УДК 681.5.01:658.512

В.Г. Букреев

Синтез нелинейного регулятора дискретных систем управления электромеханическими объектами

Предложен алгоритм синтеза нелинейного регулятора дискретной электромеханической системы с широтно-импульсной модуляцией управляющего сигнала на основе второго метода Ляпунова. Определены законы нелинейного управления, обеспечивающие асимптотическую устойчивость регулируемых процессов в электромеханическом объекте с источником энергии ограниченной мощности. Показана эффективность нелинейного регулятора, минимизирующего энергозатраты в дискретной системе управления электромеханическим объектом с параметрическими возмущениями.

Ключевые слова: нелинейный регулятор, электромеханический объект, широтно-импульсный модулятор.

Программное движение исполнительных электромеханических объектов (ЭМО) многих промышленных механизмов сопровождается значительными возмущениями различного типа, как, например, изменениями питающего напряжения силового преобразователя, статического и динамического моментов нагрузки, нестабильностью параметров двигателей и устройств обратных связей системы управления. В тех случаях, когда возмущения принимают значения на интервале с известными границами, нелинейные регуляторы дают приемлемое решение задач слежения и стабилизации в системах управления сложными электромеханическими объектами. При этом такие важные свойства, как плавность движения ЭМО в окрестности заданного позиционирования и асимптотическая устойчивость регулируемых процессов, можно обеспечить законами управления на основе второго метода Ляпунова [1]. Как правило, для анализа устойчивости систем и объектов, динамическое движение которых представляется линейными или линеаризованными моделями в пространстве состояний, используется положительно-определенная функция Ляпунова квадратичной формы.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу синтеза регулятора дискретной системы управления ЭМО с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ) управляющего сигнала с учетом параметров источника энергии (энергетические возможности источника питания соизмеримы с мощностью, потребляемой объектом).

Используя в качестве управляющего воздействия электромеханическим объектом относительную длительность $\gamma(u(jT))$ выходного напряжения силового импульсного преобразователя, модель объекта в пространстве состояний на интервалах дискретности ШИМ можно записать следующими уравнениями [2]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t)&=\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}_1U(\mathbf{x},t)+\mathbf{m}_{H1} \quad \text{при } t\in(t_0+jT, t_0+jT+\gamma(u(jT))),\\ \dot{\mathbf{x}}(t)&=\mathbf{A}_2\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}_2U(\mathbf{x},t)+\mathbf{m}_{H2} \quad \text{при } t\in(t_0+jT+\gamma(u(jT), t_0+(j+1)T),\end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ – вектор состояния непрерывной части ЭМО; $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ – матрицы параметров силового преобразователя, исполнительного электродвигателя и механической системы; $U(\mathbf{x},t)$ – импульсное напряжение с выхода силового преобразователя; $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{m}_{H1}$, $\mathbf{m}_{H2}$ – n-мерные векторы (компоненты векторов $\mathbf{m}_{H1}$, $\mathbf{m}_{H2}$ включают аддитивные внешние возмущения); $u(jT)$ – входной сигнал широтно-импульсного модулятора в момент времени $t=jT$; $j=0,1,2,.....$; t_0 – время начального состояния; T – период дискретности ШИМ. В общем случае уравнения широтно-импульсного модулятора при фиксированном значении периода T дискретности можно записать в следующем виде (далее для сокращения записи уравнений аргумент $u(jT)$ при символе γ не указывается):

$$\gamma=\begin{cases}\left|k(t)u(jT)\right| & \text{при } \left|u(jT)\right|\le\dfrac{T}{k(t)},\\ T & \text{при } \left|u(jT)\right|>\dfrac{T}{k(t)};\end{cases} \tag{2}$$

$$U(\mathbf{x},t)=\begin{cases}U_1(t)\operatorname{sign}(u(jT)) & \text{при} \quad t\in(t_0+jT,t_0+jT+\gamma(u(jT)),\\ U_2(t) & \text{при} \quad t\in(t_0+jT+\gamma(u(jT)),t_0+(j+1)T),\end{cases} \qquad (3)$$

где $k(t)$ – коэффициент передачи ШИМ, функциональная зависимость которого от времени может варьироваться от постоянного значения до, например, синусоидальной формы; $U_1(t)$, $U_2(t)$ – выходные напряжения силового преобразователя в соответствующие моменты времени, изменяющиеся по законам модуляции преобразователя. Таким образом, $k(t)$ определяет закон изменения среднего значения напряжения исполнительного двигателя на интервале γ, а функции $U_1(t)$ и $U_2(t)$ – мгновенные значения выходного напряжения силового преобразователя, соответственно на интервалах γ и $(T-\gamma)$. Для распространенного случая, при котором $U_1(t)=U_0$, $U_2(t)=0$, $\mathbf{b}_1=\mathbf{b}_2=\mathbf{b}$, $\mathbf{m}_{H1}=\mathbf{m}_{H2}=\mathbf{m}_H$, фиксированном значении γ и постоянных значениях компонент вектора $\mathbf{m}_H$ в течение периода T дискретизации, билинейная модель электромеханического объекта на интервале $(t_0+jT,t_0+jT+\gamma)$ записывается в виде

$$\mathbf{x}_{t+1}=\mathbf{F}\,\mathbf{x}_t+\left(\mathbf{\Gamma}\,\mathbf{x}_t+\mathbf{G}_1^*\right)U_t+\mathbf{G}_2^*, \qquad (4)$$

где $\mathbf{F}=\exp(\mathbf{A}_2T)$; $\mathbf{\Gamma}=\exp(\mathbf{A}_2T)[\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2]$; $\mathbf{G}_1^*=\exp(\mathbf{A}_2T)\mathbf{b}_UU_{0t}+\mathbf{A}_2T(\mathbf{b}_0U_0+\mathbf{m}_H)$; $\mathbf{G}_2^*=T(\mathbf{b}_0U_0+\mathbf{m}_H)$; U_{0t} – управляющее воздействие, поступающее непосредственно на исполнительный электродвигатель (при использовании фильтра источника питания на входе ШИМ напряжение U_{0t} равно напряжению U_{Ct} на конденсаторе фильтра); $\mathbf{b}_U$, $\mathbf{b}_0$ – векторы соответствующей размерности, являющиеся компонентами вектора $\mathbf{b}$.

Синтез нелинейного регулятора

Для синтеза нелинейного регулятора, обеспечивающего нелинейную обратную связь по состоянию, выберем функцию Ляпунова квадратичной формы следующего вида:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}_t)=\mathbf{x}_t^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{x}_t, \qquad (5)$$

где $\mathbf{P}$ – положительно-определенная n-мерная матрица; $(*)^T$ – символ транспонирования.

Управление U_t электромеханическим объектом будем находить из условия минимума первой разности функции $\mathrm{V}(\mathbf{x}_t)$:

$$\Delta\mathbf{V}(\mathbf{x}_t)=\mathrm{V}(\mathbf{x}_{t+1})-\mathrm{V}(\mathbf{x}_t), \qquad (6)$$

вычисленной на решении системы (4), которую для сокращения дальнейших выкладок представим в виде

$$\mathbf{x}_{t+1}=\mathbf{F}_t+\mathbf{\Gamma}_tU_t, \qquad (7)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_t&=\mathbf{F}\,\mathbf{x}_t+\mathbf{G}_2^*,\\ \mathbf{\Gamma}_t&=\mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_t+\mathbf{G}_1^*.\end{aligned} \qquad (8)$$

Согласно (6) запишем

$$\Delta\mathbf{V}(\mathbf{x}_t)=U_t^2\mathbf{\Gamma}_t^T\,\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}_t+U_t\mathbf{\Gamma}_t^T\,\mathbf{P}\mathbf{F}_t+U_t\mathbf{F}^T\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}_t+\mathbf{F}_t^T\mathbf{P}\mathbf{F}_t-\mathbf{x}_t^T\mathbf{P}\mathbf{x}_t. \qquad (9)$$

Минимизируя выражение (9) по управляющему U_t воздействию, получим

$$U_t=-\mathbf{\Gamma}_t^T\,\mathbf{P}\mathbf{F}_t\left(\mathbf{\Gamma}_t^T\,\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}_t\right)^{-1}. \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (9), запишем

$$\Delta\mathrm{V}(\mathbf{x}_t)=\left[\left\{\left(\mathbf{\Gamma}_t^T\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}_t\right)\left(\mathbf{F}_t^T\mathbf{P}\mathbf{F}_t\right)-\left(\mathbf{\Gamma}_t^T\,\mathbf{P}\mathbf{F}_t\right)^2\right\}\left(\mathbf{\Gamma}_t^T\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}_t\right)^{-1}\right]-\mathbf{x}_t^T\mathbf{P}\mathbf{x}_t. \qquad (11)$$

Таким образом, управление U_t (10) с учетом (8) определяется следующим выражением:

$$U_t=-\left\{\left(\mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_t+\mathbf{G}_1^*\right)^T\left[\left(\mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_t+\mathbf{G}_1^*\right)^T\mathbf{P}\left(\mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_t+\mathbf{G}_1^*\right)\right]^{-1}\right\}\mathbf{P}\mathbf{F}\,\mathbf{x}_t-\left\{\left(\mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_t+\mathbf{G}_1^*\right)^T\left[\left(\mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_{\mathrm{t}}+\mathbf{G}^*{}_1\right)^T\mathbf{P}\left(\mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_t+\mathbf{G}_1^*\right)\right]^{-1}\right\}\mathbf{G}_2^*. \qquad (12)$$

Обозначая

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_t) = -\left\{ \left(\mathbf{\Gamma x}_t + \mathbf{G}_1^* \right)^T \left[\left(\mathbf{\Gamma x}_t + \mathbf{G}_1^* \right)^T \mathbf{P} \left(\mathbf{\Gamma x}_t + \mathbf{G}_1^* \right) \right]^{-1} \right\} \mathbf{PF}, \tag{13}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{x}_t) = -\left\{ \left(\mathbf{\Gamma x}_t + \mathbf{G}_1^* \right)^T \left[\left(\mathbf{\Gamma x}_t + \mathbf{G}_1^* \right)^T \mathbf{P} \left(\mathbf{\Gamma x}_t + \mathbf{G}_1^* \right) \right]^{-1} \right\} \mathbf{G}_2^*, \tag{14}$$

выражение (12) запишем в виде

$$U_t = -\left(\mathbf{K}(\mathbf{x}_t)\mathbf{x}_t + \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{x}_t) \right). \tag{15}$$

Анализируя выражения (13) и (14), заключаем, что для реализации управления (15) величина $\left(\mathbf{\Gamma x}_t + \mathbf{G}_1^* \right)^T \mathbf{P} \left(\mathbf{\Gamma x}_t + \mathbf{G}_1^* \right)$ должна быть положительно определена во всем пространстве состояния ЭМО.

По условию (5) $\det \mathbf{P} \neq 0$, тогда $\left(\mathbf{\Gamma x}_t + \mathbf{G}_1^* \right)$ будет положительно определена в любой точке пространства $\mathbf{x}_t$ за исключением гиперплоскости, определенной уравнением

$$\left(\mathbf{\Gamma x}_t + \mathbf{G}_1^* \right) = 0 . \tag{16}$$

Построенный закон управления обеспечивает наиболее быстрое убывание функции Ляпунова (5), определенной на решениях билинейной модели (4) электромеханического объекта.

Из множества законов управления (15), обеспечивающих отрицательность значений $\Delta\mathbf{V}(\mathbf{x}_t)$ функции Ляпунова, выделим закон управления, оптимальный по принуждению. То есть такой закон, который обеспечивает выполнение условия $\Delta\mathbf{V}(\mathbf{x}_t) < 0$ с наименьшим значением U_t^2 в каждый дискретный момент времени. Для определения такого закона запишем функцию Лагранжа

$$\Xi(U, \lambda) = U_t^2 + \lambda\left[-\Delta\mathbf{V}(\mathbf{x}_t) + \prod(\mathbf{x}_t, t) \right], \tag{17}$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа; $\prod(\mathbf{x}_t, t)$ – правая часть уравнения (9). Необходимое условие оптимальности выражения (17)

$$\frac{\partial \Xi(U, \lambda)}{\partial U_t} = 0 \tag{18}$$

позволяет получить уравнение

$$U_t + \lambda\left(\mathbf{\Gamma}_t^T \mathbf{P\Gamma}_t U_t + \mathbf{\Gamma}_t^T \mathbf{PF}_t \right) = 0 . \tag{19}$$

После преобразования уравнения (19) запишем управление U_t;

$$U_t = -\lambda\left(1 + \lambda \mathbf{\Gamma}_t^T \mathbf{P\Gamma}_t \right)^{-1} \mathbf{\Gamma}_t^T \mathbf{PF}_t . \tag{20}$$

Неопределенный множитель Лагранжа λ должен быть выбран из условия обеспечения отрицательной определенности $\Delta\mathbf{V}(\mathbf{x}_t)$. Подставляя полученное уравнение (20) в выражение (11), получим

$$\Delta \mathrm{V}(\mathbf{x}_t) = \left\{ \left(\mathbf{\Gamma}_t^T \mathbf{PF}_t \right)^2 \left(1 + \lambda \mathbf{\Gamma}_t^T \mathbf{P\Gamma}_t \right)^{-2} \right\} \lambda\left(-\lambda \mathbf{\Gamma}_t^T \mathbf{P\Gamma}_t - 2 \right) + \mathbf{F}_t^T \mathbf{PF}_t - \mathbf{x}_t^T \mathbf{Px}_t . \tag{21}$$

Из последнего уравнения следует, что $\Delta\mathbf{V}(\mathbf{x}_t)$ знакоопределена при любых значениях $\lambda > 0$. Поэтому выражение (21), определяющее закон управления по принуждению, можно преобразовать, если приращение $\Delta \mathrm{V}(\mathbf{x}_t)$ функции Ляпунова принять равным

$$\Delta \mathrm{V}(\mathbf{x}_t) = U_t^2 \mathbf{\Gamma}_t^T \mathbf{PF}_t + 2U_t \mathbf{\Gamma}_t^T \mathbf{PF}_t + \mathbf{F}_t^T \mathbf{PF}_t - \mathbf{x}_t^T \mathbf{Px}_t + \frac{U_t^2}{\lambda}. \tag{22}$$

Таким образом, смысл множителя λ – это величина, обратная штрафному коэффициенту, учитывающему «вклад» управляющего сигнала в приращение функции Ляпунова. При значениях $\lambda \to \infty$ получаем управление, оптимальное по отношению к функции Ляпунова.

Для определения компонент матрицы $\mathbf{P}$ в уравнениях (12) и (20) можно использовать матричные уравнения Ляпунова или систему алгебраических уравнений [1]:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{PF} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} , \tag{23}$$

где $\mathbf{Q}$ – диагональная матрица соответствующей размерности, элементы которой выбираются на этапе формирования критерия качества регулирования.

Критерий качества

Для решения задачи конструирования параметров регуляторов в пространстве состояний требования к качественным показателям часто формулируются в виде функционала от переменных состояния, управляющего воздействия и времени. Распространенной формой записи такого функционала является квадратичная форма, представленная для дискретных систем с одномерным управлением различными объектами в виде

$$I(\mathbf{x}_t, U_t) = \sum_{t=0}^{N} (\mathbf{x}_t^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_t + U_t^2 R), \tag{24}$$

где значения компонент матрицы $\mathbf{Q}$ и скалярной величины R характеризуют вклад соответствующих переменных $\mathbf{x}_t$ состояния и управления U_t. Оптимизация данного функционала качества, с учетом $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ и $R > 0$, позволяет построить стабилизирующее управление в замкнутой системе регулирования на рассматриваемом интервале N времени.

Иллюстративный пример

Исследование регуляторов с управлением вида (15) и (20) осуществлялось на примере такого распространенного электромеханического объекта, как электропривод постоянного тока, модель которого имеет следующий вид [2]:

– на интервале времени $t \in (t_0 + jT, t_0 + jT + \gamma(u(jT))$:

$$\begin{gathered} L_ф \dot{i}_1(t) = U_0 R_ф i_1(t) - U_c(t), \\ L_д \dot{i}(t) = U_c(t) - R_д i(t) - C_д \omega(t), \\ C_ф \dot{U}_с(t) = i_1(t) - i(t), \qquad L_д\, \dot{i}(t) = U_c(t) - R_д i(t) - C_д(i)\,\omega(t), \end{gathered} \tag{25}$$

– на интервале времени $t \in (t_0 + jT + \gamma(u(jT), t_0 + (j+1)T)$:

$$\begin{gathered} L_ô\, \dot{i}_1(t) = U_0 - R_ô\, i_1(t) - U_c(t), \\ C_ф \dot{U}_c(t) = i_1(t), \\ L_д\, \dot{i}(t) = -R_д i(t) - C_д(i)\omega(t), \end{gathered} \tag{26}$$

где $U_0, U_c(t)$ – соответственно напряжение источника питания и конденсатора Г-образного фильтра силового преобразователя; $L_ф, R_ф, C_ф$ – индуктивность, сопротивление и емкость конденсатора Г-образного фильтра силового преобразователя; $L_д(i), R_д$, $C_д(i)$ – индуктивность, сопротивление цепи и конструктивная постоянная исполнительного двигателя; $i_1(t)$ – входной ток Г-образного фильтра силового преобразователя; $i(t)$, $\omega(t)$ – ток и скорость вращения исполнительного двигателя.

Рассматривая, например, управление U_t вида (20) в функции двух переменных i_t и ω_t, для номинальных значений параметров исполнительного двигателя и Г-образного фильтра силового преобразователя можно записать:

$$U_t = -\frac{\lambda\left(138 i_t - 0{,}775\omega_t\right)}{1 + \dfrac{\lambda}{K_п}}, \tag{27}$$

где $K_п$ – коэффициент пропорциональности, значение которого определяется компонентами матрицы $\mathbf{P}$, параметрами исполнительного двигателя и Г-образного фильтра силового преобразователя.

Варьируя значение множителя λ, можно компенсировать влияние таких возмущений, как изменение момента инерции механической нагрузки исполнительного двигателя на качественные показатели электропривода с соблюдением условий устойчивости.

Результаты моделирования (рис. 1) электропривода постоянного тока с широтно-импульсным преобразователем и Г-образным силовым фильтром питающего напряжения при организации управления U_t вида (20) отражают асимптотический характер динамических процессов переменных состояния.

Как показали исследования, синтезированное управление вида (14) и (20) позволяет обеспечить асимптотическую устойчивость при стабилизации с заданной точностью выходных переменных тока i_t и скорости ω_t исполнительного двигателя при значительном изменении параметров механической нагрузки исполнительного двигателя.

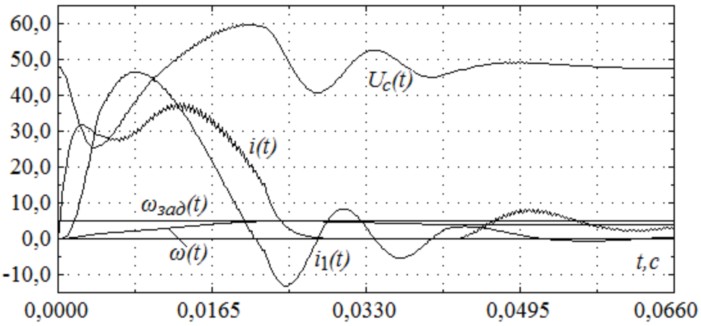

Рис. 1. Переходные процессы в электроприводе постоянного тока с регулятором вида (20) для минимального значения динамического момента инерции механической нагрузки

Заключение. На основе проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Нелинейность законов регулирования в системах управления электромеханическими объектами с источниками энергии ограниченной мощности определяется билинейной моделью ЭМО, которая учитывает параметры силового фильтра источника питания.

2. Использование функций Ляпунова для синтеза регуляторов позволяет получить в аналитическом виде законы нелинейного управления для систем с отрицательной обратной связью по состоянию и дальнейшее улучшение качественных характеристик процессов регулирования возможно на основе наблюдателей неизмеряемых переменных состояния ЭМО.

3. Результаты имитационного моделирования показали высокую эффективность предложенных нелинейных законов управления при изменениях в определенных пределах параметрических возмущений в электромеханическом объекте.

Литература

1. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.

2. Букреев В.Г. Адаптивные регуляторы в дискретных системах управления сложными электромеханическими объектами / В.Г. Букреев, Ю.И. Параев. – Томск: Изд-во. Том. гос. ун-та, 2000. – 278 с.

Букреев Виктор Григорьевич
Д-р техн. наук, профессор каф. электропривода и электрооборудования ТПУ
Тел.: 8 (382-2) 56-40-45
Эл. почта: bukreev@tpu.ru

Bukreev V.G.

Nonlinear controller synthesis of discrete control systems by electromechanical objects

In the article we offer a synthesis algorithm for nonlinear controller of discrete electromechanical system with pulse-width modulation of control signal based on Lyapunov's second method. There are determined nonlinear control laws which ensure the asymptotic stability of controlled processes in an electromechanical object with a limited power energy source. The efficiency of a nonlinear controller is shown so it minimizes power consumption in digital control system of an electromechanical object with parametric perturbations.

Keywords: nonlinear controller, electromechanical object, pulse-width modulator.