

УДК621.37/39.001.5

К.В. Бородин, С.Г. Михальченко

Математическое моделирование динамики инвертирующего DC/DC преобразователя напряжения

Рассматривается численно-аналитическая модель инвертирующего преобразователя, работающего как в режиме непрерывных токов индуктивного накопителя энергии, так и в режиме прерывистых токов. Приведены результаты расчетов бифуркационных диаграмм.

Ключевые слова: стабилизатор напряжения, широтно-импульсная модуляция, решение системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

Введение

Исследование динамических режимов замкнутых систем регулирования ключевого типа, описываемых нелинейными уравнениями кусочно-непрерывного типа, представляет собой самостоятельную задачу для каждого типа преобразователя. В частности, замкнутые системы регулирования, в основу которых положены преобразователи понижающего и повышающего типов, достаточно подробно рассматриваются различными авторами [1–3, 5] в силу их широкого распространения в качестве компенсаторов коэффициента мощности. В то же время динамика преобразователя инвертирующего типа, близкого к регулировочным свойствам повышающего типа, характеризующаяся своим типом нелинейности, остается малоизученной. Это связано с тем, что адекватной математической модели динамики такого рода преобразователя, использующей численно-аналитический подход до сих пор не существовало. Актуальность этой задачи определяется известными возможностями бифуркационного подхода в анализе динамических режимов функционирования преобразователя инвертирующего типа [1–4]. В этой связи целью настоящей статьи являются теоретические исследования динамики, основанной на создании и реализации численно-аналитической модели замкнутой системы регулирования напряжения.

Математическая модель

Схема замещения стабилизатора напряжения приведена на рис. 1, при этом приняты следующие допущения: полупроводниковые приборы представлены идеальными моделями, конденсаторы и дроссели – элементами с сосредоточенными параметрами.

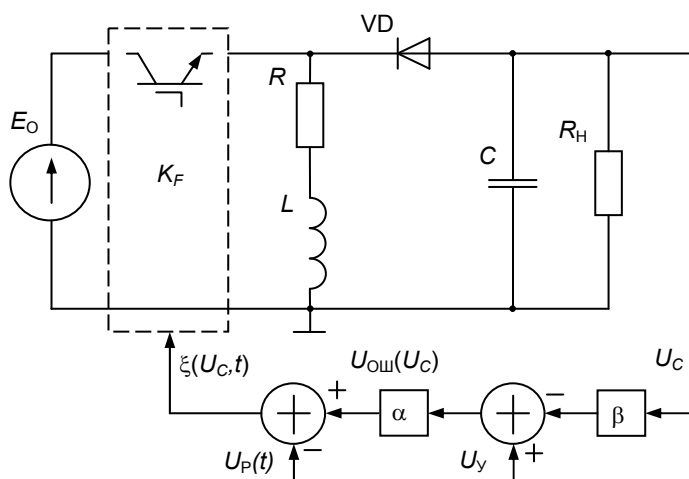


Рис. 1. Схема замещения преобразователя напряжения инвертирующего типа

На схеме введены следующие обозначения: E_0 – напряжение питания; R – сопротивление, характеризующее потери в индуктивности и в регуляторе; VD – диод; L и C – индуктивность и емкость фильтра преобразователя; R_H – сопротивление нагрузки; β – коэффициент передачи датчика обратной связи по выходному напряжению U_C ; U_y – управляющее (задающее) напряжение; α – коэффициент усиления пропорционального звена. Развертывающее напряжение

$U_P(t)$ широтно-импульсного регулятора (ШИМ) формируется по закону однополярной нереверсивной модуляции (ОНМ-1):

$$U_P(t) = U_{оп} \left[\frac{t}{a} - E_1 \left(\frac{t}{a} \right) \right] \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

где $U_{оп}$ – опорное напряжение, E_1 – целочисленная функция; a – тактовый период квантования ШИМ. Функция обратной связи $\xi(U_C, t)$ записывается в виде разности масштабированного сигнала ошибки и развертывающего напряжения ОНМ-1:

$$\xi(U_C, t) \Big|_{(k-1)a \leq t \leq \alpha_{max}ka} = \alpha \cdot (U_y - \beta \cdot U_C) - U_{оп} \left[\frac{t}{a} - E_1 \left(\frac{t}{a} \right) \right].$$

Коммутационная функция управления ключевыми элементами K_F формируется в зависимости от разностной функции обратной связи $\xi(U_C, t)$ по следующему закону:

$$K_F(\xi) = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(\xi)].$$

Математическая модель может быть записана в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с переменными матрицами A_i и b_i , где $i = 1 \dots 3$:

$$\frac{dX}{dt} = A_i [K_F(\xi)] X + b_i [K_F(\xi)]. \tag{1}$$

Матрицы зависят от значения коммутационной функции $K_F[\xi(X, t)]$ и вектора неизвестных X , представленного в данной модели парой переменных состояния (i_L, U_C) – током в индуктивности фильтра и выходным напряжением.

В зависимости от состояния коммутационной функции $K_F[\xi(X, t)]$ и вектора неизвестных X исходная задача на каждом тактовом интервале распадается, в общем случае, на три участка непрерывности K_F . На каждом из этих участков модель (1) представляется в виде линейной системы ОДУ, найти решение которой при заданных начальных условиях можно аналитически. Рассмотрим интервалы непрерывности и решения задачи (1) на каждом из них.

Интервал I. Интегрирование системы (1) на участке $[(k-1)a, t_k^1]$. Транзисторный ключ широтно-импульсного модулятора может открыться только в начале тактового интервала, только в случае, когда функция $\xi(X, t) = U_{ош}(X) - U_P(t) > 0$ – положительная (рис. 2, а, б).

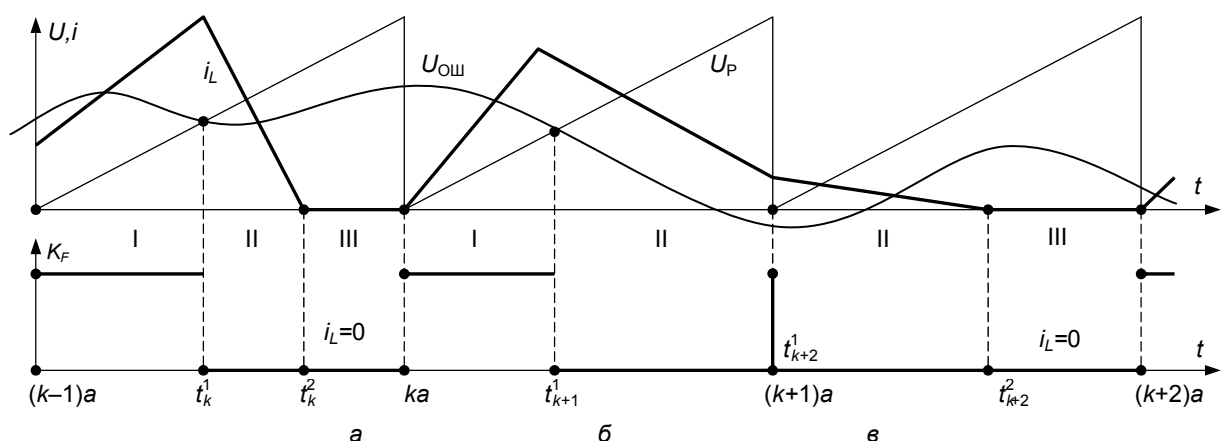


Рис. 2. Формирование коммутационной функции на интервалах непрерывности

На участке $[(k-1)a, t_k^1]$ коммутационная функция принимает значение единицы $K_F(X, t) = 1$, а модель преобразователя, благодаря запертому диоду VD , распадается на две независимых цепи, как показано на рис. 3, а.

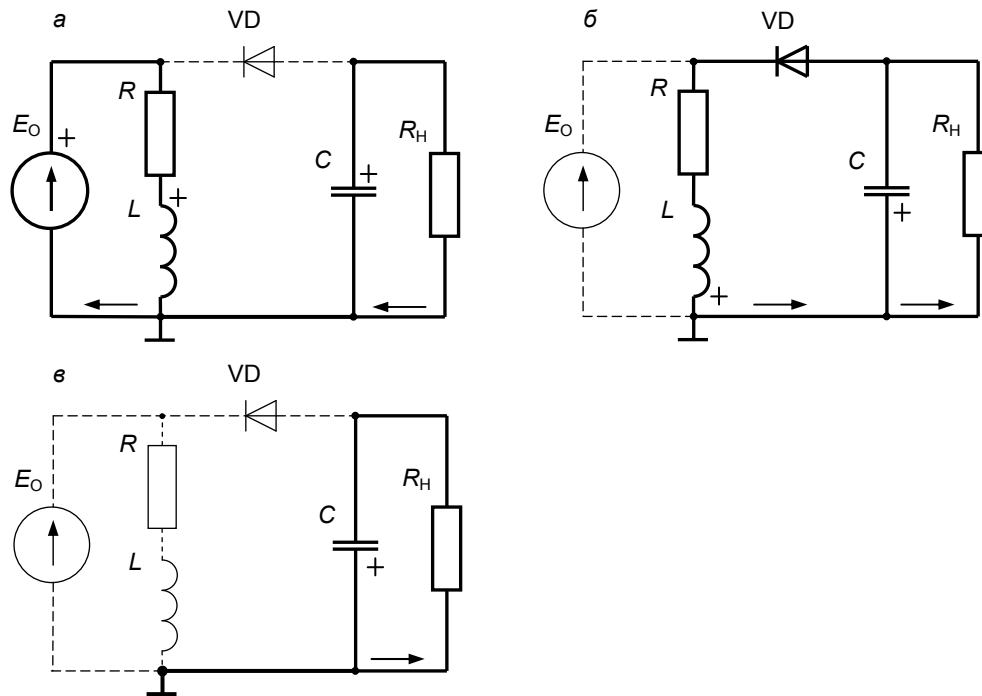


Рис. 3. Инвертирующий преобразователь. Схемы замещения силовой цепи для трех интервалов непрерывности структуры

Матрицы исходной системы ОДУ на интервале $[(k-1)a, t_k^1]$ имеют вид

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{CR_H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{E_0}{L} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Решение задачи (1) на этом интервале при начальных условиях $\mathbf{X}[(k-1)a] = \mathbf{X}_{k-1}$ и матрицах вида (2) может быть записано в виде

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1[t-(k-1)a]} (\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1) - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1. \quad (3)$$

Здесь и далее обозначение $\mathbf{e}^{\mathbf{A}h}$ следует понимать как экспоненциальную матрицу (в некоторых источниках – матричную экспоненту), методы ее построения хорошо известны [4] и в этой работе не рассматриваются.

Исходя из непрерывности вектора переменных состояния $\mathbf{X}(t)$, решение (3) можно продолжить на границы интервала $[(k-1)a, t_k^1]$, т.е.

$$\mathbf{X}_{t_k^1} = \mathbf{X}(t_k^1) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1[t_k^1-(k-1)a]} (\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1) - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1, \quad (4)$$

что позволит найти первую точку коммутации t_k^1 – момент открытия транзисторного ключа VT. Этот момент времени имеет место в двух случаях:

- функция обратной связи $\xi(\mathbf{X}, t)$ меняет свой знак с плюса на минус (иными словами, сигнал ошибки $U_{\text{ОШ}}(\mathbf{X})$, получаемый по обратной связи, сравнивается по величине с $U_p(t)$ – развертывающим напряжением);

- коэффициент заполнения z_k^1 достигает своего максимально возможного значения γ_{max} (максимальное значение скважности γ_{max} фиксируется на уровне 0,7–0,9 для предотвращения короткого замыкания источника питания). Момент коммутации t_k^1 и коэффициент заполнения z_k^1 связаны между собой по закону: $z_k^1 a = [t_k^1 - (k-1)a]$.

Значение вектора переменных состояния в первой точке коммутации (4) может быть выражено также и через коэффициент заполнения z_k^1 :

$$\mathbf{X}_{t_k^1} = e^{A_1 z_k^1 a} (\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1) - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1. \quad (5)$$

Таким образом, ключевой элемент гарантированно один раз на тактовом периоде разорвет входную цепь, как показано на рис. 3, б. Если же функция обратной связи $\xi(\mathbf{X}, t) \leq 0$ – отрицательная на момент начала тактового интервала – ключ так и не откроется, тогда $K_F(\xi) \equiv 0$ на протяжении всего тактового интервала. При этом первый момент коммутации $t_k^1 = (k-1)a$, а первый коэффициент заполнения $z_k^1 = 0$.

Интервал II. Решение системы (1) на участке $[t_k^1, t_k^2]$ находится при условиях: коммутационная функция $K_F(\mathbf{X}, t) \equiv 0$, транзистор VT открыт, индуктивность L отдает запасенную энергию в нагрузку, ток дросселя положительный и убывающий (см. рис. 2). Матрицы исходной системы ОДУ на этом интервале имеют вид

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Решение на втором интервале при начальных условиях $\mathbf{X}(t_k^1) = \mathbf{X}_{t_k^1}$ и матрицах вида (6) может быть записано в виде

$$\mathbf{X}_{t_k^2} = \mathbf{X}(t_k^2) = e^{A_2(t_k^2 - t_k^1)} \left[e^{A_1(t_k^1 - (k-1)a)} (\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1) - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1 \right]. \quad (7)$$

Второй момент коммутации определяется выключением диода VD при снижении до нуля тока в индуктивности, что является индикатором перехода модели в режим прерывистых токов (см. рис. 2, а, в).

Интервал III. Ток на этом участке непрерывности структуры $[t_k^2, ka]$ протекает только в цепи нагрузки (см. рис. 3, в), а матрицы системы (1) имеют вид

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{CR_H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Коэффициент заполнения определяется так: $z_k^2 a = [t_k^2 - (k-1)a]$. Если первый момент коммутации на интервале есть всегда, то второго может и не быть, если ток i_L не снизится до нуля на протяжении всего тактового интервала (как показано на рис. 2, б). На этом интервале решение исходной системы (1) при начальных условиях $\mathbf{X}(t_k^2) = \mathbf{X}_{t_k^2}$ и матрицах вида (8) должно выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{X}(t) = e^{A_3(t - t_k^2)} e^{A_2(t_k^2 - t_k^1)} \left[e^{A_1(t_k^1 - (k-1)a)} (\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1) - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1 \right]. \quad (9)$$

На границе тактового интервала значение вектора неизвестных может быть получено из (4), (7) и (9) аналитически:

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(ka) = e^{A_3(ka - t_k^2)} e^{A_2(t_k^2 - t_k^1)} \left[e^{A_1(t_k^1 - (k-1)a)} (\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1) - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1 \right] \quad (10)$$

или, выразив через z_k^1 и z_k^2 , получим, с учетом (5) и (9), окончательный вид

$$\mathbf{X}_k = e^{A_3(1 - z_k^2)a} e^{A_2(z_k^2 - z_k^1)a} e^{A_1 z_k^1 a} (\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1) - e^{A_3(1 - z_k^2)a} e^{A_2(z_k^2 - z_k^1)a} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1. \quad (11)$$

Таким образом, построенное рекуррентное соотношение (11) позволяет по рассчитанным коэффициентам заполнения $\mathbf{Z} = \{z_k^1, z_k^2\}$, где $k = 1, 2, \dots$, и начальным условиям $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)$ в каждом k -м узле тактовой сетки последовательно находить значения переменных состояния $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(ka)$.

Произведя несложные подстановки, из (11) можно выписать формулу для вычисления любого узлового значения вектора неизвестных, в зависимости только от вектора $\mathbf{Z} = \{z_k^1, z_k^2\}$, $k = 1, 2, \dots$ и начальных условий $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)$:

$$\mathbf{X}_k = \left\{ \prod_{j=k}^1 e^{\mathbf{A}_3(1-z_j^2)a} e^{\mathbf{A}_2(z_j^2-z_j^1)a} e^{\mathbf{A}_1 z_j^1 a} \right\} \mathbf{X}_0 + \sum_{r=1}^k \left\{ \prod_{j=k}^r e^{\mathbf{A}_3(1-z_j^2)a} e^{\mathbf{A}_2(z_j^2-z_j^1)a} e^{\mathbf{A}_1 z_j^1 a} - \right. \\ \left. - \left(\prod_{j=k}^{r+1} e^{\mathbf{A}_3(1-z_j^2)a} e^{\mathbf{A}_2(z_j^2-z_j^1)a} e^{\mathbf{A}_1 z_j^1 a} \right) e^{\mathbf{A}_3(1-z_r^2)a} e^{\mathbf{A}_2(z_r^2-z_r^1)a} \right\} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1. \quad (12)$$

Значения переменных состояния на каждом интервале постоянства структуры построены, остается разработать алгоритм отыскания на каждом тактовом интервале моментов коммутации $\{t_k^1, t_k^2\}$ или коэффициентов заполнения $\{z_k^1, z_k^2\}$.

Отыскание моментов коммутации. Поиск моментов коммутации t_k^1 и t_k^2 на каждом тактовом интервале $[(k-1)a, ka]$ основывается на двух фактах: в первый момент коммутации функция обратной связи $\xi(\mathbf{X}, t)$ обращается в нуль, а во втором моменте коммутации становится нулевым i_L – ток в индуктивности фильтра. Уравнения для записи коммутационной функции и функции обратной связи можно сформировать следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha \cdot [U_y - \beta \cdot \mathbf{X}_2(t)] - U_{\text{оп}} \left[\frac{t}{a} - E_1 \left(\frac{t}{a} \right) \right] = 0, \\ \mathbf{X}_1(t) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Отыскав из уравнений $\xi(\mathbf{X}, t) = 0$ и $\mathbf{X}_1(t) = 0$ моменты коммутации t_k^1 , t_k^2 , мы получаем возможность аналитически построить мгновенные значения решения исходной задачи (1) на участках непрерывности по формуле (3). А значения вектора неизвестных в моментах коммутации и узловых точках тактовой сетки могут быть построены рекуррентно по формуле (12).

Построенный по уравнениям (13) алгоритм позволяет аналитически строить мгновенные значения вектора переменных состояния \mathbf{X} и численно находить коэффициенты заполнения $\mathbf{Z} = \{z_k^1, z_k^2\}$, $k = 1, 2, \dots$ с любой доступной численным алгоритмам точностью.

Проведение вычислительных экспериментов. При проведении вычислительных экспериментов были выбраны следующие параметры модели:

$E_0 = 220$ В; $R = 1$ Ом; $L = 0,002$ Гн; $C = 0,001$ Ф; $R_H = 160$ Ом; $U_{\text{оп}} = 5$ В; $U_y = 10$ В; $a = 0,000025$ с; $\beta = 0,025$; $\alpha = 10$; $\gamma_{\text{max}} = 0,71$.

Результаты моделирования мгновенных значений тока индуктивности в ряде установившихся режимов приведены на рис. 4.

При $\alpha = 3$ наблюдается стационарный режим стабилизатора, действующее значение тока дросселя которого составляет $i_{L\text{эф}} = 5,95$ А с уровнем пульсаций 23,5%. Граница перехода от стационарного движения к периодической динамике рассматриваемой системы, при оговоренных выше параметрах, находится на уровне $\alpha = 11,5$. Дальнейшее увеличение α приводит к модуляции периодического режима тока индуктивности низкочастотной огибающей. В частности, на рис. 4, б представлен установившийся режим с низкочастотной огибающей, соответствующей 131-цикловому режиму с действующим значением $i_{L\text{эф}} = 7,17$ А и уровнем пульсаций 30,5%. При $\alpha = 20$ наблюдается периодический режим с действующим значением тока индуктивности $i_{L\text{эф}} = 8,96$ А, уровнем пульсаций 180% и низкочастотной огибающей с частотой 16,26 кГц (см. рис. 4, в).

При $\alpha > 11,8$ у инвертирующего преобразователя с параметрами, представленными выше, на отдельных участках ($t_1 - t_2$, $t_3 - t_4$ – на рис. 4, в) появляются граничные режимы и режимы прерывистых токов.

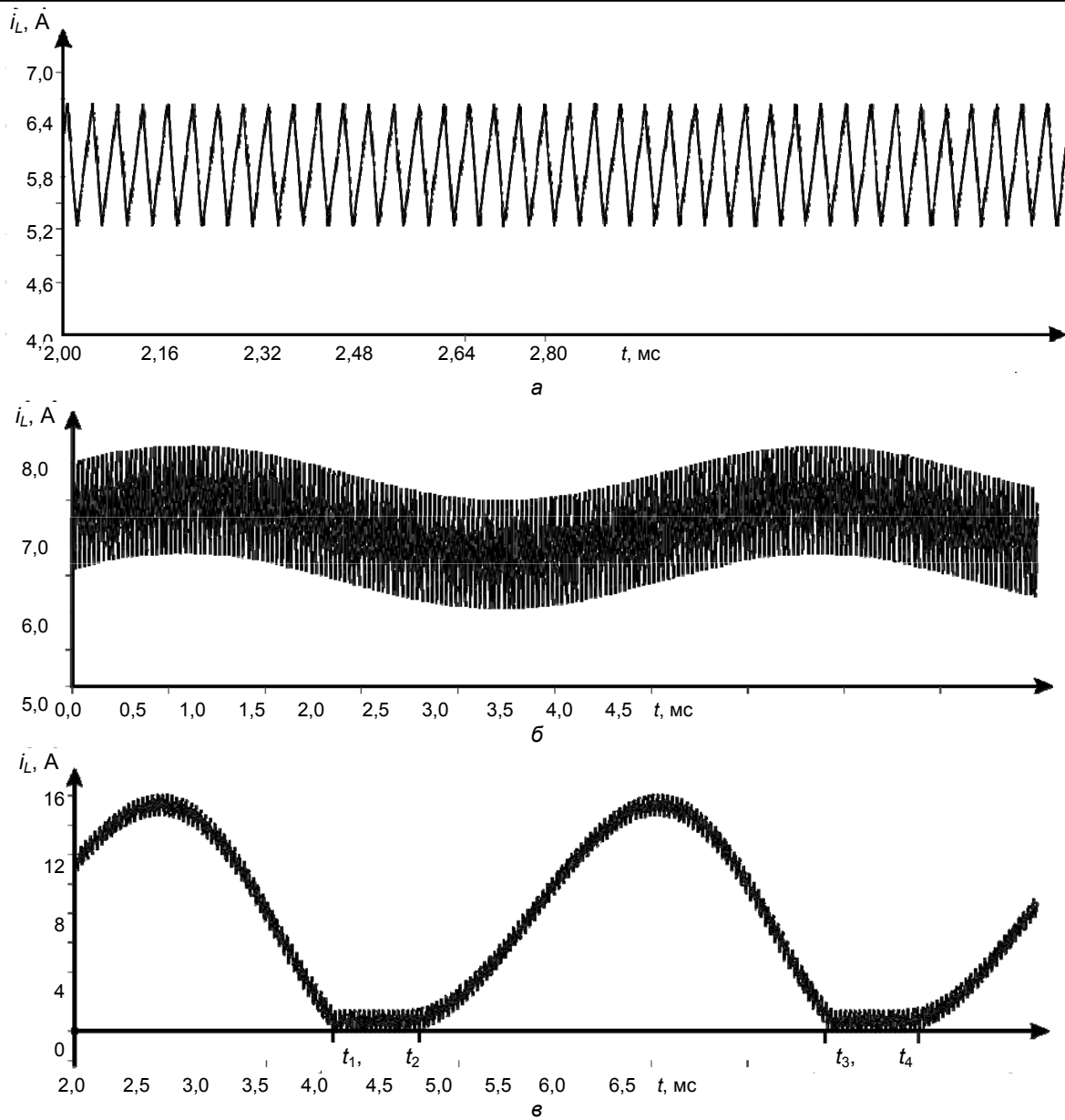


Рис. 4. Мгновенные значения тока индуктивности

Общая картина развития динамических режимов в функции коэффициента усиления пропорционального регулятора α представлена на рис. 5 в виде однопараметрической бифуркационной диаграммы.

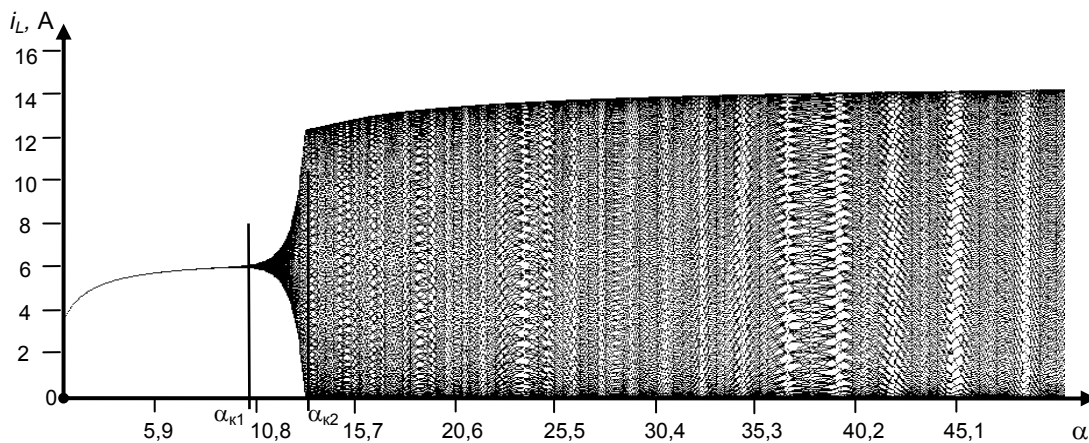


Рис. 5. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма

Можно видеть, что в диапазоне $0 < \alpha < \alpha_{к1}$ существует одноцикловый режим, как на рис. 4, а. С ростом α появляются субгармонические колебания вида рис. 4, б (от $\alpha_{к1}$ до $\alpha_{к2}$). Интенсивный рост этих колебаний со скоростью степенной функции приводит (при $\alpha > \alpha_{к2}$) к возникновению квазипериодического режима с резко возросшими значениями пульсации, которые могут достигать 200%.

Заключение

Полученные результаты подтверждают возможность создания программно-аппаратных комплексов, быстродействие которых на порядок и более превосходит известные численные комплексы программ [5]. Приведенные иллюстрации показывают, что разработанный математический аппарат позволяет продвинуться в исследованиях динамики инвертирующего преобразователя напряжения до построения бифуркационных диаграмм и отыскания границ областей конвергентности. Но для отыскания неустойчивых (как детерминированных, так и хаотических) решений, построения подхода к анализу локальной устойчивости системы и анализа сценариев изменения динамики модели требуется построить рекуррентное *отображение последования*, как в [1, 2].

Литература

1. Баушев В.С. О недетерминированных режимах функционирования стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием / В.С. Баушев, Ж.Т. Жусубалиев // Электричество. – 1992. – № 8. – С. 47–53 с.
2. Алейников О.А. Исследование локальной устойчивости периодических режимов в нелинейных импульсных системах / О.А. Алейников, В.С. Баушев, А.В. Кобзев // Электричество. – 1991. – № 4. – С. 16–21 с.
3. Баушев В.С. Стохастичность в динамике стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием / В. С. Баушев, Ж. Т. Жусубалиев, С. Г. Михальченко // Электричество. – 1996. – № 3. – С. 69-75.
4. Кобзев А.В. Нелинейная динамика полупроводниковых преобразователей / А.В. Кобзев, Г. Я. Михальченко, С. Г. Михальченко, А. И. Андриянов // Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2007. – 224 с.
5. Tse C.K. Theoretical Study of Switching Power Converters with Power Factor Correction and Output Regulation / C.K. Tse, M.H.L. Chow // IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications. 2000. – Vol. 47, №7 (July). – P. 1147–1155.

Бородин Кирилл Валерьевич

Аспирант кафедры промышленной электроники ТУСУРа
Тел.: 8-903-953-82-65
Эл. почта: bkirill@hotmail.ru

Михальченко Сергей Геннадьевич

Канд. техн. наук, доцент кафедры промышленной электроники ТУСУРа
Тел.: 8-913-826-09-07
Эл. почта: msg@ie.tusur.ru

K.V. Borodin, S.G. Mikhailchenko

Mathematic modeling of inverting DC/DC converter dynamics

A numerically-analytical model of inverting converter, which operates both in the continuous currents and discontinuous currents modes of inductive energy storage, is considered. The results of bifurcation diagrams calculation are presented.

Key words: Power stabilizer, PWM, solving of the system of differential equations with the broken right part.