство проявляется в характерном поведении кривых забывания: они изменяются во времени как убывающие функции с «тяжелыми хвостами». Математически это свойство можно представить в виде формулы (3) для относительной скорости изменения вероятности воспроизведения запомненной информации:

$$\frac{dp(\tau)}{d\tau}/p(\tau)=\frac{d}{d\tau}\ln p(\tau)=-cf(\tau)\,. \qquad (3)$$

Поскольку эта скорость в соответствии с законом Йоста со временем уменьшается, то функция $f(\tau)$ в формуле (3) также должна убывать. Ее можно интерпретировать как «функцию торможения» процессов забывания информации, оставившей в памяти свой след, или, что то же самое, как функцию торможения процессов распада следов памяти.

В итоге можно сказать, что соотношения (2) и уравнение (3) представляют собой математическую интерпретацию базовых качественных характеристик кривых забывания, обнаруженных экспериментаторами.

Влияние функций торможения на модели кривых забывания

Конкретизируем вид функции $f(\tau)$, задав ее уравнением

$$df(\tau)/d\tau=-\mu f(\tau)^{n+1},\ n\ge 0,\ f(0)=1, \qquad (4)$$

и рассмотрим несколько вариантов его решений при разных значениях n.

1. Пусть $n=0$. В этом случае решением уравнения (4) будет

$$f(\tau)=\exp(-\mu\tau)\,. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в дифференциальное уравнение (3) и решая его при начальном условии $p(0)=\lambda$, получим

$$p(\tau)=\lambda\exp[-\frac{c}{\mu}(1-e^{-\mu\tau})]\,. \qquad (6)$$

Функция (6) удовлетворяет всем требованиям (2), кроме одного: с увеличением τ вероятность $p(\tau)$ воспроизведения запомненной информации не убывает до нуля: $p(\infty)=\lambda\exp(-c/\mu)$.

2. Пусть $n=1$. В этом случае решения уравнений (4) и (3) соответственно принимают вид

$$f(\tau)=(1+\mu\tau)^{-1}; \qquad (7)$$

$$p(\tau)=\lambda(1+\mu\tau)^{-c/\mu}\,. \qquad (8)$$

В данном случае поведение обеих функций, (7) и (8), полностью отвечает требованиям (2).

3. В общем случае (4) функция торможения $f(\tau)$ и соответствующая вероятность $p(\tau)$ определяются формулами (9) и (10):

$$f(\tau)=(1+n\mu\tau)^{-1/n}\,, \qquad (9)$$

$$p(\tau)=\lambda\exp\{-\frac{c}{\mu(n-1)}[(1+n\mu\tau)^{\frac{n-1}{n}}-1]\}\,. \qquad (10)$$

В предельных случаях формулы (9), (10) переходят: а) в (5) и (6) при $n\to 0$; б) в (7) и (8) при $n\to 1$; в) при $n\to\infty$ формулы (9) и (10) принимают вид (11) и (12):

$$f(\tau)=1\,, \qquad (11)$$

$$p(\tau)=\exp(-c\tau)\,. \qquad (12)$$

В последнем случае функция $f(\tau)$ не учитывает эффектов торможения процессов распада следов памяти. При этом динамика забывания информации аналогична динамике распада следов радиоактивных веществ, изучаемой в физике. Отсюда вывод: формула (12) не может использоваться в качестве модели кривых забывания, так как не соответствует закону Йоста.

В случае «а», наоборот, тормозящий эффект, который моделируется функцией $f(\tau)$, представленной формулой (5), настолько велик, что через некоторый конечный промежуток времени порядка $\tau_0\cong 3\mu^{-1}$ остаточный след памяти практически перестает разрушаться и дальше может храниться сколь угодно долго, а исходная информация воспроизводится с вероятностью $p(\infty)=\lambda\exp(-c/\mu)$. Этот вариант также не может использоваться в качестве модели кривых забывания, поскольку противоречит гипотезе о том, что без специальных поддерживающих мероприятий любая информация в конце концов забывается.

Формула (8) впервые была получена Уэйном Виккелгреном, американским специалистом в области математической психологии. После публикаций [5–7] она стала одной из самых популярных моделей кривых забывания. Формула Виккелгрена была найдена как решение уравнений (3), (4) при $n=1$. Возможно, такой выбор был связан с тем, что уравнение (4) динамики поведения функции $f(\tau)$ при $n=1$ напоминает уравнение движения тела в среде с сопротивлением. Оно связывает ускорение торможения с потерями кинетической энергии, пропорциональной квадрату скорости движения. Таким уравнением, в частности в механике, описывается изменение скорости тормозящего автомобиля, скорости пули, попавшей в вязкую среду, и т.д. Однако более важным, конечно, явилось то, что при этом было обнаружено хорошее совпадение модели с опытными данными многочисленных экспериментальных исследований. На рис. 1 дано сравнение опытных данных Эббингауза и функции Виккелгрена, согласованной с ними по методу наименьших квадратов.

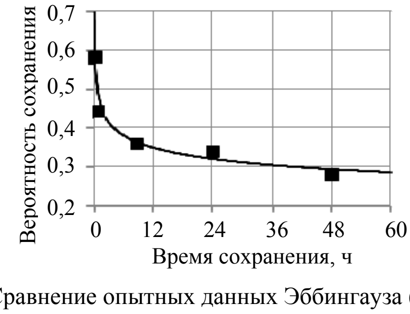

Рис. 1. Сравнение опытных данных Эббингауза (1885 г.) с теоретической моделью функций забывания, полученной Виккелгреном (1974 г.)

Такое хорошее совпадение теоретической модели, полученной «на кончике пера», с экспериментальными данными в большом диапазоне интервалов удержания оказалось неожиданным, хотя многие исследователи и раньше предполагали степенной характер поведения кривых забывания и искали объяснение этому явлению [2–4, 8].

Новый вариант функции забывания и ее особенности

Рассмотрим еще один вариант модели динамиких процессов забывания. Для этого в уравнении (3) в качестве функции торможения примем $f(\tau)=(p(\tau)/\lambda)^n$ и перепишем его в виде

$$\frac{d}{d\tau}\ln p(\tau)=-c(p(\tau)/\lambda)^n,\ n\geq 0,\ p(0)=\lambda\ . \qquad (13)$$

Решение уравнения (13) можно представить формулой

$$p(\tau)=\lambda(1+nc\tau)^{-1/n}\ . \qquad (14)$$

При любых конечных $n>0$ решение (14) сохраняет вид степенной функции Виккелгрена. При $n=0$ оно вырождается в $p(\tau)=\lambda\exp(-c\tau)$. При $n\to\infty$ превращается в постоянную величину $p(\tau)=\lambda$.

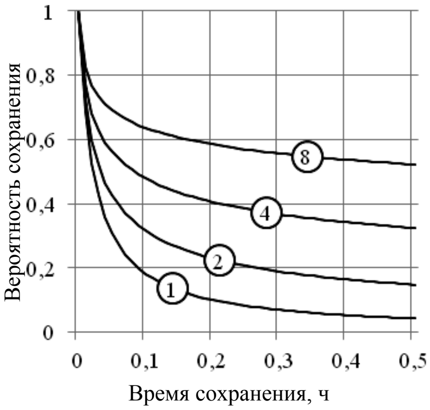

Рис. 2. Графики функций забывания $p(\tau)=\lambda(1+nc\tau)^{-1/n}$ при $n=1, 2, 4, 8$

На рис. 2 приведены графики функций забывания (14), построенные при $\lambda=1$ и нескольких значениях показателя степени $n=1,2,4,8$. Поведение кривых напоминает результаты интенсивного заучивания информации.

Для пояснения рассмотрим случай, когда образовательная программа $\{x_0(t_i), i=\overline{1,k}\}$ реализуется как программа репетиционного типа $\{x_0(t_i)=x_0, i=\overline{1,k}\}$, или программа повторения пройденного, на каждом шаге которой учитель повторно предъявляет обучающемуся к заучиванию одну и ту же информацию x_0. Кроме того, примем допущение, что реакции обучающегося на информационные воздействия $x_0(t_i)$, $x_0(t_j)$ при разных $i\neq j$ могут рассматриваться как независимые события.

Для этого случая можно записать формулу

$$R_k(t_k,t)=1-\prod_{i=1}^{k}(1-p_i(t_i,t))\ , \qquad (15)$$

в которой $R_k(t_k,t)$ означает вероятность сохранения запомненной информации до момента времени t после k-го цикла ее заучивания: $t>t_k>t_{k-1}>...>t_1$, т.е. после завершения репетиционной программы [8].

Под интенсивным процессом запоминания будем понимать ситуацию, когда сеансы заучивания следуют один за другим практически непрерывно, и считать, что выполняется условие $t_k=t_{k-1}=\cdots=t_1$. При этом будем также считать, что за время репетиционной программы способности ученика к запоминанию не изменяются, и отразим это предположением, что вероятности $p_i(t_i,t)$ от номера сеанса не зависят.

В этом случае формула (15) может быть представлена в виде

$$R_k(\tau)=1-(1-p_1(\tau))^k\ . \qquad (16)$$

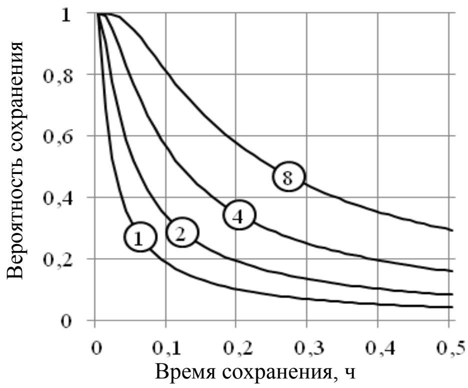

Рис. 3. Графики функции (16) как вероятностной модели результата интенсивной репетиционной программы, включающей $k=1, 2, 4, 8$ сеансов заучивания информации

На рис. 3 изображены графики функции забывания, рассчитанные по формуле (16) и отражающие результаты интенсивных репетиционных программ, содержащих $k=1, 2, 4, 8$ сеансов повторного заучивания заданной информации.

Формулы (14) и (16) принципиально отличаются и методами получения, и своим видом, и интерпретацией. Тем не менее, качественное сходство поведения кривых на рис. 2 и 3 наводит на мысль, что и в одном, и в другом случае речь может идти о моделях дополнительных мероприятий по закреплению заучиваемой информации. Если формулы (15), (16) соответствуют репетиционным программам с учителем, в которых при каждом повторении учащемуся предоставляются исходные материалы, и он может сверяться с ними, то модель (14) этого не предполагает. Здесь речь может идти только об упорядочении и осмыслении того, что уже запомнено. Такая работа тоже способствует закреплению и удержанию изученного материала.

Заключение

Введенная система базовых свойств кривых забывания является удобным инструментом корректной оценки и выбора предлагаемых моделей.

Модель с учетом эффекта торможения процессов забывания информации на начальном этапе ее заучивания без повторений открывает возможность более детального анализа эффективности репетиционных программ с повторным предъявлением изучаемых материалов.

Литература

1. Contributions to memory // Wikipedia, the free encyclopedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Hermann_Ebbinghaus (01.11.2017).

2. Rubin D.C. One Hundred Years of Forgetting: A Quantitative Description of Retention / D.C. Rubin, A.E. Wenzel // Psychological Review. − 1996. − Vol. 103, No. 4. − P. 743–760. – https://dukespace.lib.duke.edu/dspace/handle/10161/10157 (01.11.2017).

3. Robertson G.S. A Brief History of the Mathematical Definition of Forgetting Curves // Grant Sheridan Robertson's personal blog. − Friday, June 26, 2009. – http://www.ideationizing.com/2009/06/brief-history-of-mathematical.html (04.11.2017).

4. White K.G. Forgetting functions // Animal Learning & Behavior. − 2001. − Vol. 29 (3). – P. 193−207. – https://link.springer.com/article/10.3758/BF03192887

5. Wickelgren W.A. Trace resistance and the decay of longterm memory. // Journal of Mathematical Psychology. – 1972. − 9. − P. 418–455. http://www.columbia.edu/~nvg1/Wickelgren/papers/1972bWAW.pdf (04.11.2017)

6. Wickelgren W.A. Single-trace fragility theory of memory dynamics. // Memory & Cognition. − 1974. – Vol. 2(4). − P. 775–780. – http://www.columbia.edu/~nvg1/Wickelgren/ (04.11.2017).

7. Wixted J.T. The wickelgren power law and the ebbinghaus savings function / J.T. Wixted, S.K. Carpenter // Psychological Science. − 2007. − Vol. 18(2). − P. 133–134. – http://public.psych.iastate.edu/shacarp/publications.html (04.11.2017).

8. Anderson R.B. The power law as an emergent property // Memory & Cognition. − 2001. − Vol. 29(7). − P. 1061−1068. – https://link.springer.com/article/10.3758%2FBF03195767 (04.11.2017).

9. Буймов А.Г. Вероятностная интерпретация законов освоения и сохранения навыков в программах репетиционного типа // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Наука и образование. − 2013. − № 1(166). − С. 306−310.

Буймов Аркадий Георгиевич
Д-р техн. наук, профессор каф. экономики
Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники
Тел.: +7-913-827-40-76
Эл. почта: agb2005@yandex.ru

Buymov A.G.
Regularities in the behavior of the forgetting curves

A mathematical interpretation of the basic qualitative requirements for functions of forgetting is proposed. The author describes the different options of the "braking" function in the decay of the memory trace, introduced by Wayne Wickelgren into the differential equation of the probability of saving the learned information. The impact on the forgetting functions behavior and their compliance to basic requirements are investigated. A new solution for the equation that describes the behavior of the curves of forgetting is obtained, which is quantitatively similar to the results of the memorization through intense repetitions.
Keywords: forgetting curves, retention curves, the function Wickelgren.