УДК 519.633.6

И.Г. Боровской

Область применимости метода дробной размерности для численного расчета невязких течений

В работе [1] для численного исследования течения невязкой среды на основе гиперболической системы уравнений в каналах сложной формы предложен квазимногомерный подход, основная идея которого заключается в том, что для расчета параметров течения предлагается использовать комбинированный метод, имеющий, с одной стороны, высокую разрешающую способность многомерного подхода, а с другой – обладающий достаточной эффективностью одномерного.

Ключевые слова: гиперболическая система уравнений, пространственные течения.

В работе [1] автором сформулирована физико-математическая постановка и сконструирована конечноразностная схема для решения задачи определения параметров течения невязкой среды в каналах сложной формы. В настоящей работе представлены результаты численного решения и указана область применимости предлагаемого комбинированного метода дробной размерности.

Неотъемлемой частью численного исследования является выяснение степени достоверности получаемых результатов. О качестве вычислений можно судить исходя из физического содержания задачи, так как интерпретация расчетных данных, за редким исключением, не вызывает затруднений. К более объективному критерию качества расчетов принадлежит проверка численного решения на внутреннюю сходимость, которая устанавливается путем дробления шага расчетной сетки, однако она также носит лишь качественный характер [2]. В то же время математически строго обоснованное алгоритмическое нахождение количественной оценки точности численного решения не представляется возможным [2–5]. Поэтому для выяснения степени уклонения численного решения от истинного привлекается ряд косвенных приемов, в числе которых в настоящей работе применяются следующие: 1) использование экспериментальных данных для тарировки методики, что является наиболее объективным способом оценки достоверности результатов расчета; 2) сравнение результатов, полученных различными способами, укладывающимися в рамках одного подхода, либо полученных различными методами. При этом рассматриваются следующие численные решения:

1) квазимногомерный способ, реализованный на основе схемы (5) работы [1];

2) дву- и трехмерный расчет невязкого газа по схеме (5) работы [1];

3) одномерное решение задачи при замене уравнения импульсов на участках геометрических особенностей гидравлическим соотношением, связывающим через коэффициент местного сопротивления потери полного давления со скоростным напором газового потока. Этот подход далее именуется «ξ-методикой».

Поворот потока. Рассматривается течение газа в канале с радиусом кривизны R и высотой h, осуществляющим поворот потока на угол $\pi/2$. Искривленный элемент с обоих торцов соединен с прямолинейными участками. Для трехмерного и квазимногомерного вариантов на линейных участках применялось равномерное дробление по оси канала, а на повороте – неравномерная расчетная сетка. Известно, что течение газа в изогнутом канале сопровождается появлением инерционной центробежной силы, направленной от центра кривизны к внешней стенке магистрали. Это обусловливает повышение давления у внешней стенки канала и его понижение у внутренней на протяжении всего участка поворота. Наличие радиального распределения давления вызывает деформацию профиля скорости (рис. 1), причем в силу положительного градиента давления вдоль внутренней стенки в ее окрестности наблюдается ускорение газового потока, тогда как у внешней поток замедляется. На начальном участке стабилизирующего элемента отмечается обратный эффект: ускорение потока у внешней стенки и его замедление у внутренней, причем неравномерность профиля скорости, возникающая на повороте, проявляется на всем линейном участке после искривления канала. Влияние поворота вверх по течению наблюдается на расстоянии, примерно равном 0,4 высоты канала. В расчете, базирующемся на квазимногомерной методике, также отмечается повышение давления на

внешней стенке канала, при этом радиальна компонента вектора скорости, составляющая 0,08÷0,10 от осевой, направлена от центра кривизны.

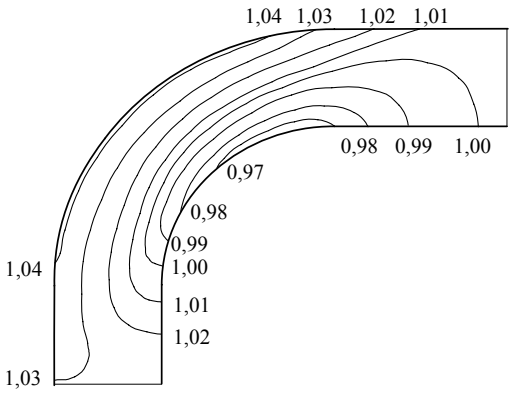

Рис. 1. Распределение статического давления на участке поворота потока

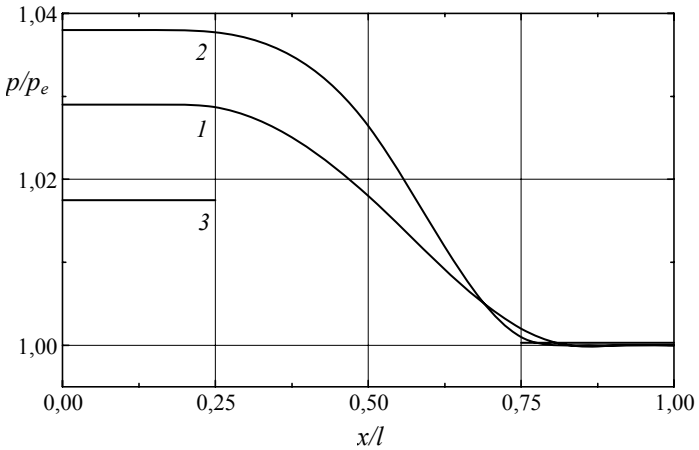

Рис. 2. Сопоставление результатов расчета распределения статического давления на участке поворота: *1* – трехмерный расчет; *2* – квазимногомерный подход; *3* – ξ-методика

На рис. 2 представлено сравнение распределений средних значений статического давления, вычисленных трехмерным и квазимногомерным способом, а также по ξ-методике. Видно, что, имея в целом удовлетворительное согласование результатов, для трехмерного случая, так же как и в предыдущем варианте, характерно более плавное распределение давления.

В экспериментальной работе [6] приводится аппроксимационная формула $\Delta p/(\rho u^2)_{ср} = h/R$, связывающая поперечный перепад статического давления на участке поворота плоского канала с удвоенной величиной среднего по сечению скоростного напора. Для условий данного расчета отношение $\Delta p/(\rho u^2)_{ср}$ равно 0,483, тогда как точное значение $h/R = 0{,}5$, что также свидетельствует об относительно высокой достоверности численных результатов.

Течение при слиянии потоков. Пусть ортогонально боковой поверхности плоского канала, ширина которого h_1, расположен второй канал шириной h_2. Во входных сечениях магистралей заданы постоянные значения секундного поступления газа G_{01} и G_{02} и температура торможения T_0, в выходном сечении первого (основного) канала – давление p_e. Расчеты проведены при фиксированном соотношении высот $h_1/h_2 = 5$ на прямоугольной сетке 150×24.

При малых значениях относительного бокового вдува газа $g \le 0{,}1$, где $g = G_{02}/(G_{01} + G_{02})$, наличие ответвления практически не сказывается на структуре течения в основном канале. Оно незначительно отличается от варианта движения газа в плоском канале без особенностей, т.е. при отсутствии осевого и высотного градиента давления.

При величине $g = 0{,}5$ (картина течения для данного случая приводится на рис. 3) влияние поступления газа из второго канала становится более существенным. За кромкой разворота потока образуется область разрежения, значение давления в которой меньше давления во внешней среде на 12%. Представленные на рис. 3 расчетные данные отнесены к величине p_e. По мере удаления от зоны слияния потоков, давление у верхней стенки основного канала возрастает и на расстоянии $l \approx 2h_1$ восстанавливается до значения p_e.

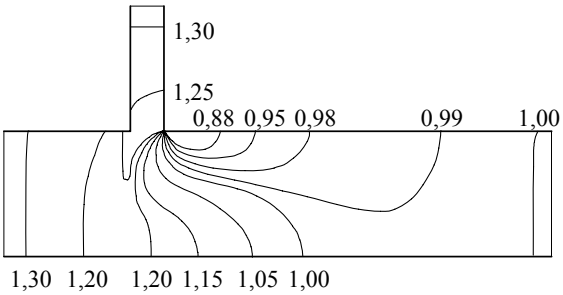

Рис. 3. Распределение статического давления при слиянии газовых потоков

Наличие обратного относительного осевого перепада давления у верхней стенки приводит к возникновению в ее окрестности области возвратного течения, что вызывает уменьшение «живого» проходного сечения первого канала и является причиной повышения давления в газоводах на участках до слияния потоков.

Сопоставляя численные данные двухмерного и квазидвухмерного расчетов (рис. 4), можно отметить удовлетворительное согласование результатов, полученных по данным методикам. Причем практически во всей расчетной области наблюдается превышение квазидвухмерного решения задачи в среднем на 6% относительно результатов двухмерного расчета, для которого характерно более плавное изменение давления по тракту основного канала.

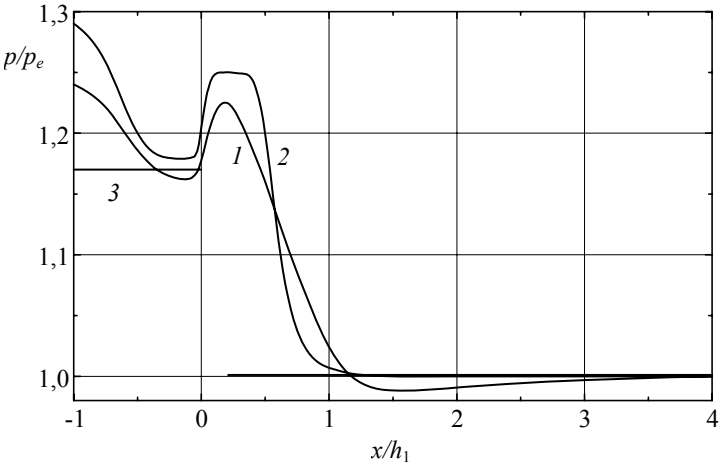

Рис. 4. Сопоставление результатов расчета распределения статического давления при слиянии потоков: *1* – двухмерный расчет; *2* – квазидвухмерный подход; *3* – ξ-методика

Заключение

Для квазимногомерного расчета отмечается превышение получаемых данных относительно результатов многомерных расчетов, а также в сравнении с имеющейся экспериментальной информацией. И если в последнем случае указанное различие можно отчасти объяснить влиянием сжимаемости среды, поскольку опытные значения коэффициентов местных сопротивлений в основном соответствуют стабилизированному течению жидкости, то относительно многомерных результатов погрешности «квазимногомера» носят, по-видимому, методический характер. Следовательно, результаты квазимногомерного расчета можно трактовать как верхнюю оценку тех распределений газодинамических параметров, которые наблюдаются в реальных течениях.

Использование квазимногомерного подхода не позволяет, конечно, выявить все тонкие детали в структуре течения – он обладает лишь некоторой долей информативности, присущей многомерным методам, однако на основе квазимногомерного способа описания процессов течения возможно проведение исследований, цель которых заключается в изучении особенностей распределения газодинамических параметров в геометрически сложных областях, когда эффекты неодномерности газового потока учитываются интегрально. Очевидно, что одномерное решение данной задачи не обладает отмеченной способностью. Таким образом, квазимногомерный подход занимает промежуточное положение между одномерным и многомерным методами как по точности, так и по объему затрат ресурсов компьютера, а задачи, решаемые на его основе, можно отнести к классу задач дробной размерности.

Литература

1. Боровской И.Г. Моделирование пространственных невязких течений на основе метода дробной размерности // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2011. – № 1(24), ч. 3. – С. 171–176.

2. Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1978. – 668 с.

3. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / под ред. К.И. Бабенко. – М.: Наука, 1979. – 296 с.

4. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С.К. Годунова. – М.: Наука, 1976. – 400 с.

5. Rizzi A.W. Time-Split Finite-Volume Method for Three-Dimensional Blut-Body Flow / A.W. Rizzi, V. Inoye // AIAA J. – 1983. – Vol. 11. – P. 1478–1485.

6. Shiragami Naohiro, Ichiro. Pressure Loses in Square Section Bends // J. Chem. Eng. Jap. – 1991. – Vol. 14, № 13. – P. 173–177.

Боровской Игорь Георгиевич
Д-р физ.-мат. наук, зав. каф. экономической математики информатики и статистики ТУСУРа
Тел.: 8 (382-2) 90-01-87
Эл. почта: igdoca@mail.ru

Borovskoy I.G.
The applicability of fractional dimension method for computational modeling of inviscid flow

In the paper [1] we offer a new quasimultivariate approach for numerical investigation of inviscid flow in shaped channels. The main idea is to use the method which combines the detailing of three-dimensional approach and the efficiency of one-dimensional approach for description of gas flows.
Keywords: hyperbolic partial differential equations, three-dimensional channels.