

УДК 004.94:519.872

А.А. Назаров, И.А. Семенова

Сравнение асимптотических и допредельных характеристик системы MАР/M/∞

Рассматривается система массового обслуживания с входящим MАР-поток (Markovian Arrival Process) и неограниченным числом обслуживающих приборов. Исследование проводится методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания, методом моментов и численным методом в допредельной ситуации. Проведенный анализ позволяет выполнить сравнение асимптотических и допредельных характеристик данной системы обслуживания.

Ключевые слова: асимптотический анализ, входящий MАР-поток, расстояние Колмогорова.

Развитие микроэлектроники в 80-е годы привело к существенным изменениям в области вычислительной техники и средств связи. Системы массового обслуживания (СМО) оказались наиболее лучшим математическим аппаратом для исследования и оптимизации процессов в телекоммуникационных сетях. Применение классических моделей систем массового обслуживания к исследованию процессов в телекоммуникационных сетях давало достаточно грубые результаты. В связи с этим появилась необходимость создания адекватных математических моделей систем массового обслуживания, применимых к реальным телекоммуникационным системам, и, прежде всего адекватных моделей телекоммуникационных потоков.

Одним из новых направлений исследований стало изучение процессов обслуживания в системах, входящие потоки которых отличны от классических, таких как MАР-поток (Markovian Arrival Process). Описание этого потока однородных событий можно найти в работах Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко [1], А.Н. Дудина [2], А.А. Назарова [3].

Исследователи, занимающиеся потоками, также занимались изучением СМО с неограниченным числом приборов, на вход которых поступают специальные потоки, применяя главным образом методы численного анализа. Анализ числа занятых приборов в системах $VMAP|GI|∞$, $COX|GI|∞$ можно найти, например, в работах немецких ученых Д. Баума [4] и Л. Броера [5], где было получено асимптотическое распределение числа занятых приборов в условии растущего времени обслуживания. Также исследованию систем массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов посвящены работы [6–9].

В данной работе проводится исследование системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает MАР-поток, функция распределения времени обслуживания экспоненциальная. Исследование проводится методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания, методом моментов и численным методом в допредельной ситуации.

Математическая модель

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает MАР-поток, заданный матрицей инфинитезимальных характеристик Q цепи Маркова $k(t)$, диагональной матрицей Λ с элементами $\lambda_k \geq 0$ по главной диагонали и набором вероятностей $d_{k_1 k_2}$, причем $d_{kk} = 0$. Пусть в некоторый момент времени t_m цепь Маркова перешла в состояние k_1 . В этом состоянии цепь будет находиться до момента t_{m+1} . Длина $(t_{m+1} - t_m)$ интервала постоянства состояния цепи Маркова распределена по экспоненциальному закону с параметром: $-d_{kk}$. В течение времени пребывания цепи Маркова в состоянии k_1 наступают события потока с интенсивностью λ_{k_1} . В момент времени t_{m+1} цепь Маркова перейдет в некоторое состояние k_2 . В этот момент с вероятностью $d_{k_1 k_2}$ наступит событие потока, а с вероятностью $(1 - d_{k_1 k_2})$ событие не наступит. Далее процедура повторяется. Эти состояния k_1, k_2 управляющей цепи Маркова будем также называть состояниями MАР-потока. Продолжительности обслуживания различных заявок стохастически независимы, одинаково распределены и имеют экспоненциальное распределение с параметром μ .

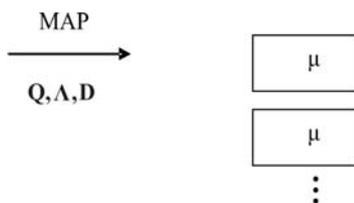


Рис. 1. СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов

Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание, заявка покидает систему (рис. 1).

Пусть система функционирует в стационарном режиме. Обозначим $i(t)$ – число приборов, занятых в момент времени t ; $k(t)$ – цепь Маркова, управляющая MAP-поток, тогда стационарное распределение вероятностей значений процесса $\{k(t), i(t)\}$ обозначим

$$P(k, i) = P\{k(t) = k, i(t) = i\}.$$

Для рассматриваемой системы двумерный случайный процесс $\{k(t), i(t)\}$ является марковским. Для его распределения вероятностей $P(k, i)$ запишем систему уравнений Колмогорова:

$$-P(k, i)\lambda_k - P(k, i)\mu + P(k, i-1)\lambda_k + P(k, i+1)(i+1)\mu + \sum_v \{P(v, i)(1-d_{vk}) + P(v, i-1)d_{vk}\}q_{vk} = 0. \quad (1)$$

Применяя (1), составим систему уравнений, определяющих характеристические функции

$$H(k, u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju} P(k, i),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Получим следующее уравнение:

$$j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial H(k, u)}{\partial u} = \lambda_k(e^{ju} - 1)H(k, u) + \sum_v H(v, u)q_{vk} \{1 + (e^{ju} - 1)d_{vk}\}. \quad (2)$$

Введем обозначения: вектор-строка $\mathbf{H}(u)$

$$\mathbf{H}(u) = \{H(1, u), H(2, u), \dots\},$$

матрица \mathbf{B} с элементами λ_k по главной диагонали и произведением $d_{k_1 k_2} \cdot q_{k_1 k_2}$ вне главной диагонали, тогда систему (2) запишем в матричном виде

$$\begin{cases} j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} = \mathbf{H}(u) \{ \mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \mathbf{B} \}, \\ \mathbf{H}(0) = \mathbf{R}, \end{cases} \quad (3)$$

где \mathbf{R} – стационарное распределение вероятностей значений цепи Маркова $k(t)$, определяемое системой

$$\begin{cases} \mathbf{RQ} = 0, \\ \mathbf{RE} = 1, \end{cases} \quad (4)$$

где \mathbf{E} – единичный вектор-столбец.

Исследование рассматриваемой системы MAP/M/∞ выполним тремя способами:

1. Методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания при $\mu \rightarrow 0$.
2. Методом моментов в допредельной ситуации.
3. Численным методом решения системы уравнений Колмогорова для стационарного распределения $P(k, i)$.

Метод асимптотического анализа

Предлагаемый метод асимптотического анализа реализуется в построении последовательности асимптотик возрастающего порядка, в котором асимптотика первого порядка аналогично закону больших чисел определяет асимптотическое среднее значение числа занятых приборов. Асимптотика второго порядка аналогично центральной предельной теореме позволяет построить гауссовскую аппроксимацию распределения вероятностей числа занятых приборов в системе. Асимптотики более высокого порядка определяют соответствующие аппроксимации распределения вероятностей, позволяющие выполнить более детальное исследование рассматриваемой характеристики [10].

Асимптотика первого порядка

Для нахождения асимптотики первого порядка обозначим $\mu = \varepsilon$, и в уравнении (3) выполним замены

$$u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}(u) = \mathbf{F}_1(w, \varepsilon), \quad (5)$$

для $\mathbf{F}_1(w, \varepsilon)$ получим уравнение

$$j(e^{-j\varepsilon w} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, \varepsilon)}{\partial w} = \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) \left\{ \mathbf{Q} + (e^{j\varepsilon w} - 1) \mathbf{B} \right\}. \quad (6)$$

Теорема 1. *Предельное, при $\varepsilon \rightarrow 0$, значение $\mathbf{F}_1(w)$ решения $\mathbf{F}_1(w, \varepsilon)$ уравнения (6) имеет вид*

$$\mathbf{F}_1(w) = \mathbf{R} \cdot \exp\{jw\kappa_1\},$$

где \mathbf{R} является решением системы (4), а величина κ_1 имеет вид

$$\kappa_1 = \mathbf{RBE}.$$

Доказательство.

В уравнении (6) выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получив однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{F}_1(w) \mathbf{Q} = 0,$$

решение $\mathbf{F}_1(w)$ которого запишем в виде произведения

$$\mathbf{F}_1(w) = \mathbf{R} \Phi_1(w) = \mathbf{R} \cdot \exp\{jw\kappa_1\}, \quad (7)$$

вектора \mathbf{R} определяется системой (4) и скалярной функцией $\Phi_1(w)$, вид которой найден равенством (7). Значения величины κ_1 определим следующим образом. Сложим все уравнения системы (6), умножив это равенство справа на единичный вектор-столбец \mathbf{E} . В силу условия $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} = 0$ получим равенство

$$j(e^{-j\varepsilon w} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{E} = \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) (e^{j\varepsilon w} - 1) \mathbf{BE}.$$

Поделив левую и правую части этого равенства на ε и полагая $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что для $\mathbf{F}_1(w)$ выполняется равенство

$$w \frac{\partial \mathbf{F}_1(w)}{\partial w} \mathbf{E} = \mathbf{F}_1(w) jw \mathbf{BE}. \quad (8)$$

В уравнение (8) подставим произведение (7) и, учитывая (4), получим уравнение, определяющее вид величины κ_1 :

$$\kappa_1 = \mathbf{RBE}.$$

Теорема доказана.

В силу замен (5) и учитывая (7), запишем равенство для функции $\mathbf{H}(u)$:

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) \approx \mathbf{F}_1(w) = \mathbf{R} \cdot \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\mu}\right\}.$$

Определение. Функцию

$$h_1(u) = \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\mu}\right\}$$

будем называть асимптотикой первого порядка характеристической функции $h(u) = \mathbf{H}(u) \mathbf{E}$ числа занятых приборов $i(t)$.

Асимптотика второго порядка

Для нахождения асимптотики второго порядка в уравнении (3) выполним замену

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{H}_2(u) \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\mu}\right\},$$

тогда для вектор-функции $\mathbf{H}_2(u)$ получим уравнение

$$j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}_2(u)}{\partial u} = \mathbf{H}_2(u) \left\{ \mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \mathbf{B} + \kappa_1 (e^{-ju} - 1) \mathbf{I} \right\}, \quad (9)$$

где \mathbf{I} – единичная диагональная матрица.

Теперь в системе (9) обозначим $\mu = \varepsilon^2$ и выполним замены

$$u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_2(u) = \mathbf{F}_2(w, \varepsilon).$$

Получим задачу

$$j\varepsilon(e^{-j\varepsilon w} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, \varepsilon)}{\partial w} = \mathbf{F}_2(w, \varepsilon) \left\{ \mathbf{Q} + (e^{j\varepsilon w} - 1) \mathbf{B} + \kappa_1 (e^{-j\varepsilon w} - 1) \mathbf{I} \right\}. \quad (10)$$

Аналогично теореме 1 сформулируем утверждение:

Теорема 2. Предельное, при $\varepsilon \rightarrow 0$, значение $F_2(w)$ решения $F_2(w, \varepsilon)$ уравнения (10) имеет вид

$$F_2(w) = \mathbf{R} \cdot \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\},$$

где величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = \kappa_1 + \mathbf{f}_2 \mathbf{B} \mathbf{E},$$

в котором вектор \mathbf{f}_2 является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{f}_2 \mathbf{Q} + \mathbf{R}(\mathbf{B} - \kappa_1 \mathbf{I}) = 0.$$

Найденные функции $F_2(w)$ служат основой для построения асимптотики второго порядка.

Определение. Функцию

$$h_2(u) = \exp \left\{ ju \frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{\kappa_2}{\mu} \right\} \quad (11)$$

будем называть асимптотикой второго порядка характеристической функции $h(u) = \mathbf{H}(u)\mathbf{E}$ числа занятых приборов $i(t)$.

Асимптотика третьего порядка

Для нахождения асимптотики третьего порядка сформулируем следующее утверждение:

Теорема 3. Предельное, при $\varepsilon \rightarrow 0$, значение $F_3(w)$ решения $F_3(w, \varepsilon)$ уравнения

$$j\varepsilon^2 (e^{-j\varepsilon w} - 1) \frac{\partial F_3(w, \varepsilon)}{\partial w} = F_3(w, \varepsilon) \left\{ \mathbf{Q} + (e^{j\varepsilon w} - 1) \mathbf{B} + (\kappa_1 + j\varepsilon w \kappa_2) (e^{-j\varepsilon w} - 1) \mathbf{I} \right\}$$

имеет вид

$$F_3(w) = \mathbf{R} \cdot \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \kappa_3 \right\},$$

где вектор \mathbf{R} определен выше, а величина κ_3 определяется равенством

$$\kappa_3 = \kappa_1 + 2\mathbf{f}_2 \mathbf{B} \mathbf{E} + \mathbf{f}_3 \mathbf{B} \mathbf{E},$$

в котором вектор \mathbf{f}_2 определен в предыдущей теореме, а вектор \mathbf{f}_3 определяется неоднородной системой линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{f}_2 \mathbf{Q} + 2\mathbf{f}_1 (\mathbf{B} - \kappa_1 \mathbf{I}) + \mathbf{R} [\mathbf{B} + (\kappa_1 - 2\kappa_2 \mathbf{I})] = 0.$$

Найденные функции $F_3(w)$ служат основой для построения асимптотики третьего порядка.

Определение. Функцию

$$h_3(u) = \exp \left\{ ju \frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{\kappa_2}{\mu} + \frac{(ju)^3}{6} \frac{\kappa_3}{\mu} \right\} \quad (12)$$

будем называть асимптотикой третьего порядка характеристической функции $h(u) = \mathbf{H}(u)\mathbf{E}$ числа занятых приборов $i(t)$.

С помощью полученных асимптотик (11–12) и обратного преобразования Фурье, запишем асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов в системе:

$$P_2(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} h_2(u) du, \quad (13)$$

$$P_3(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} h_3(u) du. \quad (14)$$

Полученные распределения будем называть асимптотической аппроксимацией второго (13) и третьего (14) порядка допредельного распределения.

Метод моментов

Производная k -го порядка характеристической функции (3) позволяет найти начальные моменты k -го порядка числа занятых приборов в системе. В данной работе найдем центральные моменты. Для этого воспользуемся уравнением (9), решение $\mathbf{H}_2(u)$ которого является векторной характеристической функцией величины отклонения числа занятых приборов.

Решение $\mathbf{H}_2(u)$ уравнения (9) запишем в виде суммы векторного ряда:

$$\mathbf{H}_2(u) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(ju)^v}{v!} \mathbf{m}_v,$$

$$\mathbf{m}_0 = \mathbf{H}(0) = \mathbf{R}.$$

Здесь \mathbf{m}_v – векторный центральный момент v -го порядка, который определяет скалярный центральный момент числа занятых приборов равенством

$$\mu_n = M\{i(t) - M(i(t))\}^v = \mathbf{m}_v \mathbf{E}.$$

Уравнение (9) примет вид

$$ju \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-ju)^k}{k!} j \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(ju)^{v-1}}{(v-1)!} \mathbf{m}_v = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(ju)^v}{v!} \mathbf{m}_v \left\{ \mathbf{Q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ju)^k}{k!} [\mathbf{B} + (-1)^k \kappa_1 \mathbf{I}] \right\}.$$

Далее, выполняя преобразования и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной u , получим рекуррентное уравнение для векторных центральных моментов n -го порядка

$$\mathbf{m}_n = -\mathbf{R} [\mathbf{B} + (-1)^n \kappa_1 \mathbf{I}] - \sum_{v=1}^{n-1} C_n^v \mathbf{m}_v \left\{ \mathbf{B} + (-1)^{n-v} \left[\kappa - \frac{v}{n-v+1} \mu \right] \mathbf{I} \right\} (\mathbf{Q} - n\mu \mathbf{I})^{-1},$$

где $\mathbf{m}_0 = \mathbf{R}$. Последовательно определяя значения \mathbf{m}_n при $n = 1, 2, 3, \dots$, найдем скалярный центральный момент n -го порядка μ_n в виде

$$\mu_n = \mathbf{m}_n \mathbf{E}. \tag{15}$$

Численный метод

Для того чтобы получить распределение вероятностей числа занятых приборов в допредельной ситуации, необходимо рассмотреть систему уравнений Колмогорова (1) для стационарного распределения $P(k, i)$. Решение системы (1) запишем в 7 этапов [11].

1. Равенство (1) перепишем в матричном виде

$$-\mathbf{P}(i)(\mathbf{B} + i\mu \mathbf{I} - \mathbf{Q}) + \mathbf{P}(i-1)\mathbf{B} + \mathbf{P}(i+1)(i+1)\mu = 0, \tag{16}$$

где $\mathbf{P}(i) = \{P(1,i), P(1,i), \dots\}$.

2. При $i = 0$ запишем

$$\mathbf{P}(0)(\mathbf{Q} - \mathbf{B}) + \mathbf{P}(1)\mu = 0.$$

3. Решение системы (16) запишем в виде произведения вектора $\mathbf{P}(0)$ на матрицу $\mathbf{V}(i)$

$$\mathbf{P}(i) = \mathbf{P}(0) \cdot \mathbf{V}(i), \tag{17}$$

где $\mathbf{V}(0) = \mathbf{I}$, а \mathbf{I} – диагональная единичная матрица.

4. Подставляя (17) в матричное уравнение (16), из первого равенства системы (16) выразим $\mathbf{V}(1)$

$$\mathbf{V}(1) = \frac{1}{\mu} \mathbf{V}(0) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{Q}).$$

5. Для реализации основного алгоритма, когда $i > 0$, ($0 < i \leq N$), запишем рекуррентное равенство

$$\mathbf{V}(i) = \frac{1}{i\mu} \left[\mathbf{V}(i-1) \cdot (\mathbf{B} + (i-1)\mu \mathbf{I} - \mathbf{Q}) - \mathbf{V}(i-2)\mathbf{B} \right],$$

где величину N можно выбрать следующим образом:

$$N \geq \frac{\kappa_1 + 3\sqrt{\kappa_2}}{\mu}.$$

6. Так как

$$\mathbf{R} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(i) = \mathbf{P}(0) \sum_{i=0}^N \mathbf{V}(i) = \mathbf{P}(0)\mathbf{S},$$

где $\mathbf{S} = \sum_{i=0}^N \mathbf{V}(i)$, то вектор $\mathbf{P}(0)$ определяется равенством

$$P(0) = R \cdot S^{-1},$$

где R – стационарное распределение вероятностей значений цепи Маркова $k(t)$, определяемое системой (4).

7. Далее получаем двумерное распределение вероятностей $P(i)$

$$P(i) = R \cdot S^{-1},$$

которое численно решает поставленную задачу нахождения распределения вероятностей числа занятых приборов в системе.

Сравнение асимптотических и допредельных характеристик

Теперь выясним, насколько результаты, полученные с помощью асимптотического анализа, близки к результатам, полученным в допредельной ситуации, используя метод моментов и численный метод.

Покажем отклонение значений семиинвариантов κ_i ($i = 1, 2, 3$), полученных с помощью метода асимптотического анализа, от допредельных, полученных с помощью метода моментов (15) (табл. 1).

Таблица 1

Сравнение асимптотических и допредельных семиинвариантов

Порядок семиинвариантов, i	Допредельные семиинварианты				Асимптотические семиинварианты
	$\mu=0,5$	$\mu=0,2$	$\mu=0,1$	$\mu=0,05$	
κ_1	0,924	0,924	0,924	0,924	0,924
κ_2	0,940	0,945	0,948	0,949	0,951
κ_3	0,970	0,982	0,986	0,989	0,992

По данным табл. 1 можно сделать вывод о том, что асимптотические семиинварианты хорошо аппроксимируют допредельные, что следует из близости величин κ_i ($i = 1, 2, 3$) для различных значений μ .

Теперь сравним распределения вероятностей числа занятых приборов, полученные методом асимптотического анализа и численным методом. Для этого найдем расстояние Колмогорова между этими распределениями

$$D_n = \max_{0 \leq m < \infty} \left| \sum_{i=0}^m P_n(i) - \sum_{i=0}^m P(i) \right|, \quad (n=2,3),$$

где $P_n(i)$ – функция распределения, полученная с помощью асимптотического анализа, а $P(i)$ – функция распределения для допредельной ситуации, полученная численным алгоритмом.

Используя заданные значения параметров:

$$Q = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 & -0,8 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \end{bmatrix},$$

для различных значений μ значения D_n составили табл. 2.

Таблица 2

Область применимости асимптотических результатов к допредельной ситуации

n	μ		
	0,2	0,1	0,05
D_2	0,116	0,085	0,061
D_3	0,029	0,014	0,007

Из табл. 2 видно, что с уменьшением параметра продолжительности обслуживания на приборе расстояние Колмогорова уменьшается, т.е. повышается точность аппроксимации допредельного распределения распределением, полученным методом асимптотического анализа. Более того, точность такой аппроксимации существенно повышается при переходе от асимптотики второго порядка к асимптотике третьего порядка. Полагая приемлемой погрешность аппроксимации, равную значению 0,04 расстояния Колмогорова, точность полученного асимптотического распределения третьего порядка достаточно велика, так как расстояние Колмогорова с допредельным распределением не превосходит значение 0,03.

Прикладное значение полученных результатов

В телекоммуникационных системах, телефонных сетях связи актуальным является рассмотрение и решение задачи Эрланга. В 1917 г. А.К. Эрланг развил теорию телефонной связи и получил формулы для вероятностей различного числа обслуживаемых абонентов, распределение времени ожидания при равновесном состоянии системы и вероятности отказов для системы с потерями.

В классической задаче Эрланга рассматривается N -линейная СМО, на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок. Обслуживание каждым прибором экспоненциальное с параметром μ . Находится стационарное распределение $\pi(N)$ числа занятых приборов, если заявки, поступившие в систему, когда заняты все приборы, теряются:

$$\pi(N) = \frac{\rho^N}{N!} / \sum_{i=0}^N \frac{\rho^i}{i!},$$

где $\rho = \lambda/\mu$. В теории телетрафика этой формулой пользуются до сих пор, хотя в связи с повышенной компьютеризацией и передачей по телефонным каналам разнородной информации требуется дальнейшее обобщение этих классических результатов.

Предлагаемая в данной работе теория исследования позволяет дать достаточно точное решение задачи Эрланга следующим образом:

$$\pi(i) = P(i) / \sum_{k=0}^N P(k),$$

здесь $\pi(i)$ – условное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе с неограниченным числом обслуживающих приборов при условии, что их количество не превосходит N . Таким образом, полученные в данной работе результаты, а именно распределение $P(i)$, ($i = \overline{0, \infty}$) числа занятых приборов в системе MAP/M/ ∞ , применимы для задачи Эрланга. В частности, вероятность потери, определяемая в задаче Эрланга как $\pi(N)$, в рассматриваемой системе составит

$$\pi(N) = P(N) / \sum_{k=0}^N P(k).$$

Заключение

В работе проведено исследование системы с неограниченным числом обслуживающих приборов и входящим MAP-поток. Получены допредельное и асимптотическое распределения вероятностей числа занятых приборов в системе. Показано прикладное значение полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)», проект №11803.

Литература

1. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – 4-е. изд. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 400 с.
2. Дудин А.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками / А.Н. Дудин, В.И. Клименок. – Мн.: БГУ, 2000. – 175 с.
3. Назаров А.А. Асимптотический анализ системы MMP|M1|ИПВ в условии предельно редких изменений состояний входящего потока / А.А. Назаров, А.Е. Горбатенко // Изв. Том. политех. ун-та. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – Т. 315, № 5. – С. 187–190.
4. Baum D. The infinite server queue with Markov additive arrivals in space // Proceedings of the international conference «Probabilistic analysis of rare events». – Riga, Latvia, 1999. – P. 136–142.
5. Breuer L. The Inhomogeneous BMAP/G/infinity queue / Lothar Breuer, Dieter Baum // Proceedings 11th GI/ITG Conference on measuring, modelling and evaluation of computer and communication systems (MMB 2001) – Aachen, Germany, 2001. – P. 209–223.
6. Decreusefond L. A functional central limit theorem for the M/GI/ ∞ queue / Laurent Decreusefond, Pascal Moyal [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&handle=euclid.aop/1227708915> (дата обращения: 05.05.2011).
7. Doorn E.A. van. Note on the GI/GI/infinity system with identical service and interarrival-time distributions / E.A. van Doorn, A.A. Jagers // Journal of queueing systems. – 2004. – № 47. – P. 45–52.

8. Reed J. Distribution-valued heavy-traffic limits for the $G/GI/\infty$ queue [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://pages.stern.nyu.edu/~jreed/Papers/DistributionFinal.pdf>, свободный (дата обращения: 10.05.2011).
9. Baltzer J.C. On the fluid limit of the $M/G/\infty$ queue queueing systems // Theory and applications. – August 2007. – Vol. 56, Issue 3–4. – P. 255–265.
10. Назаров А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, А.А. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
11. Назаров А.А. Исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов / А.А. Назаров, И.А. Семенова // Вестник Томского государственного университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – №3 (12). – С. 85–96.

Назаров Анатолий Андреевич

Почетный работник ВПО РФ, д-р техн. наук, профессор,
зав. каф. теории вероятностей и математической статистики
Национального исследовательского Томского государственного университета (ТВиМС НИТГУ)
Тел.: 8 (382-2) 52-95-99
Эл. почта: anazarov@fpmk.tsu.ru

Семенова Инна Анатольевна

Аспирант каф. ТВиМС НИТГУ
Тел.: 8 (382-2) 53-38-25
Эл. почта: inna_ac@mail.ru

Nazarov A.A., Semenova I.A.

Comparison of asymptotic and prelimit characteristics of MAP/M/ ∞ system

The retrieval queues system with input MAP flow (Markovian Arrival Process) and unlimited number of servers is considered. To study this system we propose the method of asymptotic analysis under growing time of service, the method of moments and numerical method for prelimit situation. The analysis allows us to compare asymptotic and prelimit characteristics of the queueing system.

Keywords: asymptotic analysis, input MAP flow, Kolmogorov's distance.