УДК621.37/39.001.5

Г.Я. Михальченко, А.А. Малаханов

Математическая модель однофазного корректора коэффициента мощности

Приведена численно-аналитическая модель однофазного корректора коэффициента мощности, выполненного на базе однотактного преобразователя напряжения повышающего типа. Показана возможность исследования динамики замкнутой системы регулирования.

Ключевые слова: корректор коэффициента мощности, широтно-импульсная модуляция,
кусочно-гладкие дифференциальные уравнения, бифуркационный анализ.

Введение

Благодаря использованию высокочастотных импульсных способов регулирования потоков энергии, современные системы преобразования электрической энергии обеспечивают достаточно высокую совместимость преобразователя с нагрузкой, что обусловливает требуемое качество выходного сигнала. Однако основной проблемой при использовании любого преобразовательного устройства является обеспечение электромагнитной совместимости с питающей сетью для исключения помех, распространяемых по сети, и минимизации потерь мощности.

Применение корректоров коэффициента мощности (ККМ), построенных на базе систем с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ), позволяет решить задачу электромагнитной совместимости с питающей сетью, уменьшив уровень эмиссии высших гармонических составляющих в потребляемый преобразователем из сети ток. В литературе [1, 2] описываются варианты построения систем с ККМ, однако наибольшее распространение получили корректоры, построенные на базе повышающего преобразователя напряжения, рассматриваемого в данной статье.

Существующие работы, рассматривающие ККМ с позиций теории нелинейной динамики [3–6], лишь частично решают проблему построения точных моделей из-за существенных допущений. Например, входное напряжение преобразователя на тактовом интервале считается постоянным, а расчет длинных рядов численными методами сопровождается накоплением ошибки округления, что в моделях замкнутых систем воспринимается как отклонение и приводит к реализации иных режимов функционирования.

Данная работа является развитием существующих работ [6]. Основная задача, которая ставилась авторами, состоит, прежде всего, в выполнении более жестких требований к процессу моделирования ККМ, что в полной мере позволяет реализовывать бифуркационный подход к проектированию.

Математическая модель ККМ

На рис. 1 представлена схема замещения ККМ, построенная на базе повышающего преобразователя напряжения, в системе управления которого в качестве модулятора информационных сигналов используется умножитель.

В схеме замещения обозначения имеют следующий смысл: u – выпрямленное сетевое переменное напряжение $u = U_m \cdot |\sin(\omega t)|$; R – сопротивление, характеризующее потери в индуктивности фильтра и преобразователе; L – индуктивность; C – емкость; $R_{\text{Н}}$ – сопротивление нагрузки; ИМ – широтно-импульсный модулятор; $\beta 1$, $\beta 2$ – коэффициенты передачи датчиков обратной связи выходного напряжения и тока дросселя соответственно; $\beta 3$ – коэффициент передачи датчика входного напряжения; КУ1, КУ2 – корректирующие устройства контуров напряжения и тока соответственно; $U_{\text{з}}$ – напряжение задания; X – блок перемножения сигналов; ГРН – генератор развертывающего напряжения; $\xi(\mathbf{X}, t)$ – разностная функция.

При построении схемы замещения принимались во внимание следующие допущения:

1) входной источник питания является идеальным источником напряжения;

2) импульсный преобразователь выполнен на идеальных ключах с нулевым временем переключения;

3) элементы R, L, C линейны; сопротивление R моделирует суммарное сопротивление индуктивности и сопротивление преобразователя;

4) корректирующие устройства выполнены на базе идеальных элементов.

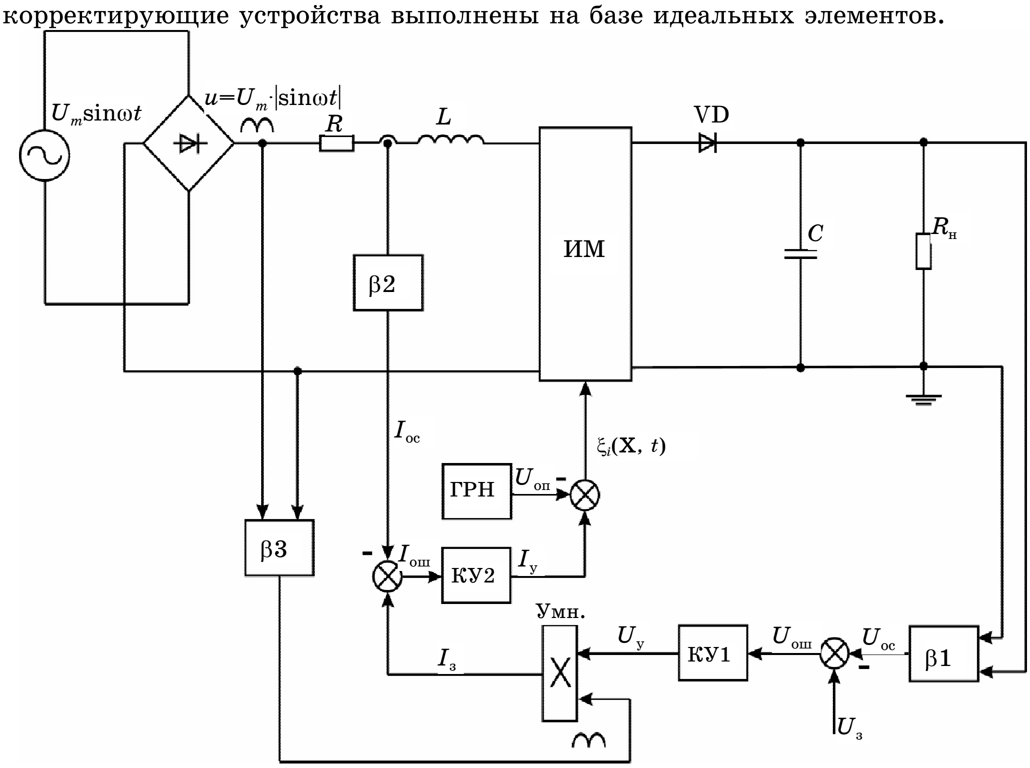

Рис. 1. Схема замещения преобразователя напряжения с ККМ

Схема замещения преобразователя описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью

$$\begin{cases} L\cdot\dfrac{di_L}{dt} = -R\cdot i_L - K_{FD}\left(\xi(t)\right)\cdot u_C + u, \\ C\cdot\dfrac{du_C}{dt} = i_L\cdot K_{FD}\left(\xi(t)\right) - \dfrac{u_C}{R_{\text{H}}}\ , \end{cases} \qquad (1)$$

где i_L – ток в индуктивности; u_C – напряжение на емкости фильтра; $K_{FD}\left(\xi(t)\right)$ – функция, описывающая коммутацию диода VD.

Разностная функция $\xi(t)$ принимает вид

$$\xi(t) = \alpha_2(\alpha_1(U_3 - \beta_1\cdot u_C)\cdot\beta_3\cdot u - \beta_2\cdot i_L) - U_P(t)\,,$$

где α_1, α_2 – коэффициенты усиления ошибки по выходному напряжению и потребляемому току соответственно; $U_{\text{P}}(t)$ – развертывающее напряжение.

Коммутационная функция $K_F(\xi(t)) = 1 - K_{FD}(\xi(t))$ характеризует состояние ключей преобразователя на участках постоянства структуры на каждом периоде ШИМ. С учетом этого коммутационная функция представляется выражением

$$K_F(\xi(t)) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sign}\left(\xi(t)\right)\right].$$

и, как видно из него, принимает два значения – 0 и 1.

Систему (1) можно представить в матричном виде

$$\frac{d\overline{\mathbf{X}}}{dt} = \mathbf{A}(K_F(\xi(t))\cdot\overline{\mathbf{X}} + \overline{\mathbf{B}}(i_L)\,, \qquad (2)$$

где $\mathbf{A}$ – основная матрица системы, которая является разрывной и может иметь три состояния: $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ – в зависимости от значения коммутационной функции K_F и наличия режима прерывистого тока; $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}$ – вектор переменных состояния; $\mathbf{B}$ – вектор вынуждающих воздействий, который также имеет различные значения в зависимости от наличия (отсутствия) режима прерывистого тока дросселя.

Ток может снизиться до нуля только в момент закрытого ключа. Таким образом, разбив рабочий цикл по времени, на три участка непрерывности, выражение (2) преобразуется к виду

$$\frac{d\overline{\mathbf{X}}}{dt}=\begin{cases}\mathbf{A}_1\cdot\overline{\mathbf{X}}+\overline{\mathbf{B}}_1, & (k-1)a<t\le t_{k1}, \quad K_F=1,\ i_L>0,\\ \mathbf{A}_2\cdot\overline{\mathbf{X}}+\overline{\mathbf{B}}_2, & t_{k1}<t\le t_{k2}, \quad K_F=0,\ i_L>0,\\ \mathbf{A}_3\cdot\overline{\mathbf{X}}+\overline{\mathbf{B}}_3, & t_{k2}<t\le k\cdot a, \quad K_F=0,\ i_L=0.\end{cases} \tag{3}$$

Здесь a – период следования тактовых импульсов; t_{k1} – момент коммутации; t_{k2} – момент снижения тока индуктивности до нулевого значения при работе в режиме прерывистого тока. Если за период следования тактовых импульсов реализуется режим непрерывного тока, то при поиске решения системы можно ограничиться первыми двумя выражениями, т.е. t_{k2} при этом будет равен ka.

Система уравнений (1) решается численно-аналитическим методом, при котором тактовый интервал a разбивается в общем случае на три участка гладкости, границы которых определяются соответствующими поверхностями сшивания:

1. Момент коммутации ключа преобразователя.
2. Момент снижения тока дросселя до нуля.
3. Конец тактового интервала.

Решение задачи Коши (1) в общем виде представляется выражением

$$\overline{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\cdot\overline{\mathbf{X}}_0+\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}(\tau-t_0)}\cdot\mathbf{B}\cdot\sin(\omega\tau)d\tau\,.$$

Раскрыв интеграл, получим решение в виде

$$\overline{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\cdot\overline{\mathbf{X}}_0+[\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\{\mathbf{A}\cdot\sin(\omega t_0)+\mathbf{E}\cdot\omega\cdot\cos(\omega t_0)\}-$$

$$-\{\mathbf{A}\cdot\sin(\omega t)+\mathbf{E}\cdot\omega\cdot\cos(\omega t)\}]\cdot(\mathbf{A}^2+\omega^2\cdot\mathbf{E})^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathrm{sign}(\sin[\omega t]), \tag{4}$$

которое описывает поведение вектора переменных на каждом участке гладкости. Вектор начальных условий последующего интервала принимается равным значениям переменных состояний в конце предыдущего интервала.

На рис. 2 представлены временные диаграммы, поясняющие положение моментов коммутации. Участки гладкости на рисунке обозначены римскими цифрами. Граница существования каждого участка справа определяется соответствующей поверхностью сшивания. На рис. 3 представлены схемы замещения силовой части преобразователя на этих участках.

Рассмотрим решение (4) системы (1) для каждого из участков непрерывности (3). Согласно принципам формирования импульса [3] функция K_F может изменить свое значение только один раз в течение каждого временного интервала $[(k-1)a, ka]$ в точке t_{k1}, которую будем называть, как в [4], первым моментом коммутации.

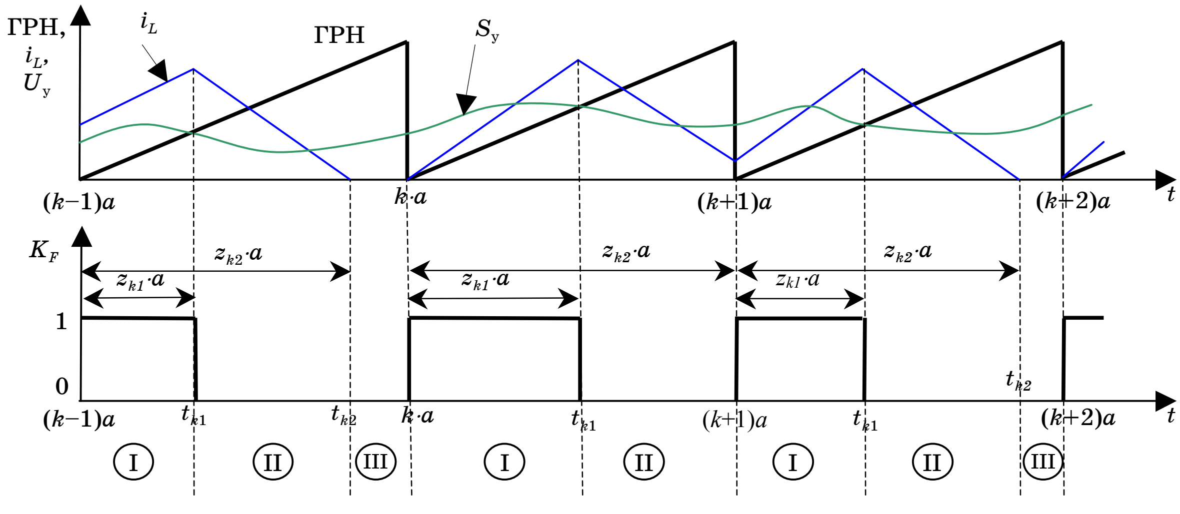

Рис. 2. Временные диаграммы работы системы управления:
ГРН – генератор развертывающих напряжений; $S_у$ – сигнал управления;
i_L – ток в дросселе; z_{k1}, z_{k2} – относительные длительности участков гладкости

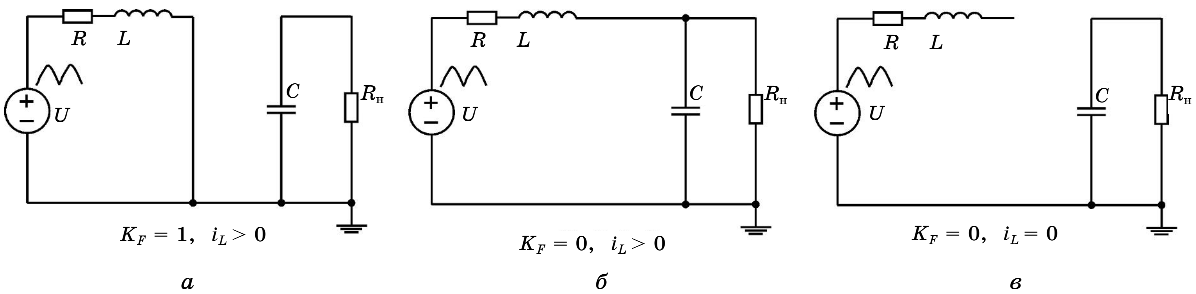

Рис. 3. Схемы замещения силовой части ККМ на участках непрерывности

Момент пересечения током нулевого значения назовем вторым моментом коммутации (t_{k2}). Тогда решение (4) необходимо рассматривать на трех участках постоянства структуры: когда ключ открыт ($K_F = 1$), ключ закрыт ($K_F = 0$), ключ закрыт и ток дросселя равен нулю ($K_F = 0$, $i_L = 0$).

1. Участок слева от момента коммутации: $(k-1)a \le t \le t_{k1}$. Коммутационная функция на данном участке принимает значение $K_F = 1$. Эквивалентная схема замещения преобразо-вателя на этом участке представлена на рис. 3, *а*.

Основная матрица системы и вектор возмущающих воздействий принимают вид

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{C \cdot R_{\text{Н}}} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} U_m / L \\ 0 \end{bmatrix},$$

где U_m – амплитуда входного напряжения.

Учитывая, что начальные условия являются значениями вектора переменных состояний в конце предыдущего участка гладкости $\overline{\mathbf{X}}_0 = \overline{\mathbf{X}}_{k-1} = \overline{\mathbf{X}}((k-1)a)$, решение (4) исходной системы (1) на данном участке непрерывности записывается в виде

$$\overline{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1(t-(k-1)a)} \cdot \overline{\mathbf{X}}_0 + [\mathbf{e}^{\mathbf{A}_1(t-(k-1)a)}\{\mathbf{A}_1 \cdot \sin(\omega(k-1)a) +$$
$$+\mathbf{E} \cdot \omega \cdot \cos(\omega(k-1)a)\} - \{\mathbf{A}_1 \cdot \sin(\omega t) + \mathbf{E} \cdot \omega \cdot \cos(\xi t)\}] \times$$
$$\times (\mathbf{A}_1^2 + \omega^2 \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathrm{sign}(\sin[\omega t]).$$

Значение вектора решений $\overline{\mathbf{X}}$ в момент коммутации t_{k1}:

$$\overline{X}_{t_{k1}} = \overline{X}(z_{k1}) = e^{A_1 \cdot z_{k1} \cdot a} \cdot \overline{X}_0 + [e^{A_1 \cdot z_{k1} \cdot a}\{A_1 \cdot \sin(\omega(k-1)a) +$$
$$+ E \cdot \omega \cdot \cos(\omega(k-1)a)\} - \{A_1 \cdot \sin(\omega(k-1+z_{k_1})a) +$$
$$+ E \cdot \omega \cdot \cos(\omega(k-1+z_{k_1})a)\}] \times$$
$$\times (A_1^2 + \omega^2 \cdot E)^{-1} \cdot B \cdot \mathrm{sign}(\sin[\omega(k-1+z_{k_1})a]).$$

2. Участок справа от момента коммутации: $t_{k1} < t \le t_{k2}$. Коммутационная функция на данном участке принимает значение $K_F = 0$. Схема замещения преобразователя представ-лена на рис. 3, *б*.

Основная матрица системы и вектор вынуждающих воздействий на этом участке имеют значения

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C \cdot R_{\text{Н}}} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} U_m / L \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Начальными условиями являются значения вектора переменных состояний в момент коммутации ключа t_{k1}

$$\overline{\mathbf{X}}_0 = \overline{\mathbf{X}}_{t_{k1}} = \overline{\mathbf{X}}(t_{k1}).$$

Решение системы (1) на данном интервале непрерывности запишется как

$$\overline{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_2(t-t_{k1})} \cdot \overline{\mathbf{X}}_{t_{k1}} + [\mathbf{e}^{\mathbf{A}_2(t-t_{k1})}\{\mathbf{A}_2 \cdot \sin(\omega t_{k1}) + \mathbf{E} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t_{k1})\} - \{\mathbf{A}_2 \cdot \sin(\omega t) + \mathbf{E} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)\}] \times$$
$$\times (\mathbf{A}_2^2 + \omega^2 \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathrm{sign}(\sin[\omega t]).$$

Значение вектора переменных состояний в момент снижения тока до нуля t_{k2}

$$\overline{\mathbf{X}}(z_{k2}, z_{k1}) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_2(z_{k2}-z_{k1})a} \cdot \overline{\mathbf{X}}_{t_{k1}} + [\mathbf{e}^{\mathbf{A}_2(z_{k2}-z_{k1})a} \times$$
$$\times \{\mathbf{A}_2 \cdot \sin(\omega(k-1+z_{k1})a) + \mathbf{E} \cdot \omega \cdot \cos(\omega(k-1+z_{k1})a)\} -$$
$$- \{\mathbf{A}_2 \cdot \sin(\omega(k-1+z_{k2})a) + \mathrm{E} \cdot \omega \cdot \cos(\omega(k-1+z_{k2})a)\}] \times$$
$$\times (\mathbf{A}_2^2 + \omega^2 \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathrm{sign}(\sin[\omega(k-1+z_{k2})a]).$$

3. Участок справа от момента коммутации: $t_{k2} < t \le k \cdot a$. Коммутационная функция на данном участке принимает значение $K_F = 0$, а ток дросселя $i_L = 0$. Схема замещения преобразователя на этом участке представлена на рис. 3, *в*.

Основная матрица системы и вектор вынуждающих воздействий на этом участке имеют вид

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{C \cdot R_{\mathrm{H}}} \end{bmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{B}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Начальными условиями для этого интервала гладкости являются значения вектора переменных состояния в момент времени t_{k2}:

$$\overline{\mathbf{X}}_0 = \overline{\mathbf{X}}_{k2} = \overline{\mathbf{X}}(t_{k2}).$$

Решение системы (1) на данном интервале имеет вид

$$\overline{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_3(t-t_{k2})} \cdot \overline{\mathbf{X}}_{t_{k2}} + [\mathbf{e}^{\mathbf{A}_3(t-t_{k2})}\{\mathbf{A}_3 \cdot \sin(\omega t_{k2}) + \mathbf{E} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t_{k2})\} -$$
$$- \{\mathbf{A}_3 \cdot \sin(\omega t) + \mathbf{E} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)\}] \cdot (\mathbf{A}_3^2 + \omega^2 \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B}_3 \cdot \mathrm{sign}(\sin[\omega t]).$$

Учитывая, что вектор вынуждающих воздействий $\mathbf{B}_3$ является нулевым, (6) сведется к виду

$$\overline{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_3(t-t_{k2})} \cdot \overline{\mathbf{X}}_{t_{k2}}.$$

В конце такта вектор переменных состояний определяется из выражения

$$\overline{\mathbf{X}}(z) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_3(1-z_{k2})a} \cdot \overline{\mathbf{X}}_{t_{k2}}.$$

Для поиска решения системы (1) необходимо решение на каждом из участков гладкости дополнить алгоритмом поиска моментов коммутации (определение z_{k1} и z_{k2}). Поиск z_{k1} и z_{k2} возможен любым из известных численных методов.

Результаты математического моделирования

Моделирование проводилось при следующих исходных данных.

Параметры силовой части: действующее напряжение сети – U_c = 220 В; напряжение на выходе – $U_{\text{вых}}$ = 400 В; частота коммутации силового ключа – f_k = 40 кГц; индуктивность – L = 2,4 мГн; емкость – C = 1000 мкФ; сопротивление, учитывающее потери в преобразователе, – R = 1 Ом; эквивалентное сопротивление нагрузки – R_{H} = 160 Ом.

Параметры системы управления: делитель выходного напряжения – β_1 = 0,01; напряжение задания – $U_З$ = 4 В; делитель тока дросселя – β_2 = 1; делитель входного выпрямленного напряжения – β_3 = 0,0032; коэффициент усиления регулятора напряжения – α_1 = 20; коэффициент усиления регулятора тока – α_2 = 10; амплитудное значение генератора развертывающих напряжений – $U_{\text{ОП}}$ = 10 В.

На рис. 4 показаны временные диаграммы работы ККМ для перечисленного набора параметров. Как видно, при пуске системы формируется бросок тока, до уровня 102 А, что обусловлено разряженной емкостью и прямым пуском модели. В реальных преобразователях необходимо избегать прямого пуска и использовать плавный запуск устройства с целью исключения чрезмерно больших пусковых токов, способных вывести преобразователь из строя.

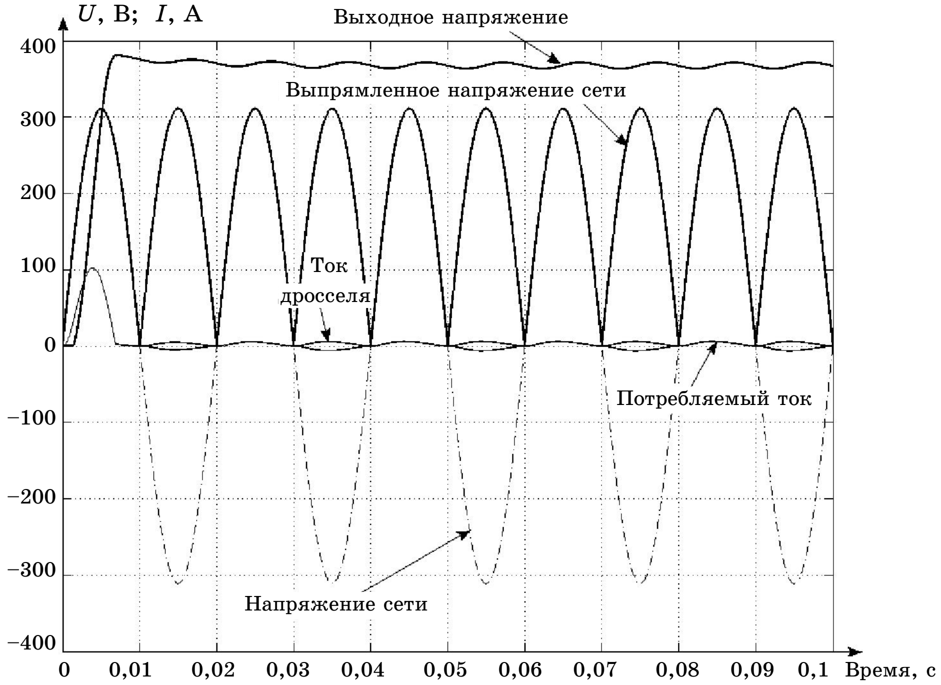

Рис. 4. Мгновенные значения токов и напряжений ККМ

На рис. 5 для примера представлено влияние коэффициента усиления регулятора тока α_2 на быструю динамику потребляемого из сети тока. Для наглядности диаграммы приведены в укрупненном масштабе.

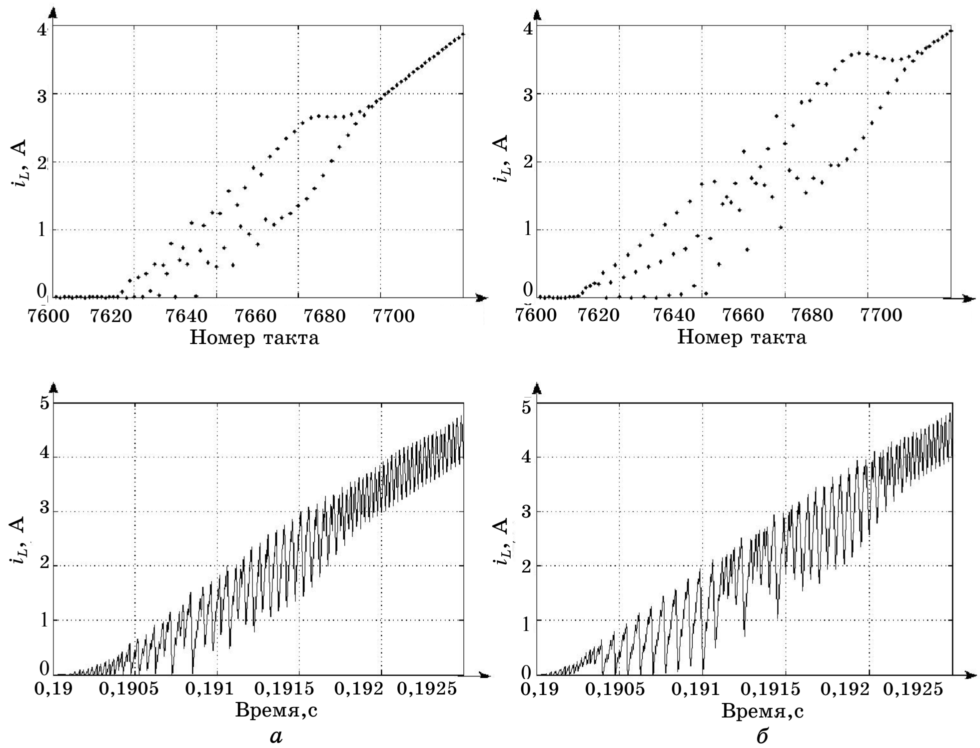

Рис. 5. Бифуркационные и временные диаграммы потребляемого тока: *а* – α_2 = 20; *б* – α_2 = 50

Из диаграмм видно, что работа преобразователя в течение полупериода сетевого напряжения может осуществляться не только в одноцикловом режиме, но и в режимах с более высокими порядками циклов, в которых наблюдаются колебания тока с увеличенным размахом. Эти явления также имеют влияние на показатели качества функционирования преобразователя и предъявляют более жесткие требования к выбору активных и пассивных элементов схемы.

Выводы

1. Разработана численно-аналитическая модель однофазного ККМ, учитывающая наличие синусоидального входного воздействия и режима прерывистого тока дросселя.

2. Используемый авторами подход позволяет исследовать как медленные, так и быстрые динамические процессы в ККМ, а также проводить оптимизацию параметров системы.

Литература

1. Tse C.K. Theoretical Study of Switching Power Converters with Power Factor Correction and Output Regulation / C.K. Tse, M.H.L. Chow // IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications. – 2000. – Vol. 47, № 7 (July). – P. 1147–1155.

2. Статические компенсаторы реактивной мощности в электрических системах: пер. тематического сб. рабочей группы исслед. ком. N39 СИГРЭ / Под ред. И.И. Карташева. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 174 с. – (Энергетика за рубежом).

3. Andriyanov A.I. A Comparative Characteristic of Different Kinds of Pulse-Width Respect to the Topology of Regions of Existence of Periodic Operating Conditions / A.I. Andriyanov, G.Ya. Mikhalchenko // Electrical Technology. – 2004. – № 4. – P. 166–181.

4. Баушев В.С. О недетерминированных режимах функционирования стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием / В.С. Баушев, Ж.Т. Жусубалиев // Электричество. – 1992. – № 8. – С. 47–53.

5. Алейников О.А. Исследование локальной устойчивости периодических режимов в нелинейных импульсных системах / О.А. Алейников, В.С. Баушев, А.В. Кобзев, Г.Я. Михальченко // Электричество. – 1991. – № 4. – С. 16–21.

6. Iu H.H.C. Fast-scale instability in a PFC boost converter under average current mode control / H.H.C. Iu, Y. Zhou, C.K. Tse // Int. J. Circuit Theory Appl. – 2003. – Vol. 31, № 6. – P. 611–624.

Михальченко Геннадий Яковлевич
Д-р техн. наук, проф. кафедры промышленной электроники ТУСУРа
Тел.: (382-2) 41-32-32
Эл. почта: mail@comprel.ru

Малаханов Алексей Алексеевич
Канд. техн. наук, доцент кафедры электронных, радиоэлектронных и электротехнических систем Брянского гос. тех. университета
Тел.: (483-2) 56-36-02
Эл. почта: aep@bitmcnit.bryansk.ru

G.Ya. Mikhalchenko, A.A. Malakhanov
Mathematical model of single-phase power factor corrector

A numerically-analytical model of the single-phase power factor corrector, which is based on the single-cycle voltage increasing type converter, is presented. The possibility of dynamics research of the closed loop regulation system is analyzed. Tendencies in changes of the energy characteristics of a converter are evaluated for sorting choice of passive components parameters.
Key words: corrector of a power factor, pulse-width modulation, partially-linear differential equations, bifurcation analysis, power indicators.