УДК 519.21

А.Г. Буймов, Б.А. Буймов

Вероятностная модель эффекта повторений в обучении

Разрабатывается вероятностная модель принципа повторений и выводится формула обобщенной функции забывания, сформированной в результате произвольного числа циклов обучения.

Ключевые слова: Эббингауз, форма кривых забывания, влияние повторений.

Введение

Принцип повторения является необходимой составляющей процессов обучения и развития навыков, координации работ и коррекции поведения людей, формирования корпоративной культуры организации и проведения организационных изменений.

Первые результаты изучения эффективности этого принципа были получены немецким психологом Германом Эббингаузом при проведении экспериментальных исследований памяти в 1885 г. Он обнаружил зависимость характеристик запомненной информации от времени и количества повторений и ввел понятия кривых обучения и забывания [1–3]. Впоследствии идеи Эббингауза стали базой для развития методов освоения новой информации и контроля остаточных знаний [4-9]. В статье [10], со ссылкой на работу [11], рассказывается о применении этих идей для оценки влияния квалификации персонала на рост производительности труда и снижение затрат на единицу продукции в промышленности. Сообщается, что повторение операций любой сложности приводит к сокращению времени их выполнения и повышению качества работы. С приобретением опыта люди быстрее принимают решения и при этом совершают меньше ошибок. Это относится ко всем сотрудникам, специалистам и менеджерам, а не только к тем, кто непосредственно участвует в производстве. В статьях [7, 12] говорится о возможности применения обнаруженных закономерностей при планировании рекламных кампаний.

Для выполнения расчетов, связанных с разработкой процессов управления памятью и влияния на поведение людей, экспериментальные данные должны быть сглажены аналитическими зависимостями. История попыток психологов найти подходящие математические модели отражена в обзорах [13, 14]. Из более сотни предложенных форм зависимостей к двум наиболее популярным вариантам можно отнести примеры экспоненциальной и степенной функций, изображенных на рис. 1 и 2.

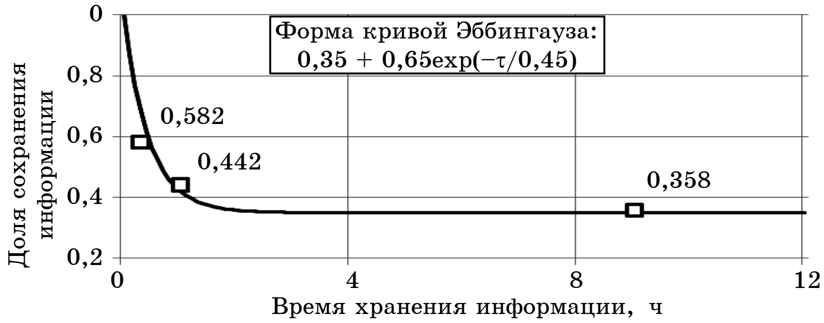

Рис. 1. Экспоненциальная форма кривой забывания Эббингауза с ненулевой асимптотой

Сглаживание экспериментальных кривых забывания степенными функциями было предложено в 1974 г. в работе Виккелгрена [15]. Впоследствии было обнаружено, что такое приближение позволяет не только аппроксимировать экспериментальные данные, но и предсказывать (прогнозировать) их поведение [16–18].

Теперь заметим, что во всех упомянутых выше работах форма кривых забывания не выводится, а предполагается. При таком подходе несколько кривых с принципиально различными свойствами, но согласованных с экспериментом по методу наименьших квадратов, могут быть признаны годными. Примером подобной ситуации могут быть кривые, приведенные на рис. 1 и 2. Обе кривые выдерживают стандартную проверку на адекватность, хотя первая соответствует предположению, что остаточный след от «записанной» в памяти информации может храниться сколь угодно долго, а вторая отвечает гипотезе о возможности его полного разрушения.

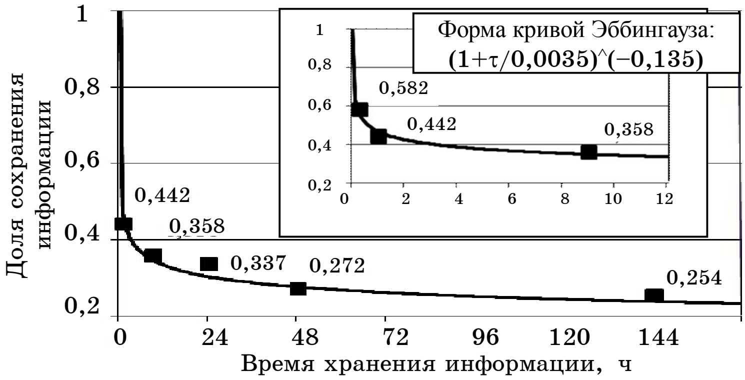

Рис. 2. Степенная форма кривой Эббингауза

Ниже разрабатывается вероятностная модель принципа повторений и выводится формула обобщенной функции забывания, сформированной в результате произвольного числа циклов обучения.

Исходные формулы

Для определенности представим, что речь идет о развитии навыков принятия решений некоторым исполнителем. При этом отметим, что в зависимости от контекста под исполнителем можно подразумевать и некоторую команду, и отдельного сотрудника, и учащегося, а под принятием решений – осуществление выбора, например выбора плана действий, репертуара поведения, варианта ответа на поставленный вопрос.

Пусть в этом случае имеется N возможных вариантов решений, из которых некоторый учитель (наставник, менеджер, инструктор) выбирает решения r с вероятностями π_r, а необученный исполнитель (сотрудник, ученик) – решения s с вероятностями ϑ_s; $r,s=\overline{1,N}$. В дальнейшем распределение π_r будем рассматривать как вероятностную характеристику поведения, которому учитель обучает ученика, а ϑ_s – как характеристику его начального, необученного поведения.

При совместном рассмотрении пар (r,s) будем считать, что в случае успешного обучения исполнителя решения r и s начинают совпадать. Эту ситуацию обозначим H_0. В альтернативном случае, который обозначим H_1 решения r и s будем считать независимыми.

В этих предположениях условные двумерные распределения вероятностей $P(r,s|H_i)$ рассматриваемых пар (r,s) можно записать в виде следующих выражений:

$$P(r,s|H_0)=\pi_r\delta_{rs}=\begin{cases}\pi_r, \text{ если } s=r;\\ 0, \text{ если } s\neq r;\end{cases} \tag{1}$$

$$P(r,s|H_0)=\pi_r\delta_{rs}. \tag{2}$$

Чтобы отобразить неопределенность возникновения ситуаций H_0, H_1, введем вероятности

$$P(H_0)=\rho, \quad P(H_1)=1-\rho. \tag{3}$$

Безусловное двумерное распределение $P(r,s)$, вычисляемое по формуле полной вероятности $P(r,s)=\sum_{i=0}^{1}P(r,s|H_i)\cdot P(H_i)$, с учетом введенных обозначений и выражений (1)–(3) может быть представлено формулой

$$P(r,s)=\pi_r(\delta_{rs}\rho+\vartheta_s(1-\rho)). \tag{4}$$

Суммирование распределения (4) по всем возможным значениям r позволяет получить выражение для одномерного распределения $P(s)$ и представить его в виде

$$P(s)=\pi_s\rho+\vartheta_s(1-\rho). \tag{5}$$

Распределение (5) характеризует новое, «обученное» поведение исполнителя, принимающего решения S с учетом указаний учителя. При успешном усвоении указаний, т.е. при $\rho = 1$, новое поведение $P(s)$ совпадает с рекомендуемым поведением: $P(s) = \pi_s$. В случае плохого усвоения, т.е. при $\rho = 0$, поведение исполнителя остается необученным: имеет место равенство $P(s) = \vartheta_s$.

Если циклы обучения и исполнения разнесены во времени, то это можно отразить представлением формулы (5) в виде

$$P(s;t_1,t_2) = \pi_s \rho(t_1,t_2) + \vartheta_s(1-\rho(t_1,t_2)), \tag{6}$$

где вероятность $\rho(t_1,t_2)$ характеризует степень усвоения указаний учителя, полученных в момент времени t_1 и их сохранения до момента применения t_2.

Теперь представим, что циклы обучения повторяются. Для удобства получения дальнейших выводов перепишем (6) в виде

$$P_1(s,\tau) = \pi_s \rho_1(\tau) + P_0(s)(1-\rho_1(\tau)), \tag{7}$$

где $P_0(s) = \vartheta_s$ – характеристика начального поведения исполнителя; $P_1(s,\tau)$ –характеристика его поведения в точке $t_1 + \tau$ после первого цикла обучения; $\rho_1(\tau) = \rho(t_1, t_1 + \tau)$ – степень усвоения и сохранения опыта, полученного в первом цикле обучения, через время τ после момента t_1 его завершения.

Из (7) видно, что в случае успешного усвоения и сохранения опыта, т.е. при $\rho_1(\tau) = 1$ обученное поведение $P_1(s;\tau)$ совпадает с рекомендуемым поведением π_r. В случае неусвоения или несохранения опыта, т.е. при $\rho_1(\tau) = 0$ поведение остается необученным: $P_1(s;\tau) = P_0(s)$.

Результат второго цикла обучения, завершенного в момент времени t_2, в точке $t_2 + \tau$ может быть представлен формулой

$$P_2(s,\tau) = \pi_s \rho_2(\tau) + P_1(s;\Delta_1)(1-\rho_2(\tau)) \tag{8}$$

которая от (7) отличается тем, что здесь характеристика необученного начального поведения $P_0(s)$ заменена на результат первого цикла обучения $P_1(s;\Delta_1)$ в точке $t_2 = t_1 + \Delta_1$, а вероятность $\rho_1(\tau)$ – на $\rho_2(\tau)$, где $\rho_2(\tau) = \rho(t_2, t_2 + \tau)$

Далее по аналогии с (7) и (8) для k - го цикла можно записать

$$P_k(s;\tau) = \pi_s \rho_k(\tau) + P_{k-1}(s;\Delta_{k-1})(1-\rho_k(\tau)) \tag{9}$$

где $\rho_л(\tau) = \rho(t_k, t_k + \tau)$, а $P_{k-1}(s;\Delta_{k-1})$ – результат $(k-1)$-го цикла обучения в точке $t_k = t_{k-1} + \Delta_{k-1}$.

Заметим, что функции $\rho_k(\tau)$ при разных k могут отличаться, но смысл их от этого не меняется: они представляют собой вероятности усвоения и сохранения новой информации, полученной исполнителем в k-м цикле изучения рекомендуемого поведения π_s.

Записывая на основе формул (7)–(9) соответствующие выражения для $P_{k-1}(s;\Delta_{k-1}),\ldots,P_2(s;\Delta_2),P_1(s;\Delta_1)$, а именно:

$$P_{k-1}(s;\Delta_{k-1}) = \pi_s \rho_{k-1}(\Delta_{k-1}) + P_{k-2}(s;\Delta_{k-2})(1-\rho_{k-1}(\Delta_{k-1}));$$

$$\ldots\ldots$$

$$P_2(s;\Delta_2) = \pi_s \rho_2(\Delta_2) + P_1(s;\Delta_1)(1-\rho_2(\Delta_2));$$

$$P_1(s;\Delta_1) = \pi_s \rho_1(\Delta_1) + P_0(s)(1-\rho_1(\Delta_1)),$$

и подставляя их затем последовательно в (9), по индукции для $k > 1$, получаем:

$$P_k(s;\tau) = \pi_s \left(1-(1-\rho_k(\tau))\prod_{i=1}^{k-1}(1-\rho_i(\Delta_i))\right) + P_0(s)(1-\rho_k(\tau))\prod_{i=1}^{k-1}(1-\rho_i(\Delta_i)) \tag{10}$$

Из формулы (10) видно, что повторение циклов обучения может привести к следующим результатам:

– при ненулевых вероятностях $\rho_i(\Delta_i)$, т.е. при $\rho_i(\Delta_i) > 0$, произведение $\prod_{i=1}^{k-1}(1-\rho_i(\Delta_i))$ с увеличением k монотонно убывает, и характеристики обученного поведения $P_k(s;\tau)$ сходятся к характеристикам рекомендуемого поведения π_s. Математически это отражается формулой $\lim_{k\to\infty} P_k(s;\tau) = \pi_s$;

– при нулевых вероятностях $\rho_i(\tau)$ во всех циклах обучения, т.е. при $\rho_i(\tau)=0;\ i=\overline{1,k}$, для любых k получаем $P_k(s;\tau)=P_0(s)$. Это означает, что при любом числе повторений поведение исполнителя остается необученным.

Первый случай хорошо согласуется с принципом «повторение – мать учения», а второй можно проиллюстрировать известным примером с часами: мы тысячи раз смотрим на циферблат, чтобы узнать время, но если вдруг потребуется, не можем вспомнить деталей его оформления.

Функция забывания

Введем функцию

$$R_k(\tau)=1-(1-\rho_k(\tau))\prod_{i=1}^{k-1}(1-\rho_i(\Delta_i)),\quad k>1, \tag{11}$$

и заметим, что с ее учетом формула (10) может быть переписана в виде

$$P_k(s;\tau)=\pi_s R_k(\tau)+P_0(s)(1-R_k(\tau)),\quad k>1. \tag{12}$$

Из структуры выражения (12) видно, что при всех $k>1$ функция $R_k(\tau)$ имеет смысл вероятности того, что в течение времени τ после завершения k-го цикла обучения опыт, накопленный исполнителем за время t_k-t_1, сохраняется. Зависимость этой вероятности от величины интервала τ принято называть функцией забывания (см. [1–3]). Формулу (11) можно распространить и на случай $k=1$. Для этого, как следует из сравнения выражений (7) и (12), надо принять $R_1(\tau)=\rho_1(\tau)$.

Из учебников и публикаций, связанных с исследованием процессов запоминания и извлечения информации из памяти человека, известно, что без специальных методов усиления и удержания новых следов информации в памяти они быстро стираются [1–5]. На основе этого, не вдаваясь пока в детали, будем считать, что все частные функции забывания новой информации $\rho_i(\tau)$, $i=\overline{1,k}$, обладают свойствами $\rho_i(\tau)\le 1$, $\rho_i(\infty)=0$.

С учетом сделанных замечаний формулу обобщенной функции забывания (11), сформированной в результате k циклов обучения, можно преобразовать к виду (13):

$$R_k(\tau)=a_k+(1-a_k)\rho_k(\tau),\quad k\ge 1 \tag{13}$$

где параметр a_k определяется как предел $a_k=\lim_{\tau\to\infty}R_k(\tau)$, характеризует остаточный уровень сохранившейся информации, при $k=1$ принимает значение $a_1=0$, а при $k>1$ может быть вычислен по формуле (14):

$$a_k=1-\prod_{i=1}^{k-1}(1-\rho_i(\Delta_i)),\quad k>1. \tag{14}$$

Отсюда следует вывод, что повторение циклов обучения должно приводить к появлению ненулевой асимптоты (14) у функции забывания. Это соответствует представлениям некоторых психологов о том, что однажды запомненная информация из памяти никогда не исчезает. Проблема лишь в том, чтобы ее отыскать и извлечь [16, 19].

Влияние интервалов между повторениями

По данным Эббингауза и его последователей важным для эффективности заучивания информации является не только количество повторений, или повторных презентаций, но и распределение их во времени. Например, Пьерон, экспериментировавший с заучиванием цифровых рядов, обнаружил, что для достижения одного и того же уровня запоминания при интервалах в полчаса требуется одиннадцать повторений, в два часа – семь с половиной повторений, пять часов – шесть повторений, восемнадцать часов – четыре повторения с половиной [2]. Этой зависимости соответствует график, изображенный на рис. 3. Его аналитический вид определяется формулой $17{,}127(1+10\Delta)^{-0{,}262}$, которая также отражена на рис. 3.

График, изображенный на рис. 4, построен на основе данных Пьерона, приведенных на рис. 3, и формулы (14) для случая высокого уровня сохранения информации, $a_k=0{,}95$ и одинаковых функциях забывания новой информации $\rho_i(\Delta_i)=\rho(\Delta)$ на интервалах $\Delta_i=\Delta$ при любых $i=\overline{1,(k-1)}$.

Рис. 3. Зависимость количества повторений от интервала между презентациями

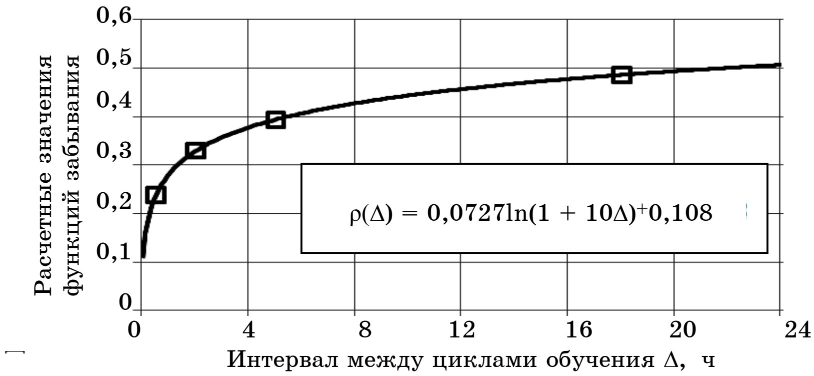

Рис. 4. Значения функций забывания $\rho(\Delta)$, найденные из соотношения (14) с учетом данных Пьерона, приведенных на рис. 3, и условия $a_k = 0{,}95$, при разных значениях Δ

Важно отметить, что расчетные значения функции $\rho(\Delta)$, приведенные на Рис. 4, принадлежат не одной, а нескольким кривым забывания $R_1(\tau)$, как показано на рис. 5. При этом обнаруживается, что с увеличением интервалов между учебными презентациями скорость стирания запомненной информации уменьшается. Подобная закономерность ранее обнаружена и описана в работах [16, 17]. Авторы этих работ называют ее пространственным эффектом и объясняют физиологическими процессами консолидации памяти, необходимостью образования устойчивых связей между запомненными образами и превращения их в систему: неглубокие следы быстрей стираются, а информация, оставившая в долговременной памяти глубокий след, стирается не только дольше, но и с меньшей скоростью (закон Йоста [17]).

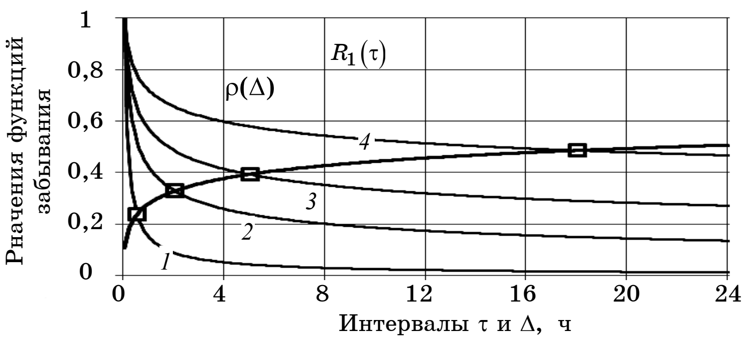

Рис. 5. Семейство кривых забывания $R_1(\tau)$ соответствующих разным интервалам Δ:
1 – 0,5 ч; *2* – 2,0 ч; *3* – 6,0 ч; *4* – 18 ч

Авторы работы [20], также исследовавшие влияние пространственного эффекта на поведение кривых забывания, делают вывод о нецелесообразности слишком частых повторений изучаемых материалов. К такому же выводу можно, казалось бы, прийти и на основе данных, приведенных на рис. 3, хотя они отражают эксперименты с многократными повторениями, а результаты работ [16, 17, 20] основаны на экспериментах с разнесенными во времени парами учебных презентаций. Однако если нас интересует не количество повторов, а общее время усвоения материала, то может оказаться более выгодным выбрать интенсивный вариант и добиться желаемого результата за несколько часов вместо нескольких дней.

Заключение

Из работ Колба и его последователей известно, что каждый человек склонен в той или иной мере учиться на собственных ошибках, на осмыслении опыта других людей, на обобщении и развитии накопленных знаний и на проверке новых идей. При этом предпочитаемые стили обучения могут существенно отличаться [21]. В частности, поэтому люди усваивают информацию и приобретают навыки с разной глубиной и разной скоростью. Применительно к анализу поведения кривых забывания это означает, что формулы, полученные при сглаживании экспериментальных данных, с одной стороны, могут помочь выявить некоторые общие закономерности типа степенного закона забывания информации [18] или пространственного эффекта [20], а с другой – зависеть от конкретных условий эксперимента, изучаемой информации или навыков и индивидуальных особенностей испытуемого.

Структура формул (13), (14), полученных без конкретизации характеристик обучаемого, является инвариантной относительно этих характеристик. При их выводе получено, что независимо от условий эксперимента повторные презентации изучаемой информации приводят к появлению ненулевых асимптот функций забывания. Формула (14) оказалась также полезной при новой интерпретации данных о влиянии частоты и количества повторений на процессы сохранения запомненной информации.

Литература

1. Contributions to memory // Wikipedia, the free encyclopedia [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/Hermann_Ebbinghaus, свободный (дата обращения 14.05.2010).

2. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии. – СПб.: Питер Ком, 1999. – 720 с. (Серия «Мастера психологии»).

3. Соло Р.Л. Когнитивная психология. – 6-е изд. – СПб.: Питер, 2006. – 589 с. (Серия «Мастера психологии»).

4. Курланд М. Как улучшить память / М. Курланд, Р. Лупоф; пер. с англ. Г.Г. Кривошеиной. – М.: ООО «Издательство АСТ», 2003. – 369 с.

5. Поссин В. Как развить суперпамять / В. Поссин; пер. с нем. Е. Банзелюка. – М.: ООО «Издательство АСТ», 2004. – 155 с.

6. Wolf G. Want to Remember Everything You'll Ever Learn? Surrender to This Algorithm // Wired Magazine, 2008/04/21 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.wired.com/medtech/health/magazine/16-05/ff_wozniak?currentPage=all, свободный (дата обращения 14.05.2010).

7. Spira D. Learning the Forgetting Curve // Meme Menagerie (a collection of useful ideas on Business Performance, Learning&Life) /2008/07/24 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://danspira.com/2008/07/24/learning-the-forgetting-curve/, свободный (дата обращения 14.05.2010).

8. Чмыхова Е.В. О методологических проблемах использования результатов тестирования знаний студентов как показателя качества образования / Е.В. Чмыхова, А.Т. Терехин // Труды СГА. – 2007 [Электронный ресурс]. – Режим доступа:
http://ecology.genebee.msu.ru/3_SOTR/CV_Terekhin_publ/2007_Test_TrudySGA.doc, свободный (дата обращения 14.05.2010).

9. О независимости скорости забывания от полноты запоминания при заучивании слов подростками / М.П. Карпенко, Е.В. Чмыхова, И.В. Тихомирова, А.Т. Терехин // Институт психологии обучения Современной гуманитарной академии, 2009 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ecology.genebee.msu.ru/3_SOTR/CV_Terekhin_publ/2009_Pod-rostki_Chmykhova.doc, свободный (дата обращения 14.05.2010).

10. Experience curve effects // Wikipedia, the free encyclopedia: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/Experience_curve_effects, свободный (дата обращения 14.05.2010).

11. Wright T.P. Factors Affecting the Cost of Airplanes // Journal of Aeronautical Sciences. – 1936. – №3(4) – P. 122–128.

12. Мозер К. Повторение рекламы и ее эффективность /2008/05/04/ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.marketing.spb.ru/lib-around/socio/adv_repetition.htm, свободный (дата обращения 14.05.2010).

13. Rubin D.C. One Hundred Years of Forgetting: A Quantitative Description of Retention / D.C. Rubin, A.E. Wenzel // Psychological Review. – 1996. – Vol. 103, № 4. – P. 743–760.

14. Robertson G.S. A Brief History of the Mathematical Definition of Forgetting Curves // Friday. June 26, 2009 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.ideationizing.com/2009/06/brief-history-of-mathematical.html, свободный (дата обращения 14.05.2010).

15. Wickelgren W.A. Single-trace fragility theory of memory dynamics // Memory & Cognition. – 1974. – Vol. 2(4). – P. 775–780.

16. Anderson J.R. Reflections of the environment in memory / J.R. Anderson, L.J. Schoole // Psychological Science. – 1991. – Vol. 2, № 6. – P. 396–408.

17. Wixted J.T. On Common Ground: Jost's (1897) Law of Forgetting and Ribot's (1881) Law of Retrograde Amnesia // Psychological Review. – 2004. – Vol. 111, № 4. – P. 864–879.

18. Wixted J.T. The wickelgren power law and the ebbinghaus savings function / J.T. Wixted, S.K. Carpenter // Psychological Science. – 2007. – № 18(2). – P. 133–134.

19. Григорьева Н.Н. Психофизиология профессиональной деятельности: учеб. курс (Учеб.-метод. комплекс). – М.: МИЭМП, 2009 // Образовательный портал Московского института экономики, менеджмента и права [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.e-college.ru/xbooks/xbook116/book/index/index.html?index*title.htm, свободный (дата обращения: 14.05.2010).

20. Spacing Effects in Learning: A Temporal Ridgeline of Optimal Retention / N.J. Cepeda, E. Vul, D. Rohrer, J.T. Wixted, H. Pashler // Psychological Science. – 2008. – Vol. 19,– № 11. – P. 1095–1102.

21. Kolb D.A. Experiential Learning. – Englewood Cliffs; NJ: Prentice Hall, 1984. – 256 p.

Буймов Аркадий Георгиевич
Д-р техн. наук, зав. каф. экономики ТУСУРа
Тел.: (382-2) 41-33-29
Эл. почта: agb@mail.tomsknet.ru

Буймов Борис Аркадьевич
Старший преподаватель каф. ЭМИС ТУСУРа
Тел.: (382-2) 41-33-29
Эл. Почта: buimov@mail.tomsknet.ru

Buimov A.G., Buimov B.A.
Probabilistic model of recurrences

The probabilistic model of a principle of recurrences is deduced and the formula of the generalized forgetting function for any number of cycles of training is derived.
Keywords: Ebbinghaus, forms of forgetting curves, influence of recurrences.
