

УДК 519.633.6

И.Г. Боровской

Моделирование пространственных невязких течений на основе метода дробной размерности

Для численного исследования течения невязкой среды в каналах сложной формы в основном используются два подхода. Первый из них – многомерный – позволяет получить полную, детализированную картину рассматриваемого течения, но, как правило, используется для поисковых расчетов и практически не применяется для проведения широкомасштабных параметрических исследований, несмотря на постоянно наращиваемые возможности современных компьютерных средств. Второе направление базируется на представлении пространственной области решения в виде комбинации прямолинейных, одномерных участков и участков местных сопротивлений. Учет эффектов неоднородности течения при этом проводится заменой уравнения сохранения количества движения на данных участках соотношением, которое связывает полные давления до и после местного сопротивления. Для определения значения коэффициентов, входящих в данное соотношение, привлекается обширный экспериментальный материал, однако в общем случае нахождение этих констант представляет собой самостоятельную и довольно сложную задачу. В данной ситуации автором предлагается для расчета параметров течения использовать комбинированный метод, имеющий высокую разрешающую способность многомерного подхода и обладающий достаточной эффективностью одномерного.

Ключевые слова: гиперболическая система уравнений, пространственные течения, метод Годунова.

Рассматривается течение газа в пространственных системах магистралей. В общем случае система коммуникаций состоит из произвольного количества элементов различной формы. Каналы могут иметь переменный внутренний радиус и осевое искривление. Произвольно количество разветвлений и различного типа соединений магистралей, произвольна также и ориентация элементов конструкции в пространстве. Моделирование процессов течения газа в пространственных системах магистралей основывается на следующих допущениях.

Постановка задачи. Основные допущения

1. Газ считается невязким и нетеплопроводным. Известно, что все реальные газы с достаточной степенью точности можно считать идеальной средой в тех случаях, когда рассматриваются состояния, далекие от областей фазовых превращений [1]. Кроме того, в рамках модели идеального газа вязкостные эффекты, обуславливающие диссипативные потери за счет трения, и теплообмен между газовым потоком и ограничивающей поверхностью каналов можно учесть, включая в правую часть уравнений газовой динамики дополнительные члены.

2. Приняв эйлеров способ описания течения и следуя работе [2], можно выписать систему нестационарных интегральных уравнений газовой динамики в форме законов сохранения массы, количества движения и энергии. Выбор интегральной постановки не случаен. Ряд авторов [3, 4] отмечает, что интегральная формулировка обладает большей информативностью – она имеет смысл и в случае разрывного распределения характеристик. И если дифференциальные уравнения, сохраняющие свое значение в классе непрерывных функций, нуждаются в дополнительных условиях на разрывах, то интегральные уравнения уже содержат эти условия.

Система уравнений

Таким образом, для фиксированного объема V , ограниченного поверхностью S , имеем:

– закон сохранения массы

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_S m dS = 0, \quad (1)$$

– закон сохранения количества движения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{U} dV + \oint_S (m\mathbf{U} + p\mathbf{n}) dS = 0, \quad (2)$$

– закон сохранения полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV + \oint_S (E + \frac{p}{\rho}) m dS = 0, \quad (3)$$

где $m = \rho (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})$ – массовая скорость потока; $N = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})$ – скалярное произведение вектора скорости \mathbf{U} на внешнюю нормаль \mathbf{n} к поверхности S ; $E = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2}$ – удельная полная энергия единицы объема; p , ρ , γ – давление и плотность среды, а также показатель адиабаты.

Начальные условия для системы уравнений (1)–(3) имеют вид

$$\rho = p_H / (R_c T_H), \quad |\mathbf{U}| = 0, \quad p = p_H.$$

Граничные условия

На непроницаемых для газа поверхностях выставляется так называемое условие «непротекания» – равенство нулю скорости, нормальной к данной границе.

При постановке граничных условий для одномерной задачи на поверхностях, через которые происходит обмен массой, импульсом и энергией с внешней средой, следует придерживаться требований, аналогичных тем, которые предъявляются к краевым условиям для гиперболических систем линейных уравнений [2, 5]. Как отмечено в работе [3], возможность такой аналогии обеспечивается тем, что все операции численной схемы при переходе на новый временной слой можно трактовать как действия над линеаризованными уравнениями.

При формулировке краевых условий для пространственной задачи к условиям одномерного приближения должны быть добавлены соотношения для тангенциальных компонент вектора скорости T_1 и T_2 .

Пусть правая граница элемента контактирует с внешней средой, которая полагается неподвижной и характеризуется двумя термодинамическими параметрами – давлением p_e и плотностью ρ_e , в общем случае зависящими от времени.

1. Если осуществляется сверхзвуковое истечение газа из выходного сечения, т.е. $N > a$, где N – скорость газа, нормальная к граничной поверхности, a – местная скорость звука, вычисленная по давлению P и плотности R , относящимся к этой же границе, то краевые условия не выставляются, а все параметры течения переносятся на границу из области решения.

2. При дозвуковом истечении газа, т.е. $a \geq N \geq 0$, требуется одно граничное условие для одномерного приближения (ОП), в качестве которого выбирается равенство статических давлений на границе и во внешней среде $P = p_e$, а тангенциальные компоненты вектора скорости T_1 и T_2 экстраполируются из области течения.

3. В случае дозвукового затекания газа в магистраль из внешней среды, т.е. $N < 0$, $-N < a$, необходимо выставлять два условия для ОП: равенство полных энтальпий и сохранение энтропийной функции при равенстве нулю тангенциальных компонент вектора скорости T_1 и T_2 :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{R} + \frac{1}{2} N^2 = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \right)_e, \quad \frac{P}{R^\gamma} = \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)_e. \quad (4)$$

4. При $N < 0$, $-N > a$ осуществляется сверхзвуковое затекание газа в магистраль, что требует задания трех граничных условий для ОП. Это могут быть изоэнтропийные соотношения [6], связывающие параметры во внешней среде и входном сечении канала, которое в данном случае является критическим.

Аналогичным образом рассматривается левая граница с учетом того, что в этом случае направление движения газа меняется на противоположное.

Приведенная постановка граничных условий охватывает все возможные режимы течения, которые могут реализовываться и сменять друг друга на протяжении интересующего интервала времени.

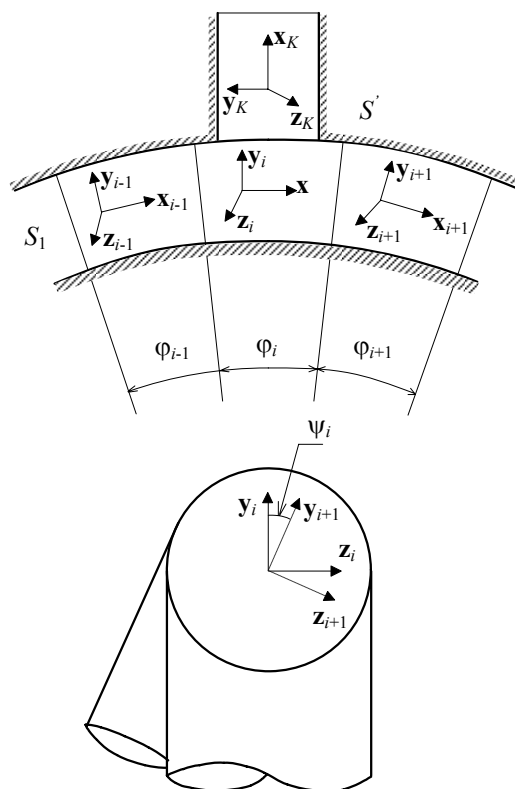
Описание расчетного алгоритма

Система магистралей пространственной формы разбивается на K расчетных элементов плоскостями, перпендикулярными к образующей поверхности каналов.

Расчетный элемент представляет собой некоторый малый объем, ограниченный боковой, непроницаемой для газа поверхностью и двумя или более (в случае разветвления магистрали на данном участке) поверхностями обмена массой, импульсом, энергией (рис. 1). Для каждого i -го элемента ($i = 1, \dots, K$) вводится ортогональная система координат с базовыми векторами \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} (\mathbf{x} направлен по оси элемента) так, что компоненты u , v , w вектора скорости \mathbf{U} равны скалярным произведениям на соответствующие единичные векторы базиса $u = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{x})$, $v = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{y})$, $w = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{z})$.

Угол между соседними плоскостями разбиения будет именоваться углом излома φ , а угол между плоскостями $\mathbf{x}0\mathbf{y}$ для двух элементов, имеющих общую поверхность обмена, – углом скрутки ψ (рис. 1).

Рис. 1. Схема разбиения расчетной области на составляющие элементы



Следует заметить, что за исключением некоторых особенностей (слияние потоков, протекание газа через диафрагмы и др.) поток газа в коммуникациях является плавно меняющимся вдоль направления преимущественного течения, «повторяющим» кривизну образующих поверхностей каналов. Использование локальных ортогональных систем координат позволяет, во-первых, сохранить данное свойство течения, а во-вторых, создать универсальную методику, пригодную для расчета практически любой конструкции газовых магистралей. Применение локальных криволинейных координат отвечает этим же требованиям, но приводит к чрезвычайно громоздким расчетным формулам. Кроме того, возможность независимого построения решения для каждой расчетной ячейки продиктована видом соотношений на поверхностях разрывов для многомерного случая, куда входят нормальная и касательная компоненты вектора скорости по отношению к поверхности разрыва.

Разностная схема

Разностную схему можно получить непосредственно из интегральных законов сохранения (1)–(3), используя для компактности изложения векторную запись уравнений. Предполагается, что параметры, приписываемые объемам расчетных ячеек и составляющие вектор-столбец \mathbf{A} , являются кусочно-постоянными функциями пространства. Тогда справедливы следующие преобразования:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{A} dV = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} V_i) \cong V_i \frac{\mathbf{A}^i - \mathbf{A}_i}{\tau}.$$

Верхним индексом помечены параметры на временном слое $t_0 + \tau$, нижним – на слое t_0 . Полагая также постоянство величин, входящих в \mathbf{C} , интегрирование по S_i заменяется суммированием, после чего можно получить явную разностную схему для определения параметров течения через потоки массы, импульса и энтальпии

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{A}_i + \frac{\tau}{V_i} \left[\mathbf{D}_i - \mathbf{F}_i - \sum_{S_i} (\mathbf{C}S)_i \right]. \quad (5)$$

Знаком суммы отмечено суммирование по всей ограничивающей поверхности S_i , которую образуют непроницаемые поверхности и площади, свободные для прохода газа. Подынтегральная функция \mathbf{C} принимает различные значения в окрестности линий стыковки поверхностей и, таким обра-

зом, не является постоянной в течение сколь угодно малого промежутка времени τ . Однако обособлением сделанного перехода может служить практическое совпадение результатов, полученных при решении двумерных уравнений акустики по данной схеме и схеме, точно учитывающей течение в окрестности угловых точек [7].

Расчету потоковых членов $(CS)_i$ предшествует несколько этапов. Для выяснения содержания каждого из них рассматривается поверхность обмена S_i между двумя соседними ячейками с номерами i и $i + 1$ (см. рис. 1).

По известным компонентам вектора скорости в i -й и $(i + 1)$ -й расчетных ячейках вычисляются нормальные $n_{л}, n_{п}$ и касательные $t_{1л}, t_{1п}, t_{2л}, t_{2п}$ составляющие на левой и правой сторонах поверхности S_1 . Давление P , плотность R , нормальная скорость N на этой поверхности рассчитываются из соответствующей конфигурации задачи распада разрыва, в качестве входных параметров для которой используются $\rho_i, p_i, n_{л}, \rho_{i+1}, p_{i+1}, n_{п}$. Полученные данные дополняются касательными составляющими T_1, T_2 на грани S_1 . Затем восстанавливаются компоненты вектора скорости в i -й и $(i + 1)$ -й расчетных ячейках и рассчитываются потоки массы, проекции импульса и энтальпии на грани S_1 .

Вычисление потоков в направлении Oy и Oz проводится аналогично с той лишь разницей, что вместо углов φ и ψ используется угол конусности – угол между осью расчетной ячейки и ее образующей поверхностью.

В силу условия «непротекания» на непроницаемой поверхности S' потоки массы и энтальпии тождественно равны нулю. Для определения проекции потока импульса требуется вычисление давления на S' , которое может быть рассчитано по формулам «симметричного» распада разрыва [7].

Модификация алгоритма распада произвольного разрыва

В работе [7] приводится алгоритм расчета полного распада произвольного разрыва в точной постановке, причем для конфигураций ударная волна – ударная волна и ударная волна – волна разрежения давление на контактном разрыве отыскивается из решения трансцендентных уравнений. В целях экономии расчетного времени авторами предлагается безытерационный вариант определения давления на контактном разрыве.

1. После алгебраических преобразований исходного уравнения, представленного в [7], для конфигурации двух ударных волн получим безразмерное уравнение для определения давления P на контактной поверхности $\pi = P/p_{л}$:

$$f\pi - 1 + s\sqrt{f}(\pi - 1)g' = m\sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma}}(f\pi + g).$$

Здесь используются следующие обозначения: $f = p_{п}/p_{л}$ – перепад давления в соседних ячейках; $s = a_{п}/a_{л}$ – отношение местных скоростей звука; $m = \gamma(M_{л} - sM_{п})$ – комплекс от разности чисел Ма-

ха; $g = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$ – комплекс показателя адиабаты γ . В работе [8] замечено, что выражение $g' = \sqrt{\frac{1 + g/(f\pi)}{1 + g/\pi}}$

слабо отличается от единицы в широком диапазоне изменения параметров $\pi > 1, f > 1$, характерных для этого случая. Полагая $g' = 1$, окончательно получим:

$$P = p \left[z_1 + z_2 + \sqrt{z_2 \left(z_1 + \frac{1}{2} z_2 + g \right)} \right], \quad z_1 = f \frac{1 + s\sqrt{f}}{f + s\sqrt{f}}, \quad z_2 = \frac{\gamma + 1}{4\gamma} \left(\frac{fm}{f + s\sqrt{f}} \right)^2.$$

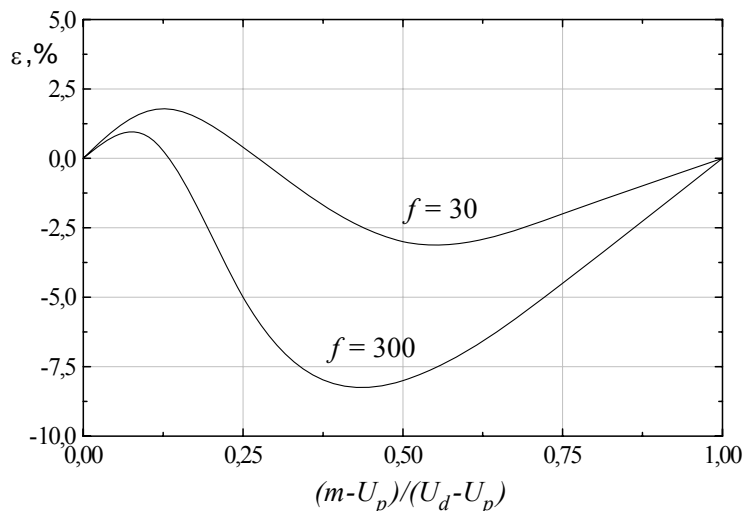
Сравнение данного решения с точным показало, что расхождение результатов не превышает 0,6% при перепаде давления в соседних ячейках $f = 3$. При $f \rightarrow 1$ и $f \rightarrow \infty$ ошибка монотонно убывает до нуля.

2. Для конфигурации ударная волна – волна разрежения была найдена удачная аппроксимационная формула, связывающая искомое давление на контактном разрыве P с перепадом давлений f и безразмерными скоростями, соответствующими ударной волне U_d и волне разрежения U_p :

$$P = p \left[1 + \frac{m - U_p}{U_d - U_p} \left(\sqrt[3]{f} - 1 \right) \right]^3, \quad U_p = -\frac{2\gamma}{\gamma - 1} s \left(1 - f^{-\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \right), \quad U_d = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1}} \frac{f - 1}{\sqrt{f + g}}.$$

О величине погрешности данной формулы можно судить по рис. 2, указывающему уровень относительной ошибки в диапазоне изменения параметров $f \geq 1$, $m \in [U_p, U_d]$, который определяется рассматриваемой конфигурацией. Из рис. 2 видно, что аппроксимационная погрешность предлагаемой формулы для $f = 300$ (при $f \rightarrow 1$ $\varepsilon \rightarrow 0$) значительно превосходит ошибку предыдущего случая, где $\varepsilon < 0,6\%$, однако она существенно меньше ошибки интерполяционной зависимости, предлагаемой в работе [8], для которой при том же перепаде $\varepsilon = 21\%$.

Рис. 2. Относительная погрешность безытерационного решения задачи о распаде произвольного разрыва



Заметим, что использование предлагаемых выражений для нахождения параметров на контактной поверхности позволяет сократить расчетное время на 30% по сравнению с итерационным вариантом алгоритма, представленным в работе [7].

Приведенная схема расчета в основном соответствует принципам, разработанным С.К. Годуновым и изложенным в многочисленных публикациях [3, 7]. Модификация В.П. Колгана с изменениями Н.И. Тилляевой [9] затрагивает первые этапы вычислений.

Поскольку принимается, что параметры ρ , p , u , v , w в каждой расчетной ячейке являются не кусочно-постоянными, а кусочно-линейными функциями, то для решения задачи распада разрыва используется набор вспомогательных величин, которые рассчитываются по формулам, предложенным, например, в работе [9].

Указанным способом можно провести расчет всей области решения, если будут известны потоки газодинамических величин на поверхности обмена с внешней средой. Давление P , плотность R и нормальная скорость N , участвующие в вычислении этих потоков, определяются из граничных условий, метод реализации которых аналогичен предложенному в работе [3].

Таким образом, указаны все потоковые члены $(CS)_i$ на поверхности S_i , входящие под знак суммирования в разностной схеме (5).

Исследование аппроксимации и устойчивости разностной схемы (5) здесь не приводится, поскольку, как уже было отмечено выше, она в основном соответствует принципам, разработанным С.К. Годуновым и В.П. Колганом. Полный анализ конечно-разностных схем, построенных на этих принципах, представлен, например, в работах [7, 9].

Заключение

При выводе разностной схемы (5) и изложении способа нахождения потоковых членов $(CS)_i$ не делалось специальных предположений о размерности задачи. Следовательно, схема (5) пригодна для расчетов как на основе дву- и трехмерного подходов, так и при использовании квазимногомерного. Квазимногомерным способом описания процессов течения именуется метод, в определенной мере сочетающий положительные качества многомерного и одномерного подходов, а именно: достаточную информативность первого и довольно высокую эффективность второго. Суть данного метода состоит в том, что при одномерном разбиении области решения только вдоль направления преимущественного течения газа вектор скорости в каждой расчетной ячейке имеет три компоненты, следовательно, система разностных уравнений (5) в отличие от традиционно одномерной, будет содержать три скалярных аналога векторного уравнения, представляющего закон сохранения количества движения. Применение этого подхода позволяет учесть неодномерный характер течения газа на геометрических особенностях, при этом время расчета существенно меньше по сравнению с расчетным временем многомерного варианта. Область применимости предлагаемого подхода и оценка степени достоверности получаемых результатов будут представлены в дальнейшем.

Литература

1. Яворский Б.М. Справочник по физике / Б.М. Яворский, А.Д. Детлаф. – М.: Наука, 1977. – 942 с.
2. Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1978. – 668 с.
3. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Под ред. К.И. Бабенко. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
4. Rizzi A.W., Inoye V. Time-Split Finite-Volume Method for Three-Dimensional Blunt-Body Flow // AIAA J. – 1983. – Vol. 11. – P. 1478–1485.
5. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 392 с.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
7. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С.К. Годунова. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
8. Матвеев С.К. Некоторые аспекты применения метода Годунова к решению задач нестационарной газовой динамики // Ученые записки Ленинградского ун-та. – Л., 1977. – № 393. – С. 41–54.
9. Тилляева Н.И. Исследование возможностей модификации В.П. Колгана численной схемы С.К. Годунова, сохраняющей аппроксимацию на произвольных расчетных сетках: Технический отчет ЦИАМ. – 1983. – № 9860. – 46 с.

Боровской Игорь Георгиевич

Д-р физ.-мат. наук, зав. каф. экономической математики информатики и статистики ТУСУРа

Тел.: 8 (382-2) 90-01-87

Эл. почта: igdoca@mail.ru

Borovskoy I.G.

Inviscid flow computational modeling by the fractional dimension method

The original approach is offered for simulation a some class of gas dynamic problems, for which direction of primary gas moving can be specified. This method combines sufficient detailing of three-dimensional approach and enough efficiency of one-dimensional approach for description of gas flows. Physicist-mathematical model and method to solve the problem are presented in detail. The efficiency of proposed approach is demonstrated by simulation for gas moving into the three-dimensional channels.

Keywords: hyperbolic partial differential equations, three-dimensional channels., Godunov's method.