УДК 621.3+519.24

Е.Ю. Копытов, А.А. Любченко

Оценка периодичности профилактического обслуживания технических систем на основе модели полумарковского процесса

Разработана математическая модель определения рациональной периодичности профилактического обслуживания технических систем на основе полумарковских случайных процессов, учитывающая ошибки диагностирования первого и второго рода и ошибки обслуживающего персонала. Предложена методика оценки рациональной периодичности обслуживания технических систем на основе функционалов готовности и технического использования.

Ключевые слова: моделирование, математическая модель, надежность, комплексные показатели надежности, техническое обслуживание.

Поддержание исправного и работоспособного состояния технических средств на этапе их эксплуатации осуществляется путем технического обслуживания (ТО) и ремонта. Своевременный ремонт и ТО технических средств предотвращают отказы и повышают надежность и эффективность их использования. Наоборот, преждевременное или с опозданием ТО и ремонт уменьшают надежностные характеристики технических средств [1]. В силу этого определение рациональной периодичности ТО и ремонта отдельных узлов и подсистем технических средств по отдельным параметрам является одной из основных составляющих обеспечения надежности при эксплуатации.

Разработка математической модели. В основе моделирования лежит теория цепей Маркова. В исследовании надежности изделий, содержащих электронные компоненты, теория полумарковских процессов получила весьма широкое применение, поскольку появляется возможность введения произвольной функции распределения времени наработки на отказ и времени восстановления [2, 3].

Граф состояний рассматриваемой системы, в которой присутствуют ошибки диагностирования первого и второго рода, представлен на рис. 1.

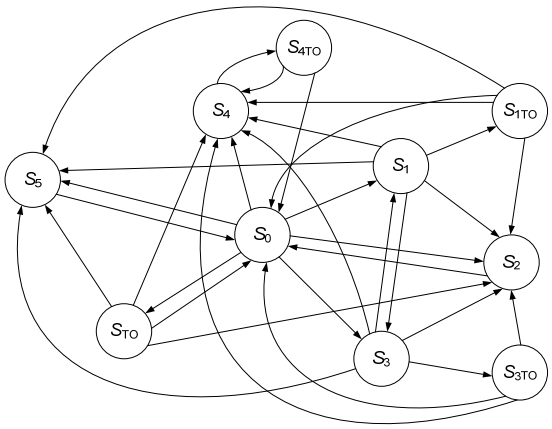

Рис. 1. Граф состояний системы

Ошибка диагностирования первого рода (α) – это вероятность признать исправный объект неисправным, а ошибка диагностирования второго рода (β) – это вероятность признать неисправный объект исправным. На графе обозначены состояния, в которых может находиться система: S_0 – работоспособное; S_1 – защитное; S_2 – опасного отказа; S_3 – разрегулированное; S_4 – скрытого отказа; S_5 – ложного отказа; $S_{\text{ТО}}$ – технического обслуживания исправной системы; $S_{1\text{ТО}}$ – восстановления системы, находящейся в защитном состоянии; $S_{3\text{ТО}}$ – восстановления разрегулированной системы; $S_{4\text{ТО}}$ – восстановления при скрытом отказе.

Начальным состоянием системы является исправное и работоспособное состояние S_0. Через случайное время τ в системе может произойти опасный отказ, который с вероятностью $(1-\beta_1)\cdot F_{02}(\tau)$ будет обнаружен, и система перейдет в состояние S_2. Если отказ не будет обнаружен встроенной аппаратурой диагностики, то система с вероятностью $\beta_1 \cdot F_{02}(\tau)$ перейдет в состояние скрытого отказа S_4. В этом состоянии система будет находиться до момента времени $\tau = T$, равного периоду ТО, после чего с вероятностью, равной единице, перейдет в состояние ТО при скрытом отказе $S_{4\text{ТО}}$. Если за время восстановления системы отказ будет обнаружен, тогда система с вероятностью $(1-\beta_2)$ будет переведена в работоспособное состояние. В случае необнаружения скрытого

отказа система с вероятностью β_2 вернется в состояние S_4 и будет там находиться до следующего технического обслуживания.

Спустя случайное время τ в системе может произойти защитный отказ, тогда она с вероятностью $[1-F_{02}(\tau)]\cdot[1-F_{03}(\tau)]\cdot F_{01}(\tau)$ перейдет в состояние S_1. В этом состоянии система может обеспечивать функционирование в течение времени оповещения об отказе ($t_{\text{о}}$) и доставки обслуживающего персонала к отказавшему объекту ($t_{\text{д}}$). Из защитного состояния S_1 система с вероятностью $(1-\alpha_1)\cdot[1-F_{12}(\tau)]\cdot[1-F_{13}(\tau)]$ перейдет в состояние восстановления при защитном отказе $S_{1\text{ТО}}$ в случае отсутствия ложных и опасных отказов. За время нахождения в состоянии S_1 в системе может произойти опасный отказ, и она с вероятностью, равной $(1-\beta_1)\cdot F_{12}(\tau)$, перейдет в состояние S_2, а в случае необнаружения опасного отказа – в состояние S_4 с вероятностью $\beta_1\cdot F_{12}(\tau)$.

На интервале времени $0\le\tau<T$ в системе может произойти разрегулировка – выход одного или нескольких параметров за пределы допустимых значений, при этом ухудшается качество выполняемых системой функций. Система при этом из исправного состояния перейдет с вероятностью $[1-F_{02}(\tau)]\cdot[1-F_{01}(\tau)]\cdot F_{03}(\tau)$ в состояние S_3. Если за это время не произошел опасный отказ, то система в момент времени $\tau=T$ перейдет в состояние ТО при разрегулировке $S_{3\text{ТО}}$ с вероятностью $(1-\alpha_1)\cdot[1-F_{32}(\tau)]\cdot[1-F_{31}(\tau)]$. В случае возникновения опасного отказа система перейдет в состояние S_2 с вероятностью, равной $(1-\beta_1)\cdot F_{32}(\tau)$, а если отказ не будет обнаружен – перейдет в состояние S_4 с вероятностью $\beta_1\cdot F_{32}(\tau)$.

Если за время, равное периоду технического обслуживания T, в системе не произошло отказов и разрегулировок, то она с вероятностью, равной $(1-\alpha_1)\cdot[1-F_{01}(\tau)]\cdot[1-F_{02}(\tau)]\cdot[1-F_{03}(\tau)]$, перейдет в состояние ТО исправной системы $S_{\text{ТО}}$. За время ТО действия обслуживающего персонала могут вызвать в системе отказ, и она с вероятностью $(1-\beta_2)\cdot F_{\text{ТО}}(t_{\text{ТО}})$ перейдет в состояние опасного отказа S_2, а если отказ не будет зарегистрирован, то с вероятностью $\beta_2\cdot F_{\text{ТО}}(t_{\text{ТО}})$ система перейдет в состояние скрытого отказа S_4. Кроме того, система может перейти в состояние ложного отказа S_5 с вероятностью, равной $\alpha_2\cdot[1-F_{\text{ТО}}(t_{\text{ТО}})]$. Если за время выполнения работ по восстановлению в систему не было внесено отказа, то она с вероятностью $(1-\alpha_2)\cdot[1-F_{\text{ТО}}(t_{\text{ТО}})]$ возвращается в исправное состояние S_0 и начинается ее эксплуатация по новому циклу.

Учет ошибок обслуживающего персонала с помощью функции $F_{\text{ТО}}(\tau)$ позволяет повысить соответствие исследуемой системы реальному процессу технического обслуживания. Выделение в системе состояний ложного и скрытого отказов обусловлено наличием ошибок диагностирования первого и второго рода встроенной аппаратуры диагностики (АД) при работе системы и внешней АД – при техническом обслуживании.

Определение времени нахождения системы в различных состояниях. На основании описания графа состояний и методики, изложенной в [2, 4], составляется матрица переходных вероятностей P, здесь не приводится из-за большой ее размерности. Далее определяются значения истинного $\omega_i(T)$ и наблюдаемого $\nu_i(T)$ времени нахождения в S_i-х состояниях. Истинное время нахождения в состоянии S_i определяется из выражения [4]:

$$\omega_i(T)=\sum_j p_{ij}\int_0^T \tau_{ij}\,dF_{ij}(\tau_{ij}), \qquad (1)$$

где p_{ij} – вероятность перехода из рассматриваемого состояния; τ_{ij} – время пребывания системы в этом состоянии; $F_{ij}(\tau_{ij})$ – функция распределения для одного шага процесса.

Для определения истинного времени нахождения системы в состоянии S_0 записываются выражения для тех состояний системы, в которые она может перейти из работоспособного состояния S_0, затем определяются функции распределения для одного шага процесса (вероятности переходов в каждое из состояний) [4]. После всех преобразований получаем:

$$\omega_0(T)=\int_0^T \tau d\left[1-F_{02}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{03}(\tau)\right]\cdot F_{01}(\tau)+(1-\beta_1)\cdot\int_0^T \tau dF_{02}(\tau)+\beta_1\cdot\int_0^T \tau dF_{02}(\tau)+$$

$$+\int_0^T \tau d\left[1-F_{02}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{01}(\tau)\right]\cdot F_{03}(\tau)+\alpha_1\cdot\int_0^T \tau d\left[1-F_{02}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{03}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{01}(\tau)\right]+$$

$$+(1-\alpha_1)\cdot\left[1-F_{02}(T)\right]\cdot\left[1-F_{03}(T)\right]\cdot\left[1-F_{01}(T)\right]T. \quad (2)$$

Выражение $\int_0^T \tau_{ij} dF_{ij}(\tau_{ij})$ является интегралом Стилтьеса. Взять этот интеграл можно путем интегрирования по частям [5]. После преобразований получаем:

$$\omega_0(T)=\left[1-F_{02}(T)\right]\cdot T\cdot(1-F_{01}(T)\cdot F_{03}(T)+\frac{F_{02}(T)}{1-F_{02}(T)})-\int_0^T\left[1-F_{02}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{03}(\tau)\right]\cdot F_{01}(\tau)d\tau+\int_0^T F_{02}(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^T(\left[1-F_{02}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{01}(\tau)\right]\cdot F_{03}(\tau))d\tau+\alpha_1\cdot\int_0^T(\left[1-F_{02}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{03}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{01}(\tau)\right])d\tau. \quad (3)$$

Аналогичным образом определяем значение истинного времени нахождения системы в состоянии защитного отказа S_1:

$$\omega_1(T)=(t_{\text{о}}+t_{\text{д}})-\int_0^{t_{\text{о}}+t_{\text{д}}} F_{12}(\tau)-\int_0^{t_{\text{о}}+t_{\text{д}}}\left[1-F_{12}(\tau)\right]\cdot F_{13}(\tau)d\tau-\alpha_1\int_0^{t_{\text{о}}+t_{\text{д}}}\left[1-F_{12}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{13}(\tau)\right]d\tau.. \quad (4)$$

Определим истинное время нахождения системы в состоянии разрегулировки S_3:

$$\omega_3(T)=T-\int_0^T F_{32}(\tau)d\tau+\int_0^T\left[1-F_{32}(\tau)\right]\cdot F_{31}(\tau)d\tau-\alpha_1\cdot\int_0^T\left[1-F_{32}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{31}(\tau)\right]d\tau. \quad (5)$$

Время нахождения системы в состоянии ложного отказа S_4 будет определяться составляющими времени восстановления в соответствии с технологическим процессом обслуживания. За это время будет устранен ложный отказ.

$$\omega_5(T)=t_{\text{в.л}}, \quad (6)$$

где $t_{\text{в.л.}}$ – время устранения ложного отказа.

Наблюдаемое время обусловлено наличием ошибок диагностирования и определяется аналогично $\omega_i(T)$ для всех состояний, в которых находится система, по следующей формуле [4]:

$$\nu_i(T)=\sum_j p_{ij}\int_0^\infty \tau_{ij} dF_{ij}(\tau_{ij}). \quad (7)$$

Наблюдаемое время нахождения системы в состоянии S_0:

$$\nu_0(T)=\left[1-F_{02}(T)\right]\cdot T\cdot(1-F_{01}(T)\cdot F_{03}(T)+\frac{F_{02}(T)}{1-F_{02}(T)})-$$

$$-\int_0^T\left[1-F_{02}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{03}(\tau)\right]\cdot F_{01}(\tau)d\tau+\int_0^T F_{02}(\tau)d\tau+\int_0^T(\left[1-F_{02}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{01}(\tau)\right]\cdot F_{03}(\tau))d\tau+$$

$$+\alpha_1\cdot\int_0^T(\left[1-F_{02}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{03}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{01}(\tau)\right])d\tau+\beta_1\cdot\int_0^T F_{02}(\tau)d\tau. \quad (8)$$

Наблюдаемое время нахождения в состоянии S_1:

$$\nu_1(T)=(t_{\text{о}}+t_{\text{д}})-\int_0^{t_{\text{о}}+t_{\text{д}}} F_{12}(\tau)-\int_0^{t_{\text{о}}+t_{\text{д}}}\left[1-F_{12}(\tau)\right]\cdot F_{13}(\tau)d\tau-\alpha_1\int_0^{t_{\text{о}}+t_{\text{д}}}\left[1-F_{12}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{13}(\tau)\right]d\tau+\beta_1\cdot\int_0^{t_{\text{о}}+t_{\text{д}}} F_{12}(\tau)d\tau. \quad (9)$$

Наблюдаемое время нахождения системы в состоянии опасного отказа S_2 определяется составляющими времени восстановления $t_{\text{в}}$:

$$\nu_2(T)=t_{\text{в}}. \quad (10)$$

Определим наблюдаемое время нахождения в состоянии разрегулировки S_3:

$$\nu_3(T)=T-\int_0^T F_{32}(\tau)d\tau+\int_0^T\left[1-F_{32}(\tau)\right]\cdot F_{31}(\tau)d\tau-\alpha_1\cdot\int_0^T\left[1-F_{32}(\tau)\right]\cdot\left[1-F_{31}(\tau)\right]d\tau+\beta_1\cdot\int_0^T F_{32}(\tau)d\tau. \quad (11)$$

Наблюдаемое время нахождения системы в состояниях скрытого и ложного отказа равны соответственно:

$$\nu_4(T)=T; \quad (12)$$

$$\nu_5(T)=t_{\text{в.л}}. \quad (13)$$

В состоянии скрытого отказа S_4 наблюдаемое время равно периоду эксплуатации системы – T, так как встроенная система диагностики не способна выявить отказы подобного типа.

Определим наблюдаемое время нахождения системы в состоянии $S_{\text{ТО}}$:

$$\nu_{\text{ТО}}(T)=(1-\alpha_2)\cdot\int_0^{t_{\text{ТО}}}\left[1-F_{\text{ТО}}(\tau)\right]\cdot d\tau+\beta_2\cdot\int_0^{t_{\text{ТО}}}F_{\text{ТО}}(\tau)\cdot d\tau. \quad (14)$$

Аналогично определяем наблюдаемое время для состояний $S_{1\text{ТО}}$ и $S_{3\text{ТО}}$:

$$\nu_{1\text{ТО}}(T)=(1-\alpha_2)\cdot\int_0^{t_{\text{в}}-t_{\text{о}}-t_{\text{д}}}\left[1-F_{\text{ТО}}(\tau)\right]\cdot d\tau+\beta_2\cdot\int_0^{t_{\text{в}}-t_{\text{о}}-t_{\text{д}}}F_{\text{ТО}}(\tau)\cdot d\tau. \quad (15)$$

Наблюдаемое время для состояния $S_{3\text{ТО}}$:

$$\nu_{3\text{ТО}}(T)=(1-\alpha_2)\cdot\int_0^{t_{\text{ТО}}}\left[1-F_{\text{ТО}}(\tau)\right]\cdot d\tau+\beta_2\cdot\int_0^{t_{\text{ТО}}}F_{\text{ТО}}(\tau)\cdot d\tau. \quad (16)$$

Наблюдаемое время для состояния $S_{4\text{ТО}}$:

$$\nu_{4\text{ТО}}(T)=\text{t}_{\text{ТО}}. \quad (17)$$

Таким образом, были определены истинное и наблюдаемое времена нахождения системы в различных состояниях. Рассмотрим применение полученных функций для расчета показателей надежности – функционалов готовности и технического использования.

Функционал готовности определяется через отношение времени нахождения системы в состояниях, приносящих доход, к общему наблюдаемому времени нахождения системы во всех состояниях, кроме ТО исправной системы и ТО при скрытом отказе.

$$K_{\text{г}}(T)=\frac{\pi_0(T)\cdot\omega_0(T)+\pi_1(T)\cdot\omega_1(T)+\pi_3(T)\cdot\omega_3(T)+\pi_5(T)\cdot\omega_5(T)}{\sum_{i=1}^{5}[\pi_i(T)\cdot\nu_i(T)]}, \quad (18)$$

где $\pi_i(T)$ – финальные вероятности цепей Маркова (они характеризуют долю времени, в течение которого устройство находится в S_i-м состоянии), количественное значение $\pi_i(T)$ определяется из решения системы уравнений [4]:

$$\begin{cases}\pi=\pi\cdot P,\\ \sum\pi_i=1.\end{cases} \quad (19)$$

Функционал технического использования можно определить как отношение суммарного истинного времени нахождения системы в состояниях, приносящих доход, к общему наблюдаемому времени эксплуатации системы, состоящему из интервалов работы, восстановления и технического обслуживания:

$$K_{\text{т.и.}}(T)=\frac{\pi_0(T)\cdot\omega_0(T)+\pi_1(T)\cdot\omega_1(T)+\pi_3(T)\cdot\omega_3(T)+\pi_5(T)\cdot\omega_5(T)}{\sum_{i=1}^{N}[\pi_i(T)\cdot\nu_i(T)]}, \quad (20)$$

где N – общее количество состояний, в которых может находиться система в процессе эксплуатации.

Результат моделирования. Пример моделирования зависимостей $K_{\text{г}}(\alpha, \beta, T)$ и $K_{\text{т.и.}}(\alpha, \beta, T)$ для разработанной модели выполнен с помощью ЭВМ в среде MathCAD 14.0 и представлен на рис. 2.

Периодичность профилактического обслуживания необходимо выбирать, руководствуясь определенными критериями. Необходимо обеспечить наибольшее значение функционала готовности, с одной стороны, и, с другой стороны, максимально возможный период ТО для экономии средств на

его проведение. При малом периоде ТО значение функционала готовности близко к единице и позволяет обеспечить высокий уровень готовности системы, но слишком частое проведение проверок ведет к неоправданному увеличению затрат.

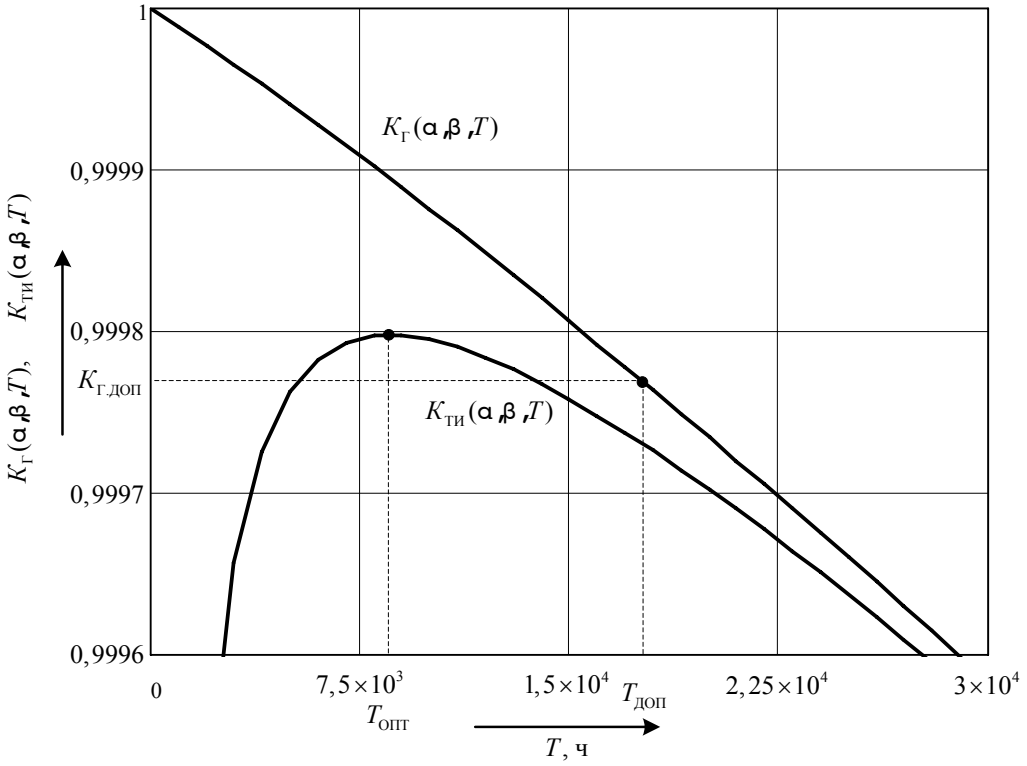

Рис. 2. Результат моделирования зависимостей $K_{\text{г}}(\alpha, \beta, T)$ и $K_{\text{т.и}}(\alpha, \beta, T)$

Для удовлетворения указанных выше требований периодичность ТО можно определить исходя из следующего условия [2]:

$$T_{\text{опт}} < T_{\text{рац}} < T_{\text{доп}}. \qquad (21)$$

Значение $T_{\text{опт}}$ выбирается в точке экстремума функционала $K_{\text{т.и}}(\alpha, \beta, T)$. Чтобы указать ограничение периодичности ТО сверху, необходимо знать допустимое значение $K_{\text{г.доп}}(\alpha, \beta, T)$. Оно может быть определено экспертным методом путем сравнения установившегося значения периодичности ТО для систем-аналогов или с помощью математического моделирования.

Заключение. Разработана математическая модель процесса ТО технических систем на основе полумарковских случайных процессов, устанавливающая зависимость функционалов $K_{\text{г}}(\alpha,\beta,T)$ и $K_{\text{т.и}}(\alpha, \beta, T)$ от основных влияющих факторов: свойств аппаратуры, технического обслуживания, квалификации обслуживающего персонала, ошибок диагностирования первого и второго рода, временных параметров проверки аппаратуры и устранения отказов. Модель позволяет рассчитывать время пребывания изделий в состояниях: исправном, защитном, разрегулированном, опасном, технического обслуживания, восстановления, скрытого и ложного отказов. Полученные показатели позволили определить рациональную периодичность ТО технических систем. Применение реализованной модели возможно на этапах разработки и проектирования технических систем для обеспечения высоких показателей надежности и эффективности их эксплуатации.

Литература

1. Острейковский В.А. Теория надежности: учеб. для вузов / В.А. Острейковский. – М.: Высш. шк., 2003. – 463 с.

2. Держо Г.Г. Организация технического обслуживания электронных устройств на железнодорожном транспорте: учеб. пособие / Омский ин-т инж. ж.-д. трансп. – Омск, 1993. – 47 с.

3. Тихонов В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.

4. Герцбах И.Б. Модели профилактики. – М.: Сов. радио, 1959. – 216 с.
5. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

Копытов Евгений Юрьевич
Аспирант каф. «Радиотехнические и управляющие системы» ОмГУПСа
Тел.: 8-962-039-90-62
Эл. почта: jenya87@list.ru

Любченко Александр Александрович
Аспирант каф. «Радиотехнические и управляющие системы» ОмГУПСа
Тел.: 8-960-998-97-04
Эл. почта: lyubchenko@mail.ru

Kopytov E.U., Lyubchenko A.A.
Estimation of intervals in maintenance support of technical systems based on the model of semi-Markov process

Mathematical model of maintenance support based on the model of Semi-Markov process was developed. The model takes into account α and β diagnosis errors and errors of maintenance staff. A methodology of estimation of reasonable intervals in maintenance support technical systems is suggested and it is based on the functionality of availability and of technical application.
Keywords: simulation, mathematical model, reliability, composite reliability measures, maintenance support.