

УДК 621.391.823

Д.В. Дятлов, А.А. Светлаков

## Численное моделирование и сравнение двух цифровых фильтров нестационарных параметров управляемых процессов

Приводится сравнение двух цифровых алгоритмов фильтрации сигналов: фильтра, основанного на скользящем среднем арифметическом, и медианного фильтра. Рассматриваются процесс фильтрации сигнала под воздействием шума и влияние на точность получаемого результата глубины выборки, типа алгоритма и вида шумов, а также выбор оптимального типа алгоритма и ширины окна-выборки.

**Ключевые слова:** цифровая фильтрация, медианный фильтр, аддитивный шум.

Как известно, одним из необходимых условий, обеспечивающих безаварийное и эффективное управление любым технологическим процессом, является достаточно высокая достоверность информации о состоянии и параметрах оборудования, с использованием которого реализуется управляемый ТП, а также о режимах реализации данного процесса и их отклонениях от заданных (номинальных) режимов, предписываемых технологической документацией, в соответствии с которой они должны реализовываться. Не менее хорошо известно также, что обеспечение должной достоверности информации является межотраслевой и многоплановой проблемой и её решению посвящено огромное множество теоретических и прикладных исследований [1–3]. Однако, несмотря на отмеченное выше множество и многообразие результатов, проблема обеспечения достоверности информации, используемой при управлении ТП, остается актуальной и в настоящее время. Особенно актуальной она оказывается в условиях автоматического или автоматизированного управления ТП. Последнее обуславливается тем, что получение информации о состоянии оборудования ТП и режимах его реализации в рамках АСУ ТП осуществляется, как правило, с помощью разнесенной (распределенной в пространстве) аппаратуры, в функционировании которой часто имеют место искажения из-за сбоев аппаратуры, проникновения в каналы связи различного рода помех и т.д. Как показывает практика эксплуатации различных АСУ ТП в химической, нефтехимической промышленности, трубопроводном транспорте нефти и газа, энергетике и др., несмотря на реализацию целого ряда технических решений, таких как использование помехозащитного кодирования, обратной связи между передающими и приемными устройствами каналов связи между управляемым ТП и управляющей системой, синхронизацией их функционирования и т.п., частота возникновения подобных случаев является неприемлемо высокой.

В отмеченных выше условиях является совершенно необходимым применение в АСУ ТП перечисленных выше и других реальных производств различных цифровых фильтров, позволяющих повысить достоверность информации о состоянии ТП и обеспечить ее достаточно высокий уровень. При этом оказывается необходимым использование не только классических цифровых фильтров, позволяющих уменьшить уровень стационарных случайных шумов (ошибок), содержащихся в фильтруемых сообщениях, но и так называемых робастных цифровых фильтров, позволяющих избавиться от аномальных значений (выбросов), встречающихся в данных сообщениях. В последующих разделах данной работы обсуждаются некоторые результаты численного моделирования классического и робастного цифровых фильтров, наиболее часто используемых при создании АСУ ТП различных производств.

### Анализ особенностей исследуемых цифровых фильтров

Предметом наших исследований, выполненных численным моделированием с помощью персонального компьютера, являются два цифровых фильтра, представленных соотношениями:

$$\text{а) } \hat{v}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{v}_{t-i} \quad \text{и} \quad \text{б) } \hat{v}_t = m_t. \quad (1)$$

В данных соотношениях приняты следующие условные обозначения:  $t$  – дискретные равноотстоящие моменты времени, расстояние  $\Delta t$  между которыми в каждом конкретном случае определяется особенностями управляемого ТП и прежде всего скоростью его протекания, а также эксплуатационно-техническими характеристиками контрольно-измерительной аппаратуры (датчиков величин, измерительных устройств, приборов и т.п.) и каналов связи между управляемым ТП и управляющей системой;  $\tilde{v}_{t-i}$  – поступившее в момент времени  $t-i$ ,  $i=\overline{0, n-1}$ , измеренное значение некоторой контролируемой (измеряемой) величины  $V$ , характеризующей состояние управляемого ТП;  $\hat{v}_t$  – отфильтрованное (сглаженное) значение величины  $V$  в момент времени  $t$ ;  $n$  – некоторое ограниченное натуральное число (глубина памяти фильтра), удовлетворяющее неравенствам  $1 < n < \infty$ ;  $m_t$  – значение выборочной медианы  $\text{Me}\{V_t\}$ , вычисленное по имеющейся в момент времени  $t$  совокупности (выборке)  $V_t$ , удовлетворяющей равенству

$$V_t = \{\tilde{v}_{t-n+1}, \tilde{v}_{t-n+1}, \tilde{v}_{t-1}, \tilde{v}_t\}. \quad (2)$$

Напомним, что в соответствии с определением выборочной медианы  $\text{Me}\{V_t\}$  для вычисления ее значения  $m_t$  необходимо и достаточно выполнить следующие две вычислительные операции:

1) Упорядочить по возрастанию числовых значений элементы выборки  $V_t$  и, соответственно, получить цепочку неравенств, удовлетворяющую соотношению вида

$$W_t = \{\tilde{v}^{(1)} \leq \tilde{v}^{(2)} \dots \leq \tilde{v}^{(n-1)} \leq \tilde{v}^{(n)}\} \quad (3)$$

и называемую в математической статистике вариационным рядом, а индексы ее элементов, указывающие их местоположение в цепочке, – рангами элементов.

2) Вычислить значение  $m_t$  в соответствии с равенствами

$$m_t = \begin{cases} \tilde{v}^{(k+1)}, & \text{если } n=2k+1, \text{ является нечетным числом;} \\ (\tilde{v}^{(k)} + \tilde{v}^{(k+1)})/2, & \text{если } n=2k, \text{ т.е. является четным числом,} \end{cases}$$

где  $k$  – натуральное число, используемое для различия четных и нечетных значений глубины памяти фильтров  $n$ . Учитывая, что при любом  $k$  число  $2k+1$  является нечетным, а  $2k$  – четным, можно видеть, что первое из заданных равенств используется в случае, когда глубина памяти фильтра является нечетным, а второе – наоборот, четным числом.

Сказанным выше описана общая (укрупненная) схема вычисления выборочной медианы  $\text{Me}\{V_t\}$  и сделано это с точностью до последовательности операций, которые необходимо выполнить для построения вариационного ряда  $W_t$ . Как известно, построение данного ряда можно реализовать с помощью многих широко известных алгоритмов, и выбор того или иного из них в каждом конкретном случае определяется дополнительными требованиями и, прежде всего, такими, как быстроедействие, экономичность, простота программной и аппаратной реализаций и т.п. Вполне очевидно, что все эти требования касаются прежде всего практической реализации фильтра и никак не влияют на «качество» фильтрации вычисленного значения  $m_t$ , как числовой характеристики выборки  $V_t$ . Поэтому для анализа и изучения свойств  $m_t$ , являющихся первоочередной целью наших дальнейших исследований, данные алгоритмы не представляют какого-либо интереса, и в их детальном обсуждении нет какой-либо необходимости.

Отметим шесть наиболее существенных особенностей цифровых фильтров (1), определяющих предпочтительность их использования при создании АСУ ТП различных производств и ограничивающих возможности их применения в подобных ситуациях.

1) Как непосредственно видно из соотношений (2)–(3), определяющих выборку  $V_t$  и вариационный ряд  $W_t$ , при вычислении значений  $\hat{v}_t$  в любой момент времени  $t$  и предшествующие ему  $n-1$  моменты времени  $t-i$ ,  $i=\overline{1, n-1}$  используются значения величины  $V$ , которые она имела в данный момент времени  $t$ , и, таким образом, по мере увеличения  $t$  элементы выборки  $V_t$  и вариационного ряда  $W_t$  регулярно обновляются. При этом самое «старое» значение  $\tilde{v}_{t-n+1}$  из них изымается, а самое «новое» значение  $\tilde{v}_t$  включается в них. Если для наглядности взглянуть на  $V_t$  и  $W_t$  и процесс их обновления с геометрической точки зрения, то их можно рассматривать как «окна», со-

держащие по  $n$  значений величины  $V$  (шириной  $n$ ), а процесс их обновления – как скольжение окон по оси времени  $t$ . При этом фильтры (1а) и (1б) оказываются не чем иным, как арифметическим и медианным усреднениями элементов выборки  $V_t$  и вариационного ряда  $W_t$ , результатом применения которых являются значения  $\hat{x}_t$  и  $m_t$ . Для упрощения и сокращения терминологии всюду далее будем называть фильтр (1а) скользящим арифметическим фильтром, а фильтр (1б) – скользящим медианным фильтром.

2) Как показывает практика, применение фильтров (1а) в рамках различных АСУ ТП в ряде случаев оказывается недостаточно эффективным. Это объясняется прежде всего тем, что они являются неустойчивыми к резко выделяющимся значениям (выбросам, аномальным значениям и т.д.), содержащимся в выборке  $V_t$ . Вместе с тем, как уже отмечено выше, в условиях значительной пространственной распределенности ТП и их удаленности от центров управления и вследствие этого высокой частоты проникновения в каналы связи различного рода промышленных и других помех, а также недостаточно высокой надежности аппаратуры связи устойчивость цифрового фильтра к выбросам является его важнейшей характеристикой.

3) Анализируя (1а), можно непосредственно видеть, что с увеличением глубины памяти  $n$  коэффициенты  $1/n$ , с которыми значения  $\tilde{v}_{t-i}$  входят в данное равенство, монотонно уменьшаются и стремятся к нулю. Отсюда вытекает, что с увеличением  $n$  устойчивость фильтра к выбросам монотонно увеличивается и, таким образом, для обеспечения ее желаемого уровня число  $n$  необходимо выбирать как можно больше. Однако возможности увеличения данного числа в реальных условиях ограничиваются следующими тремя причинами. Во-первых, для описания состояния и режима реализации ТП многих реальных производств необходимо использовать тысячи и десятки тысяч физических величин и, соответственно, хранение необходимого для обеспечения устойчивости фильтров количества их измеренных значений требует если не астрономических, то весьма значительных объемов памяти используемых в системе управления вычислительных устройств. Во-вторых, с увеличением массивов сохраняемых значений каждой из величин, характеризующих управляемый ТП, существенно снижается быстродействие АСУ ТП и, соответственно, при больших значениях  $n$  может оказаться недопустимо низким. И, наконец, в-третьих, многие из этих переменных являются существенно нестационарными и быстроизменяющимися во времени и, таким образом, использование большой глубины памяти  $n$  в фильтрах (1) приведет к тому, что значения  $\hat{v}_t$  будут весьма далеки от истинных значений  $v_t$  величины  $V$  и окажутся тем дальше, чем больше  $n$ .

4) Как видно из (3)–(4), в качестве отфильтрованного значения  $\hat{v}_t$  при использовании медианного фильтра принимается либо значение величины  $V$ , занимающее центральное место в вариационном ряду  $W_t$ , либо среднее арифметическое двух ее значений, наиболее близко расположенных к его центру. Вполне очевидно, что в любом из этих случаев значение  $\hat{v}_t$  оказывается наиболее удаленным от крайних значений ряда  $W_t$ , т.е. от его левого и правого концов. С другой стороны, как вытекает из определения выбросов, всякое аномальное значение величины  $V$  при построении вариационного ряда  $W_t$  оказывается либо крайним, либо одним из крайних его значений. При этом в зависимости от соотношений с другими элементами ряда  $W_t$  оно оказывается либо начальным, либо его конечным элементом и, таким образом, в любом из этих случаев не оказывает никакого влияния на численное значение  $m_t$ .

5) Очевидным недостатком медианного фильтра является то, что при нечетном  $n$  никакого усреднения, а соответственно и уменьшения случайной ошибки, содержащейся в измеренном значении  $\tilde{v}^{(k+1)}$ , не производится. При четном  $n$  уменьшение данной ошибки осуществляется в минимально возможной мере.

6) Рассматривая фильтры (1)–(4) с точки зрения аппаратной и программной реализации, трудно обнаружить, что оба они являются частными случаями скользящего цифрового фильтра, представленного соотношением вида

$$\hat{v}_t = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \tilde{v}_{t-i} . \quad (5)$$

Здесь  $\alpha_i$  – постоянные коэффициенты, удовлетворяющие следующим двум условиям:

$$\text{а) } \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{0, n-1} \quad \text{и} \quad \text{б) } \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = 1. \quad (6)$$

В самом деле, полагая в (6) коэффициенты

$$\alpha_i = 1/n, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (7)$$

можно непосредственно видеть, что фильтр (5) оказывается не чем иным, как скользящим арифметическим фильтром. Если же коэффициенты  $\alpha_i$  в (5) задать в соответствии с соотношениями

$$\text{а) } \alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k+1, \\ 0, & \text{если } i \neq k+1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{б) } \alpha_i = \begin{cases} 0,5, & \text{если } i = k \quad \text{и} \quad i = k+1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то фильтр (5) оказывается скользящим медианным фильтром.

Как известно, коэффициенты  $\alpha_i$ , удовлетворяющие данным условиям, принято называть весами измеренных значений  $\tilde{v}_{t-i}$ , а значение  $\hat{v}_t$ , вычисляемое с их применением [в соответствии с равенством (6)], – взвешенным средним данных значений.

#### Условия и «технология» численного моделирования цифровых фильтров (1)–(4)

Ниже приведены результаты экспериментальных исследований и сравнения цифровых фильтров – медианного и скользящего среднего в условиях, когда истинное значение переменной величины  $V$  является нестационарным, т.е. изменяющимся с течением времени. При этом предполагается, что изменение значений данной переменной подчиняется линейному закону

$$v_t = c_0 + c_1 t, \quad (8)$$

где  $c_0$  и  $c_1$  – некоторые заданные постоянные коэффициенты.

Выбор указанного закона изменения значений фильтруемой переменной, безусловно, нуждается в обосновании. В качестве последнего можно отметить, что длительность одного цикла управления, включающего в себя опрос датчиков, логическую проверку достоверности и фильтрацию поступающих с них значений переменных, а также вычисление управляющих воздействия и их подачу на исполнительные органы системы управления, должна быть существенно меньше длительности переходных процессов, возникающих при реализации технологического процесса. Действительно, только при выполнении данного условия можно говорить об эффективности управления переходным процессом. Поэтому представляется оправданным считать, что в течение времени  $T = \tau \cdot n$ , где  $\tau$  – длительность одного цикла управления, изменение переменной  $v$  достаточно точно описывается соотношением (8).

В качестве основного метода исследования фильтров использовалось численное моделирование. При этом значение коэффициента  $c_0$  во всех экспериментах полагалось равным 10, а значение коэффициента  $c_1$  варьировалось в интервале  $[0, 1; 2]$ . Значения аддитивных ошибок измерения переменной генерировались в соответствии с известным из литературы алгоритмом [3] и при тех же самых значениях всех параметров, входящих в данный алгоритм. Параметры  $\alpha_i$ ;  $i = \overline{1, n}$  в фильтре (1а) во всех экспериментах задавались равенствами  $\alpha_i = 1/n$ .

#### Анализ и сравнение результатов численного моделирования

В таблице приведены результаты численного моделирования, выполненного в условиях, когда аддитивная ошибка измерения переменной  $V$  является смесью двух случайных величин (ординарных ошибок измерения и резких выбросов), подчиняющихся нормальным законам распределения с нулевыми математическими ожиданиями и среднеквадратическими отклонениями, равными соответственно 1,0 и 10,0. Символами  $P$ ,  $\sigma_c$  и  $\sigma_m$  здесь обозначены соответственно частота резких выбросов и среднеквадратические погрешности оценивания истинного значения  $v_t$  переменной  $V$  значениями  $\hat{v}_t$ , вычисляемыми с помощью фильтров, имеющих вид (1а) и (1б). При каждом наборе значений  $P$ ,  $c_1$  и  $n$  значения  $\sigma_c$  и  $\sigma_m$  вычислены по 20 реализациям измерений.

Анализ таблицы показывает следующее:

1) при каждом фиксированном значении  $c_1$  погрешности  $\sigma_c$  и  $\sigma_m$  являются унимодальными, выпуклыми вниз функциями глубины памяти  $n$ ;

2) минимум функции  $\sigma_M(n)$  при всех значениях  $c_1$  расположен левее минимума функции  $\sigma_C(n)$ ;

3) минимальные значения функции  $\sigma_M(n)$  во всех случаях меньше аналогичных значений функции  $\sigma_C(n)$ ;

4) с увеличением значений  $c_1$  точки минимума как  $\sigma_M(n)$ , так  $\sigma_C(n)$  смещаются влево.

#### Результаты численного моделирования

$P$	$c_1$	$n$							
		3	5	8	11	14	17	20	
0,1	0,1	3,86	2,58	1,81	1,44	1,20	1,04	0,92	$\sigma_C$
		1,14	1,29	1,55	1,81	2,01	2,21	2,39	$\sigma_M$
	0,5	3,85	2,57	1,79	1,41	1,17	1,01	0,89	$\sigma_C$
		1,15	1,30	1,57	1,83	2,05	2,25	2,44	$\sigma_M$
	1	3,80	2,47	1,65	1,24	0,99	0,86	0,80	$\sigma_C$
		1,20	1,41	1,76	2,11	2,39	2,67	2,94	$\sigma_M$
2	3,82	2,22	1,21	0,70	0,53	0,65	0,90	$\sigma_C$	
	1,21	1,49	1,95	2,43	2,81	3,24	3,64	$\sigma_M$	
0,2	0,1	4,20	2,87	2,07	1,72	1,49	1,33	1,21	$\sigma_C$
		1,95	1,50	1,61	1,84	2,06	2,24	2,41	$\sigma_M$
	0,5	4,18	2,83	2,02	1,66	1,43	1,28	1,18	$\sigma_C$
		1,96	1,55	1,70	1,98	2,22	2,45	2,66	$\sigma_M$
	1	4,15	2,78	1,96	1,60	1,39	1,28	1,24	$\sigma_C$
		1,99	1,62	1,83	2,17	2,47	2,77	3,04	$\sigma_M$
2	4,09	2,69	1,86	1,56	1,47	1,51	1,63	$\sigma_C$	
	2,04	1,78	2,13	2,63	3,06	3,55	3,96	$\sigma_M$	
0,3	0,1	4,20	2,87	2,07	1,72	1,49	1,33	1,21	$\sigma_C$
		1,95	1,50	1,61	1,84	2,06	2,24	2,41	$\sigma_M$
	0,5	4,18	2,83	2,02	1,66	1,43	1,28	1,18	$\sigma_C$
		1,96	1,55	1,70	1,98	2,22	2,45	2,66	$\sigma_M$
	1	4,15	2,78	1,96	1,60	1,39	1,28	1,24	$\sigma_C$
		1,99	1,62	1,83	2,17	2,47	2,77	3,04	$\sigma_M$
2	4,09	2,69	1,86	1,56	1,47	1,51	1,63	$\sigma_C$	
	2,04	1,78	2,13	2,63	3,06	3,55	3,96	$\sigma_M$	

Отметим, что эти закономерности имеют место и при других законах распределения ошибок измерения переменной. В частности, как показывают результаты описываемых исследований, они в полной мере сохраняются и при равномерно распределенных ошибках измерения данной переменной.

Причину, обуславливающую отмеченные закономерности поведения  $\sigma_C(n)$  и  $\sigma_M(n)$ , нетрудно обнаружить, если наряду с таблицей, проанализировать графики, представленные на рис. 1, а–в.

Анализ показывает, что при любом фиксированном значении  $c_1$  увеличение  $n$  влияет на величину погрешности оценок значений величины двояким образом. С одной стороны, с увеличением  $n$  усиливаются сглаживающие свойства фильтров и за счет этого уменьшается составляющая погрешности, обуславливаемая наличием случайных ошибок измерения переменной  $V$ . С другой стороны, с увеличением  $n$  увеличивается смещенность оценок  $\hat{v}_C$ ,  $\hat{v}_M$ , вносимая нестационарностью истинных значений данной переменной. При этом на начальном этапе увеличения  $n$  резко уменьшается первая составляющая погрешности, а ее вторая составляющая имеет еще малые значения. При дальнейшем увеличении  $n$  уменьшение первой составляющей погрешности замедляется, а ее вторая составляющая все более увеличивается, что и влечёт за собой увеличение погрешности оценок в целом. На рис. 2 приведен вид зависимости среднеквадратического отклонения значений, получаемых при фильтрации, от истинных значений для фильтра на основе скользящего среднего арифметического ( $\sigma_C(n)$ ) и медианного фильтра ( $\sigma_M(n)$ ).

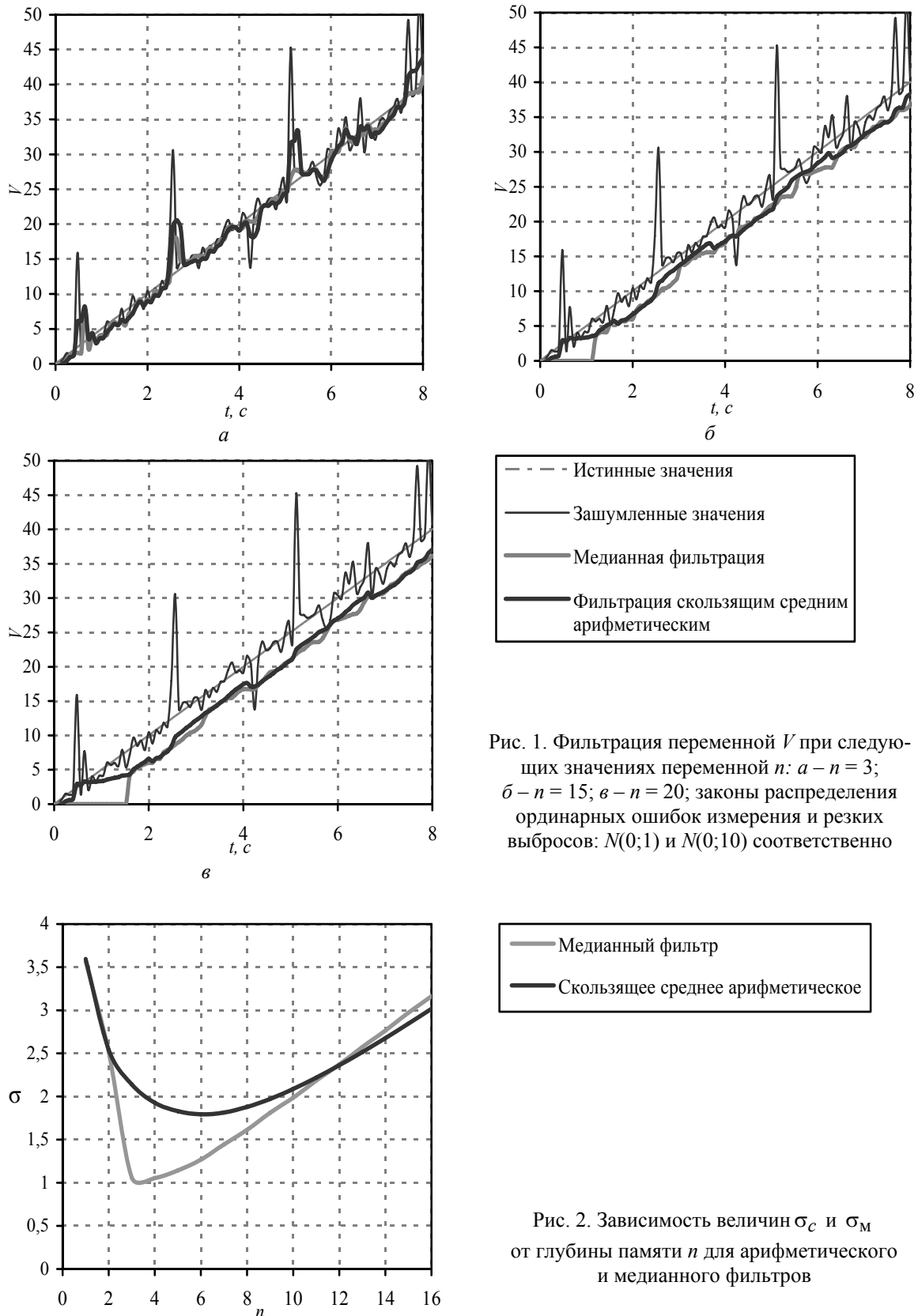


Рис. 1. Фильтрация переменной  $V$  при следующих значениях переменной  $n$ : а –  $n = 3$ ; б –  $n = 15$ ; в –  $n = 20$ ; законы распределения ординарных ошибок измерения и резких выбросов:  $N(0;1)$  и  $N(0;10)$  соответственно

Рис. 2. Зависимость величин  $\sigma_C$  и  $\sigma_M$  от глубины памяти  $n$  для арифметического и медианного фильтров

**Заключение.** Как показывают представленные выше результаты, использование арифметического и медианного фильтров, имеющих вид (1а) и (1б), позволяет существенно повысить точность оценивания значений переменной и в случае, когда ее истинные значения нестационарны. Причем и в этих условиях фильтры, имеющие вид (1б), оказываются более устойчивыми к резким выбросам в

измерениях, чем фильтры, имеющие вид (1а). Однако по сравнению с фильтрами, имеющими вид (1а), они оказываются более чувствительными к нестационарности истинных значений переменной. В этой связи возникает необходимость более тщательного исследования зависимости величины смещения оценок от нестационарности переменной и уровня погрешностей ее измерения. Знание данной зависимости позволит сформулировать и решить задачу выбора оптимальных значений глубины памяти  $n$  и повысить точность фильтрации.

*Литература*

1. Гильбо Е.П. Обработка сигналов на основе упорядоченного выбора / Е.П. Гильбо, И.Б. Челпанов. – М.: Советское радио, 1975. – 344 с.
2. Денисенко В.В. Компьютерное управление технологическим процессом, экспериментом, оборудованием. – М.: Горячая линия – Телеком, 2009. – 608 с.
3. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – М.: Мир, 1978. – 848 с.

---

**Дятлов Дмитрий Вадимович**

Аспирант каф. электронных средств автоматизации и управления (ЭСАУ) ТУСУРа

Тел.: 8-913-119-39-01

Эл. почта: dyatlov@ms.tusur.ru

**Светлаков Анатолий Антонович**

Д-р техн. наук, профессор каф. ЭСАУ

Тел.: 382-2-90-01-73

Эл. почта: iit@fet.tusur.ru

Dyatlov D.V., Svetlakov A.A.

**The numerical modeling and comparison of two types of digital filters for transitional process variables**

Digital filters of two different types are compared: the moving average filter and the median filter. Filtration of a signal affected by noise and influence of sample width, algorithm type and noise type upon accuracy of result are considered here. The choice of optimal filter algorithm type and sample width is considered as well.

**Keywords:** Digital filtration, median filter, additive noise.