УДК 621.396:621.391.24

О.В. Стукач

Дифференциально-тейлоровская минимизация зависимости времени фронта импульсного отклика от амплитуды воздействия в нелинейной цепи

Обсуждается общая проблема оптимизации нелинейных цепей по критерию сигнально-параметрической инвариантности. На основе классических соотношений теории инвариантности и дифференциально-тейлоровского преобразования определены условия минимальной зависимости временных параметров отклика нелинейной цепи от амплитуды входного импульсного воздействия. Введено понятие дефекта инвариантности и получены формулы для его расчёта. На основе этих соотношений рассмотрена задача оптимизации параметров нелинейной цепи по критерию минимума зависимости времени фронта отклика от амплитуды сигнала.
Ключевые слова: дифференциальный оператор, вариационная задача, инвариантность, импульсная цепь.

Создание устройств, характеристики которых слабо зависят от воздействий и внешних факторов, является одной из важнейших проблем в современной радиотехнике. Известно множество подходов к параметрическому синтезу таких устройств, но существенного прогресса в решении проблемы пока нет. В статье рассматривается одна из задач – проблема обеспечения минимума зависимости временных параметров, в частности времени задержки отклика нелинейной цепи от амплитуды входного импульса. Рассматривается мера такой зависимости, называемая дефектом инвариантности, и исследуется его использование как критерия оптимальности.

В классической теории инвариантности [1] изучались условия минимальной зависимости отклика системы от воздействия. Незавершённость этой теории связана с тем, что инвариантность параметров отклика от каких-либо параметров воздействий оказалось абсолютно не исследованной. Это ограничило класс рассматриваемых систем только системами автоматического регулирования. Между тем расширение классических представлений теории инвариантности на нелинейные электрические цепи приводит к решению актуальной задачи линеаризации любых нелинейных устройств.

Для решения задачи оптимального синтеза первостепенное значение имеет поиск условий нечувствительности параметров отклика к амплитуде воздействия. Найдём эти условия для времени фронта импульсного отклика.

Математическую модель нелинейной цепи представим в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dx_i / dt = x_i' = f_i(x,u), \\ x_i(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

где x_i – фазовые координаты, $i = \overline{1;n}$; n – число фазовых координат или порядок системы; f_i – в общем случае нелинейные функции; u – входное воздействие.

Воспользуемся дифференциально-тейлоровским преобразованием, определяемым в работе [2] как

$$X(k) = \frac{H^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]_{t=0} \leftrightarrow x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^k X(k), \tag{2}$$

где слева от символа $\leftrightarrow$ стоит прямое преобразование оригинала $x(t) \in \mathbf{R}^n$ в изображение $X(k) \in \mathbf{R}^n$, а справа – обратное преобразование $X(k)$ в $x(t)$, где $t \in [0, H]$ – непрерывное время; H – коэффициент; $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ – дискретный аргумент. Значения функции $X(k)$ при конкретных значениях аргумента $k \in \mathbf{N}^n$ называются дискретами: $X(0)$ – нулевая дискрета, $X(1)$ – первая дискрета и т.д. Для дифференциального преобразования операция дифференцирования оригинала определена в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow \frac{(k+1)}{H} X(k+1), \tag{3}$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

а произведение оригиналов представляет собой дискретную свертку изображений:

$$x(t)y(t) \leftrightarrow \sum_{l=0}^{l=k} X(k-l)Y(l)\,.$$

С учётом (3) соотношение (1) преобразуется в спектральную модель следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{(k+1)}{H} X_i(k+1) = F_i[X(i), E\sigma(k), H], \\ X_i(0) = x_i(0), \end{cases} \tag{4}$$

где F_i – изображение f_i; E – амплитуда входного импульсного воздействия u=$E1(t)$; $\sigma(k)$ – изображение единичной функции:

$$\sigma(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Из рекуррентного соотношения (4) последовательно определяются дискреты фазовых координат:

$$X_i(k) = EH^k Y_i(k, A, E)/k!\,, \tag{5}$$

где A – функции параметров цепи; Y_k – некоторые функции, не зависящие от E при условии линейности цепи. Согласно формуле (2), из (5) находим:

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Et^k Y_i(k, A, E)/k!$$

Время задержки импульса t_z определим по уровню $x(t_z) = 0{,}5E$:

$$0{,}5 = \sum_{k=0}^{\infty} t_z{}^k Y_i(k, A, E)/k!\,,$$

откуда непосредственно следует условие инвариантности времени задержки к амплитуде. Для того чтобы нелинейная электрическая цепь была инвариантной к E, функции Y_k не должны содержать E:

$$Y_i[X_i(k), H, E] = k!X_i(k)/(EH^k) = Y_i[X_i(k), H]\,. \tag{6}$$

По аналогии можно показать, что выполнение этого соотношения необходимо для любых временных параметров импульсного отклика, например для времени фронта $t_ф = t_2 - t_1$, где t_1 и t_2 – моменты времени, в которых $x(t)$ равно $0{,}1E$ и $0{,}9E$ соответственно. Условие (6) является необходимым, но недостаточным, так как функции Y_k в случае слабой нелинейности цепи не зависят от E, но будет достигаться только слабая инвариантность.

Для цепей со слабой нелинейностью получить решение задачи инвариантности времени задержки можно путём оптимизации. Функция цели представляет собой дефект инвариантности

$$\varepsilon = \max_E \left| \frac{t_z - t_{zl}}{t_{zl}} \right| \to \min\,, \tag{7}$$

где t_z и t_{zl} – соответственно время задержки откликов нелинейной цепи (1) и гипотетической линейной цепи, в качестве которой целесообразно использовать (1) при условии a_j=const, что автоматически решает задачу линеаризации.

Если топология нелинейной цепи задана, уменьшения дефекта инвариантности можно достичь изменением параметров цепи. Для этого может быть использовано условие инвариантности (6). В случае известного дифференциального уравнения цепи решение часто можно получить в аналитическом виде. Особенно этот метод эффективен для цепей с сильной нелинейностью, что не позволяют другие известные методы.

Например, рассмотрим простейший последовательный колебательный RLC-контур с нелинейностью

$$C = C_0 / \sqrt{1 + x_1}\,, \tag{8}$$

где x_1 – напряжение на конденсаторе. Поиск условия инвариантности времени задержки импульса к амплитуде для такой нелинейности имеет самостоятельное значение для оптимизации параметров входной цепи импульсных транзисторных усилителей, поскольку нелинейная функция входной емкости транзистора хорошо аппроксимируется выражением (8). Полученную методами теории цепей систему дифференциальных уравнений для

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

контура

$$\begin{cases} C_0 x_1' = x_2\sqrt{1+x_1}, \\ L x_2' = E - x_1 - R x_2, \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

запишем в спектральной форме:

$$\begin{cases} C_0(k+1)X_1(k+1)/H = \sum_{l=0}^{k} X_2(k-l)D(l), \\ L(k+1)X_2(k+1)/H = E\sigma(k) - X_1(k) - RX_2(k), \\ X_1(0) = 0, X_2(0) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где $D(l)$ – дискреты функции $\sqrt{1+x_1}$.

Подставляя последовательно k = 0, 1, 2 … в (10), находим дискреты:

$$X_1(1) = 0\,, \quad X_2(1) = EH/L = EHY_2(1)\,, \quad X_1(2) = EH^2/(2!LC_0) = EH^2/2!Y_1(2)\,,$$

$$X_2(2) = -REH^2/(2!L^2) = EH^2/2!Y_2(2)\,, \quad X_1(3) = -REH^3/(3!L^2C_0) = EH^3/3!Y_1(3)\,,$$

$$X_2(3) = EH^3(R^2C_0 - L)/(3!C_0^2L^3) = EH^3/3!Y_2(3)$$

и т.д. Видим, что даже для цепи второго порядка аналитический расчет дискрет довольно сложен. Компьютерный расчет дискрет, например по программе из работы [3], предпочтительнее.

Легко показать, что функции $Y_i = k!X_i(k)/(EH^k)$ для линеаризованного контура ($C = C_0$) не зависят от E, что доказывает его инвариантность. Функции Y_i исходного нелинейного уравнения (10) зависят от E. Учитывая, что решение по дискретам восстанавливается с помощью формулы (2), видим, что для получения условий инвариантности интерес представляют первые дискреты, так как они вносят наибольший вклад в общую сумму. Например, при k = 3 получаем $R = L$ (слабая инвариантность), при k=4 имеем равенство $R^2C_0 = EL$ и т.д. Практическая нереализуемость получаемых условий вызвана простотой системы.

Сложность численно-аналитического подхода к решению задачи сигнально-параметрической инвариантности требует разработки численных методов оптимизации по критерию минимума дефекта инвариантности. Один из подходов связан с использованием формулы для вариации функционала [4].

Введём новое переменное $x_{n+1} = t$ и добавим к системе (1) еще одно уравнение

$$x_{n+1}' = 1 \quad (11)$$

с начальным условием $x_{n+1}(0) = T_0$. Пусть имеется две фазовых траектории системы (1). Первая $x(t)$ соответствует начальным условиям $x(T_0) = x_0$ и амплитуде сигнала E, вторая $x_m(t)$ соответствует начальным условиям $x_{m0} = x_0 + \Delta x_0$, $T_{m0} = T_0 + \Delta T_0$, $E_m = E + \Delta E$. Тогда разность этих траекторий может быть вычислена с помощью формул [4]:

$$\Delta x(t) = x_m(t) - x(t) = -(\rho(T_0), \Delta x_0) + G(x, \rho, Ef(t), T_0)\Delta T_0 - \int_{T_0+\Delta T_0}^{T+\Delta T} \left[G(x, \rho, E+\Delta E, t) - G(x, \rho, E, t)\right]dt, \quad (12)$$

где G – гамильтониан

$$G(x, \rho, E) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(t) f_i(x, E, x_{n+1}) + \rho_{n+1}(t)\,, \quad (13)$$

ρ – вектор сопряжённых переменных, определяемый вдоль траектории $x(t)$ как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \rho_i'(t) = -\sum_{j=1}^{n} \rho_j \partial f_j / \partial x_i, i = \overline{1,n}; \rho(T) = 0, \\ \rho_{n+1}'(t) = -\partial G / \partial t. \end{cases} \quad (14)$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Таким образом, имеем вариационную задачу поиска такой амплитуды E, удовлетворяющей уравнениям (1) и (11), чтобы в некоторый момент времени T_1 достигался минимум (7). Согласно принципу максимума [5], для того чтобы значение E было оптимальным в смысле постановки задачи, необходимо существование такой сопряжённой функции ρ (14), что для всех $T_0 \le t \le T_1$ амплитуда E доставляет экстремальное значение гамильтониану (13). В случае минимума будут найдены область сильной инвариантности, где $t_z = t_{zl}$, и соответствующая ей амплитуда, а в случае максимума – наибольший дефект инвариантности. Использование вариационного подхода существенно упрощает поиск оптимальных параметров, так как интегрирования исходного дифференциального уравнения (1) в диапазоне амплитуд входного импульсного сигнала не требуется.

В качестве примера проведём численную минимизацию относительного отклонения $(t_z - t_{zl})/t_{zl}$ времени задержки импульсного отклика нелинейной системы (9) от времени задержки линеаризованной системы по критерию инвариантности к амплитуде входного импульсного воздействия. Система уравнений (9) решалась методом Рунге–Кутта четвёртого порядка для $E \in [0;5]$ В. Из рис. 1 видно, что для параметров $L = 3$ Гн, $C_0 = 0{,}5$ Ф, $R = 2$ Ом (график *3*) дефект инвариантности равен ε = 0,15, и для данных параметров цепи сильная инвариантность достигается только в случае слабого сигнала. Для параметров $L = 2$ Гн, $C_0 = 1{,}5$ Ф, $R = 2$ Ом (график *1*) и $L = 3$ Гн, $C_0 = 2$ Ф, $R = 1$ Ом (график *2*) дефект инвариантности ε = 0,1 меньше, чем в предыдущем случае. Кроме того, на графике *1* имеется область сильной инвариантности при $E = 2{,}6$ В. Таким образом, при данных параметрах время задержки импульса в нелинейной цепи слабо зависит от амплитуды воздействия, а цепь сильно нелинейна.

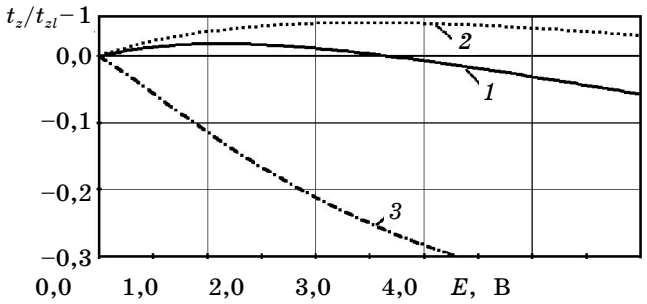

Рис. 1. Зависимость относительного отклонения времени задержки импульса в нелинейной цепи от амплитуды воздействия

Таким образом, в статье рассмотрено свойство инвариантности временных параметров отклика нелинейной цепи к амплитуде импульсного сигнала. Теоретической основой для решения задачи оптимизации параметров цепи является аналитическая формулировка условий абсолютной инвариантности, точное выполнение которых позволяет выявить предельные свойства анализируемой цепи.

Получены соотношения для расчёта дефекта инвариантности и рассмотрены способы его уменьшения. Дефект инвариантности дает количественную оценку того, насколько неинвариантными к амплитуде воздействия являются временные параметры отклика нелинейной цепи. Показано существование амплитуд входных сигналов, при которых достигается минимальный дефект инвариантности. На основе вариационного подхода предложен алгоритм их поиска и оптимизации параметров нелинейной цепи по критерию минимальности дефекта инвариантности.

В математические формулировки условий инвариантности нелинейной цепи входят начальные условия и амплитуда сигнала. Очевидно, что для управления непрерывными процессами необходимо сохранение инвариантных свойств в широком диапазоне амплитуд. Это говорит о необходимости продолжения исследований по инвариантности временных параметров нелинейных цепей.

Литература

1. Г.В. Щипанов и теория инвариантности: труды и документы / Сост. З.М. Лезина, В.И. Лезин. – М.: Физматлит, 2004. – 427 с. – (Яркие страницы истории и науки).

2. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наук. думка, 1986. – 157 с.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

3. Стукач О.В. Моделирование физических процессов с использованием дифференциально-чебышёвских преобразований / О.В. Стукач, Е.Д. Головин // Изв. Том. политех. ун-та. – 2003. – № 2. – Т. 306. – С. 12–15.

4. Величенко В.В. О вариационном методе в проблеме инвариантности управляемых систем // Автоматика и телемеханика. – 1972. – № 4. – С. 22–35.

5. Розоноэр Л.И. Вариационный подход к проблеме инвариантности систем автоматического управления // Автоматика и телемеханика. – 1963. – Т. 24, № 6. – С. 744–756; № 7. – С. 861–870.

6. Stoukatch O.V. Parametrical Invariance of Overcontrol in Control Systems // Proceedings of the third International Symposium «Application of the Conversion Research Results for International Cooperation SIBCONVERS'99», Tomsk. – May 18–20, 1999. Tomsk, 1999. – P. 265–267.

Стукач Олег Владимирович
Доцент Томского политехнического университета
Тел.: (3822) 42-11-41
Эл. почта: tomsk@ieee.org

O.V. Stukach

Differential-Taylor minimization of dependence of the pulse response rise-time on effect amplitude in a nonlinear circuit

The general problem of nonlinear circuit optimization by criterion of signal-parametrical invariance is discussed. Conditions of the minimal dependence of time parameters of a nonlinear circuit response on pulse impact amplitude are determined on the basis of classical ratios of the invariance theory and differential transformation. The defect of invariance concept is established and formulas for its calculation are obtained. Based on these relations, the problem of parameters optimization of a nonlinear circuit by criterion of minimum of dependence of the pulse response rise-time on impact amplitude is considered.

Key words: differential operator, variation problem, disturbance decoupling, invariance, pulse circuit.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)