

УДК 519.23

Т.Д. Карминская, В.З. Ковалев, П.И. Ципорин

## Математическая модель оценки показателей качества деятельности системы однородных объектов

Представлено исследование математической модели оценки показателей качества деятельности системы однородных объектов. Разработана математическая модель на основе информационной энтропии показателей, повышающая объективность оценки качества деятельности однородных объектов.

**Ключевые слова:** математическая модель оценки показателей, информационная энтропия, показатели деятельности системы однородных объектов.

**Постановка задачи оценки показателей деятельности.** В настоящее время на федеральном и региональном уровнях управления при реализации проектов различной направленности зачастую не ставится задача исследования дальнейшей эффективности приложенных управляющих воздействий (увеличение финансирования субъектов управления, оснащение различными новыми технологиями и т.д.). Например, в рамках национальной инициативы «Наша новая школа» организуется централизованное оснащение образовательных учреждений (ОУ) по различным направлениям деятельности во всех регионах РФ. При планировании оснащения конкретный выбор группы ОУ для оснащения определяется на основании метода экспертных оценок [1]. Данная методика выбора является субъективной и не отвечает предъявляемым требованиям по оптимизации управленческой деятельности.

Таким образом, актуальной становится задача построения математической модели оценки показателей качества деятельности системы однородных объектов, которая бы представляла возможность оптимального распределения ресурсов при оснащении систем однородных объектов.

Пусть имеется система из  $m$  ОУ, которые характеризуются  $n$  общими для этих объектов показателями. Обозначим  $B$  – выделенные ресурсы, которые необходимо направить на увеличение показателей. Для случая отсутствия дополнительной информации об исследуемых объектах и их показателях, а также на основе современного подхода к определению значимости каждого из показателей [3], необходимо определить направление использования выделенных ресурсов  $B$ , т.е. определить приоритетные направления увеличения входных показателей таким образом, чтобы на выходе получить наиболее оптимальное увеличение качества деятельности системы однородных объектов.

Выбор показателей сбора информации имеет решающее значение при оценке и оптимизации деятельности системы однородных объектов. Рейтинги различаются по источникам данных и по качеству (важности, весомости) показателей. Поскольку не существует четкой и повсеместно признанной меры качества деятельности системы однородных объектов, любая рейтинговая схема основана на доступном наборе наглядных показателей, каждый из которых характеризует определенный аспект оценки.

**Построение матрицы входных данных.** Введем в рассмотрение вектор показателей деятельности  $X$ , отражающий важнейшие свойства рассматриваемого объекта, где

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T, \quad (1)$$

где  $n$  – число показателей системы;  $X \in R^n$ ;  $R^n$  –  $n$ -мерное евклидово пространство.

Обозначим через  $[a_i, b_i]$  границы изменения показателя  $x_i$ , т.е.  $X \in [A, B]$ , где  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ .

Исходную информацию о системе однородных объектов можно представить в виде следующей матрицы:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь  $X \in R^n$ ;  $t \in R^1$ ;  $R^*$  –  $*$ -мерное евклидово пространство;  $m$  – количество объектов;  $n$  – число показателей для объекта;  $x_{ij}$  – значение  $j$ -го показателя для  $i$ -го объекта;  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $t$  – момент времени, в который строится срез данных.

**Приведение показателей к общей мере качества.** Оперировать с величинами (вычислять суммы, сравнивать друг с другом) можно только тогда, когда они соизмеримы, т.е. сведены к единой мере (в некоторых случаях нужно оценивать одновременно компьютеры и преподавателей, в других – квадратные метры школьных классов и часы, отведенные на практические занятия). Так, например, в методах экспертных оценок [1, 2] каждому показателю выставляется на основании мнения экспертов некий весовой коэффициент значимости, который уравнивает меры у всех показателей.

В данной работе предлагается подход на основе статистики качества [3]. Для перевода размах значений каждого показателя разбивается на одно и то же число интервалов, и номер интервала, в который попадает значение показателя, определяет значение меры качества данного показателя.

Для определения уровня качества устанавливают для каждого признака верхнюю и нижнюю границы изменения. Число уровней качества заранее устанавливается в соответствии с экспертной оценкой, получаемой управляющим органом (либо профессиональным сообществом), и сохраняется неизменным в течение всего цикла рейтингования.

$$q_{ij} = \frac{(x_{ij} - x_{\min j}) \cdot (N - 1)}{x_{\max j} - x_{\min j}} + 1, \quad (3)$$

где  $x_{\max j}$  и  $x_{\min j}$  – соответственно границы изменения показателя  $j$ , устанавливаемого либо эмпирически, после сбора информации по всем объектам, либо нормативно, органом управления;  $N$  – число уровней качества;  $x_{ij}$  – значение  $j$ -го показателя для  $i$ -го объекта,  $q_{ij}$  – значение аналога качества  $j$ -го показателя для  $i$ -го объекта;  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Полученные аналоги качества округляем до целых значений, поскольку на практике принято оценивать качество целыми числами. Кроме того, при округлении происходит сглаживание неточностей, изначально присущих численным значениям признаков.

Сведем все полученные значения аналогов качеств для показателей в матрицу. Обозначим матрицу качеств:

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mn} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $m$  – количество объектов;  $n$  – число показателей объекта;  $q_{ij}$  – значение аналога качества  $j$ -го показателя для  $i$ -го объекта;  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $t$  – момент времени, в который строится срез данных.

**Оценка показателей качества деятельности системы однородных объектов.** Для определения значимости качественных показателей используем функцию информационной энтропии [4], зависящую от частоты появления события (собственная информация случайной величины). Определить энтропию случайной величины можно, введя предварительно понятие распределения случайной величины  $X$ , имеющей конечное число значений:

$$P_X(x_i) = p_i = \frac{k_i}{K}, p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m p_i = 1, \quad (5)$$

где  $P_X(x_i)$  – распределение случайной величины  $X$ ;  $p_i$  – относительная частота (вероятность) наступления события  $X$ ;  $k_i$  – число благоприятного наступления события  $X$ ;  $K$  – общее число событий.

В то же время собственная информация случайной величины определяется как [5]

$$I(X) = \ln \frac{1}{P_X(x_i)}. \quad (6)$$

Таким образом, частная информационная энтропия события  $X$  является суммой всех произведений относительных частот появления события  $X$ , умноженных на их обратные натуральные логарифмы:

$$H_j = \sum_{i=1}^m p_i \ln \frac{1}{p_i}, \quad (7)$$

где  $j - j$ -й показатель для  $i$ -го объекта;  $H_j$  – информационная энтропия (значимость)  $j$ -го показателя.

Величина  $H_j$  дает количество информации о событии, вероятность наступления которого равна  $p_i$ . Таким образом, количество информации о событии определяется как величина, обратно пропорциональная вероятности наступления события. Чем больше вероятность наступления события, тем меньше информации несет сообщение о его наступлении, и наоборот.

При этом принцип целостности и однородности исследуемой системы на основании [3] выражается формулой

$$R_i = \sum_{j=1}^n H_j * q_{ij}, \quad (8)$$

где  $i - i$ -й объект,  $i = 1, \dots, m$ ;  $H_j$  – энтропия (значимость)  $j$ -го показателя;  $q_{ij}$  – значение аналога качества  $j$ -го показателя для  $i$ -го объекта;  $R_i$  – сводный рейтинг объекта  $i$ , построенный на основании принципа целостности и однородности системы.

Таким образом, получаем оценку показателей качества деятельности системы однородных объектов:

$$K_{\text{деят}} = 1 / \sum_{i=1}^m R_i, \quad (9)$$

где  $R_i$  – сводный рейтинг объекта  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

На основании выражений (1)–(9) получаем математическую модель оптимизации показателей качества деятельности системы однородных объектов с функцией ограничения по выделенным ресурсам  $B$ :

$$K(q(x), x) = A_1 \cdot \left( \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{K} \cdot \ln \frac{K}{k_i} \cdot q(x)_{ij} \right) \right) \right) + A_2 \cdot \Delta B(x), \quad (10)$$

где  $A_1, A_2$  – весовые коэффициенты модели;  $K$  – общее число событий ( $K = m$ );  $k_i$  – число благоприятного наступления события  $X$ ; событие  $X$  – отнесение показателя  $q(x)_{ij}$  к уровню качества  $N$ ;  $N$  – число уровней качества (задается экспертно);  $q(x)_{ij}$  – качественные аналоги показателей;

$x_{ij}$  – показатели;  $\Delta B(x) = (B_{\Sigma} - \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \Delta x_{ij} \times \delta_{ij})^2$  – функция ограничения по выделенным ресурсам;

$\delta_{ij}$  – «весовые» коэффициенты показателей;  $\Delta x_{ij} = (x_{ij\text{план}} - x_{ij\text{тек}})$  – приращение показателя  $x_{ij}$ .

**Заключение.** Полученная математическая модель оценки показателей качества деятельности системы однородных объектов позволяет представить в комплексном виде систему однородных объектов по различным показателям, а также оптимизировать на ее основе качества деятельности системы однородных объектов в режиме реального времени.

Предложенная методика – уравнения (1)–(10) – позволяет отказаться от экспертной оценки значимости показателей, которая носит субъективный характер и увеличивает временные затраты на получение конечного результата.

#### Литература

1. Орлов А.И. Теория принятия решений. – М.: Экзамен, 2006. – 576 с.
2. Орлов А.И. Экспертные оценки: учеб. пособие. – М.: ИВСТЭ, 2002. – 31 с.
3. Современный подход к построению рейтингов образовательных учреждений / Т.Д. Карминская, С.П. Семенов, О.Ф. Шапкина, П.И. Ципорин // Доклады ТУСУРа. – 2008. – №1(17). – С. 127–134.
4. Shannon C.E. A mathematical theory of communication // Bell System Technical Journal. – 1948. – Vol. 27, July; October. – P. 379–423; 623–656.

5. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике / К. Шеннон. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 830 с.

---

**Карминская Татьяна Дмитриевна**

Канд. техн. наук, доцент, ректор Югорского государственного университета (ЮГУ)

Тел.: 8 (346-7) 35-75-04

Эл. почта: ktd@mail.ru

**Ковалев Владимир Захарович**

Д-р техн. наук, профессор, проректор по научной работе и международной деятельности ЮГУ

Тел.: 8 (346-7) 35-77-23

Эл. почта: V\_Kovalev@ugrasu.ru

**Ципорин Павел Игоревич**

Аспирант ЮГУ

Тел.: 8 (346-7) 36-74-93

Эл. почта: TsiporinPI@yandex.ru

Karminskaya T.D., Kovalev V.Z., Tsiporin P.I.

**Mathematical model for estimation of the generalized indicators of activity quality of homogeneous object system**

This research paper presents mathematical model for estimation of the generalized indicators of activity quality of homogeneous object system. The mathematical model, based on entropy information indicators, increasing the estimation level objectivity of homogeneous objects' activity, is developed.

**Keywords:** mathematical model of indicator estimation, information entropy, homogeneous objects' activity system indicators.

---