УДК 519.8:519.876.5:004.94

Ю.М. Филимонов

Вычисление энтропии системы на основе моделирования динамики субъектов методом Монте-Карло

Рассматривается система субъектов эволюционирующих в ограниченном двухмерном дискретном пространстве с дискретным временем. Динамика субъектов определяется ограниченным набором правил. Начальное распределение субъектов - выборка без возвращения с равновероятными исходами. Методом Монте-Карло вычисляются траектории субъектов. По траекториям вычисляется вероятность обнаружить субъект в каждой точке пространства. По полученным вероятностям вычисляется энтропия системы и сравнивается с энтропией начального распределения.

Рассмотрим систему однородных субъектов, локализованных в двухмерном координатном пространстве. Координаты могут быть только целочисленные. Время дискретное. Динамику субъектов системы определим правилами.

Правило 1. Начальное положение каждого субъекта определяется случайным образом из равномерного распределения. При этом учитывается, что в одной и той же точки пространства может находиться только один субъект. Фактически начальное распределение – это выборка без возвращения. Генеральная совокупность определяется числом точек координатного пространства выделенного для системы. Объем выборки – это число субъектов системы.

Правило 2. Направление скорости определяется из следующих правил:

а) если для субъекта с координатами (x_i, y_i) четыре ближайших точки координатного пространства окажутся свободными, то направление скорости определяется из розыгрыша четырех равновероятных событий – направлений движения: влево, вправо, верх, вниз (рис. 1, *а*). Абсолютное значение скорости постоянное и равно единице;

б) если для субъекта с координатами (x_i, y_i) одна из ближайших точек координатного пространства окажется занятой, то направление скорости определяется из розыгрыша трех равновероятных направлений. Направление движение в сторону занятой точки из розыгрыша исключается (рис. 1, *б*);

в) если для субъекта с координатами (x_i, y_i) две из четырех ближайших точек координатного пространства заняты, то направление скорости определяется из розыгрыша двух равновероятных направлений. Два направления движения, в сторону занятых точек координатного пространства из розыгрыша исключаются (рис. 1, *в*);

г) если для субъекта с координатами (x_i, y_i) три из четырех ближайших точек координатного пространства заняты, то направление скорости определяется направлением в сторону свободной точки пространства (рис. 1, *г*);

д) если заняты все четыре соседние точки пространства, то скорость субъекта полагаем равным нулю;

е) если субъект находится на границе координатного пространства, то его скорость определяется однозначно направлением от границы внутрь.

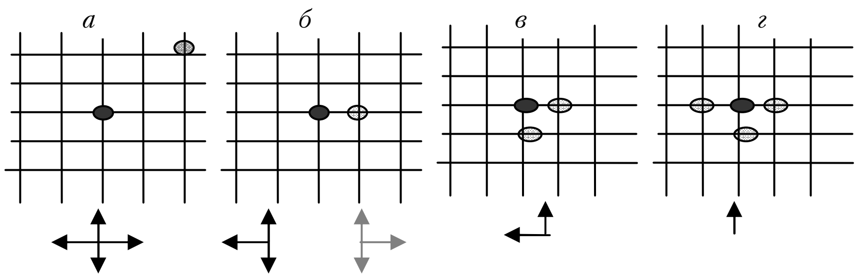

Рис. 1. К вычислению возможных направлений движения субъекта. Стрелки показывают возможные направления скорости

Правило 3. Значение координат субъектов в последующий момент времени вычисляется по формулам:

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) + v_x(t), \\ y(t+1) = y(t) + v_y(t), \end{cases}$$

где $v_x(t)$ и $v_y(t)$ – компоненты скорости субъектов, вычисленные в соответствии с правилом 2.

Для вычисления траекторий субъектов была составлена программа на языке программирования Фортан-90. Расчеты, результаты которых представлены в данной работе, проводились на персональном компьютере с процессором Celeron, тактовой частой от 2,4 ГГц и с оперативной памятью 750 Мб.

Координатное пространство, в котором эволюционирует система, представляет собой $N \times M$ дискретных точек.

$$x_i, i = 1,2,\ldots,N; y_i, i = 1,2,\ldots,M,$$
$$x_1 = x_{\min}, x_N = x_{\max},$$
$$y_1 = y_{\min}, y_M = y_{\max}.$$

В данной работе представлены результаты для случая $N = M = 10$. Вычислялась информационная энтропия системы из K субъектов, где $k = 1, 2, ..., 50$. Вычисление проводились по формуле [1]

$$H = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p(x_i, y_j)\log_2 p(x_i, y_j).$$

Здесь $p(x_i, y_j)$ – вероятность нахождения субъекта в точке с координатами (x_i, y_j). На данном этапе при вычислении скорости частицы учитывались только граничные условия – правило 2е.

Вероятность нахождения субъекта в точке (x_i, y_j) координатного пространства вычислялась по траектории длиной 100000 единиц времени. Для каждого субъекта прослеживалась траектория на протяжении времени $T_{\max} = 100000$ и фиксировались события попадания субъекта в каждую из координат (x_i, y_j). Подсчитывалось число таких событий и делилось на $T_{\max}$. Получали среднее по времени значение попадания субъекта в каждую точку координатного пространства. Полученные средние значения для каждого субъекта складывались. Так, определялась вероятность обнаружения субъекта в точке (x_i, y_j) для одной реализации. Затем разыгрывалось новое начальное распределение, и процесс вычисления повторялся. Для каждого значения k был проведен расчет для 1000 начальных распределений. Результаты всех экспериментов усреднялись. Результаты вычислений представлены на рис. 2. Для сравнения приведен результат расчета энтропии для выборки без возвращения из генеральной совокупности 100 элементов. Расчет проводился по формуле

$$H(k) = \sum_{i=1}^{k} \log_2 \frac{100!}{(100-k)!\cdot k!}.$$

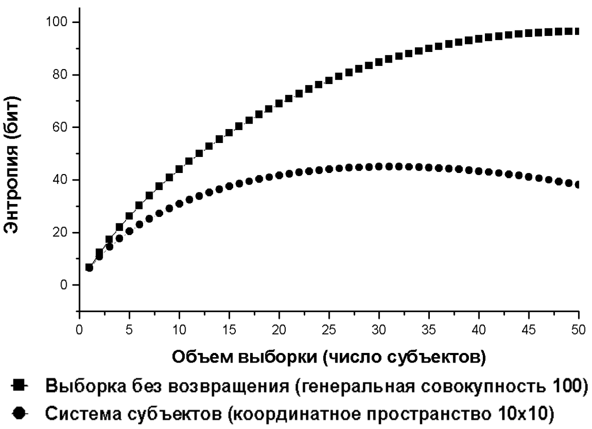

Рис. 2. Энтропия системы субъектов и энтропия эксперимента выборки без возвращения

Энтропия системы субъектов всегда меньше энтропии эксперимента выборки без возвращения за исключением выборки объемом 1. Наличие граничных условий и правил движения, исключающих перемещение по диагонали, приводит к тому, что возможные состояния системы перестают быть равновероятными. Энтропия такой системы должна быть меньше энтропии равновероятной выборки, что и отражают результаты моделирования.

Литература

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973.

Филимонов Юрий Михайлович
ГОУ ВПО Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
К.ф.-м.н., доцент кафедры Комплексной информационной безопасности электронно-вычислительных систем
Эл. почта: ym@security.tomsk.ru

Y.M. Filimonov

The calculating entropy the system on the basis of simulation dynamics a subjects for method Monte-Carlo

The article represents investigate the system a subjects which evolve in the bounded domain. The region coordinates have dimension two are discrete and legal time. The dynamics subjects are determined limited set of rules. The initial state is equiprobable sample without replacement. The trajectories subjects are calculated for method Monte-Carlo. The acquisition probability is calculated on the basis of result simulation trajectories. This probability is used for calculate the entropy system and compare with entropy the initial state.