

УДК 621.37/39.001.5

К.В. Бородин, С.Г. Михальченко, Г.Я. Михальченко

## Бифуркации в динамике инвертирующего преобразователя напряжения

Приводятся результаты исследований нелинейных явлений, обуславливающих возможные динамические режимы одной из перспективных структур полупроводниковых преобразователей с дозированием энергии, передаваемой в нагрузку. Впервые анализируются выявленные устойчивые периодические, квазипериодические и хаотические колебания напряжений и токов преобразователя инвертирующего типа, их области существования и бифуркационные границы вычисленного многообразия динамических режимов. Численно-аналитический метод анализа ключевых преобразователей обеспечивает достоверность расчетов длинных числовых рядов как при непрерывных, так и в случае разрывных токов индуктивного накопителя энергии.

**Ключевые слова:** бифуркация, проектный режим, области устойчивости, границы динамических режимов, динамический хаос.

**Введение.** В общем ряду полупроводниковых преобразователей особое место занимают преобразователи инвертирующего типа с дозированием энергии, передаваемой в нагрузку [1]. Внимание к таким дозирующим устройствам определяется потенциальными возможностями обеспечения «естественных» свойств токоограничения. Эти свойства приобретают решающее значение при создании транзисторных преобразователей, перегрузочная способность которых невелика, в то время как их частотные свойства непрерывно улучшаются, что позволяет минимизировать массогабаритные показатели дозирующих накопителей энергии. Одним из сдерживающих факторов развития преобразователей с дозированием энергии выступает недостаточная изученность их нелинейных динамических свойств. Отметим, что математические модели импульсных преобразователей должны учитывать не только нелинейные свойства широтно-импульсной модуляции, но и нелинейности, связанные с неопределенностью моментов коммутации неуправляемых полупроводниковых приборов в режимах разрывных токов, поскольку наличие такого рода нелинейностей существенным образом обогащает многообразие существования и развития различных детерминированных и хаотических состояний замкнутой системы автоматического регулирования.

Целью настоящей работы является анализ основных закономерностей эволюции нелинейной динамики преобразователя инвертирующего типа.

**Схема замещения** стабилизатора напряжения с дозирующей индуктивностью, приведенная на рис. 1, представлена идеальными элементами, но математические модели этих элементов учитывают глобальные нелинейности и глобальные постоянные времени, что позволяет вычислить и проанализировать основные зависимости эволюции динамических режимов.

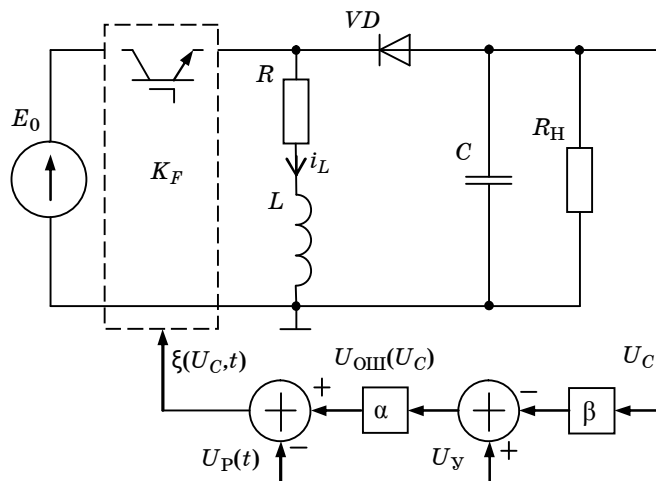


Рис. 1. Схема замещения стабилизатора напряжения

На схеме замещения обозначено:  $E_0$  – напряжение питания;  $R$  – сопротивление, характеризующее потери в индуктивности и в регуляторе;  $VD$  – обратный диод;  $L$  и  $C$  – индуктивность и емкость фильтра преобразователя;  $R_H$  – сопротивление нагрузки;  $U_y$  – управляющее (задающее) напряжение;  $\beta$  – коэффициент передачи датчика обратной связи по выходному напряжению  $U_C$ ;  $\alpha$  – коэффициент усиления пропорционального звена регулятора;  $U_p(t)$  – развертывающее напряжение. Ключевой элемент представлен коммутационной функцией  $K_F(\xi) = \text{Sign}(\xi)$ , которая определяется через уравнение  $\xi(\mathbf{X}, t) = U_{\text{ош}}(U_C) - U_p(t) = 0$  обратной связи, где  $U_{\text{ош}}(U_C) = \alpha(U_y - \beta \cdot U_C(t))$ .

В работе [2] рассматривается математическая модель такой схемы замещения и приводится методология численно-аналитического решения описывающей её системы нелинейных дифференциальных уравнений, с переменными матрицами  $\mathbf{A}_i$  и  $\mathbf{b}_i$  вида

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}_i [\mathbf{K}_F(\xi)] \mathbf{X} + \mathbf{b}_i [\mathbf{K}_F(\xi)], \quad i = 1 \dots 3. \quad (1)$$

Коэффициенты матрицы зависят от значения коммутационной функции  $K_F[\xi(\mathbf{X}, t)]$  и неизвестного вектора переменных состояний  $\mathbf{X}$ , значения которого  $(i_L, U_C)$  однозначно определяются последовательностью  $\mathbf{Z} = \{z_k^1, z_k^2\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ; где  $z_k^1$  и  $z_k^2$  – коэффициенты заполнения ключевого элемента и диода соответственно.

Точечные отображения динамических процессов рассчитывались при следующем наборе параметров математической модели (1) преобразователя:  $E_0 = 220$  В;  $P_H = 1000$  Вт;  $R = 1$  Ом;  $R_H = 160$  Ом;  $U_{\text{ош}} = 5$  В;  $f = 40$  кГц;  $\beta = 0,025$ ;  $z_k^1_{\text{макс}} = 0,71$ ;  $U_y = 0-14$  В.

В работе [5] показывается, как пространство параметров фильтра ( $L, C$ ) распадается на области различной динамики в смысле непрерывности тока  $i_L(t)$ :

- режим прерывистых токов (ПТ) –  $L = 1 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 10^{-4}$  Гн,  $C = 500$  мкФ;
- режим непрерывных токов (НТ) –  $L = 3 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-2}$  Гн,  $C = 1000$  мкФ;
- чередования режимов непрерывных и прерывистых (НТ+ПТ) токов  $i_L - L = 3 \cdot 10^{-4}$  Гн;  $C = 1000$  мкФ.

Для преобразователя инвертирующего типа в области параметров непрерывных токов, при достижении коэффициентом усиления обратной связи критического значения  $\alpha_{\text{кр}}$ , характерна потеря устойчивости рабочего режима, сопровождающаяся появлением низкочастотных субгармоник (рис. 2, а). Последующее увеличение  $\alpha$  приводит к уменьшению периода и увеличению амплитуды низкочастотной составляющей  $i_L$ , при этом ток может достигать нулевого значения – так зарождается сценарий чередования режимов НТ+ПТ.

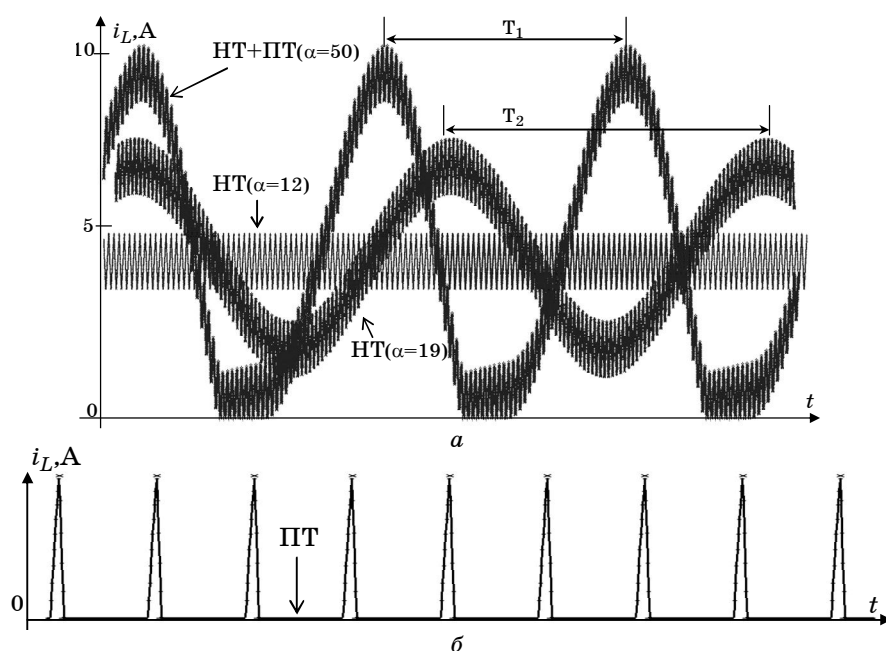


Рис 2. Форма токов дросселя в режимах: а – непрерывных  $i_L$ ; б – прерывных  $i_L$

В работе [2, рис. 4, в] приводятся фрагменты изменения мгновенного значения тока  $i_L(t)$ , отражающие процесс чередования прерывистых (ПН) и непрерывных (НТ) токов за счет возрастающего размаха субгармонических колебаний замкнутой системы регулирования. Условимся, если параметры системы таковы, что ток спадает до нулевого значения на каждом тактовом интервале квантования (см. рис. 2, б), такой процесс будем обозначать как режим прерывистых токов (ПТ), а процесс чередования режимов на интервале одного субгармонического периода ( $m$ -цикла) – чередованием режимов НТ+ПТ.

**Динамика в режиме прерывистых токов дросселя.** Отметим также, что точечные отображения коэффициентов заполнения  $\mathbf{Z} = \{z_k^1, z_k^2\}$  представляют собой однопараметрическую бифуркационную диаграмму и полностью определяют характер изменения динамики всей системы в области варьируемых параметров на всем расчетном числовом ряду  $k = 1, \dots, k_{\max}$ . В области прерывистых токов дросселя преобладает классический сценарий изменения топологии режимов инвертирующего преобразователя, схожий со сценарием Фейгенбаума [3]. На рис. 3 представлена бифуркационная диаграмма  $\mathbf{Z}$  при значении управляющего напряжения  $U_y = 10$  В. Для значений петлевого усиления  $\alpha$  пропорционального регулятора обратной связи  $1 < \alpha < 393$  существует устойчивый одноцикловый ( $m = 1$ ) режим, частота колебаний которого  $f = 40$  кГц. Ток дросселя на каждом тактовом интервале принимает нулевые значения, что соответствует режиму прерывистых токов на каждом тактовом интервале задающего генератора (ПТ). Коэффициентам заполнения  $z_k^1$  и  $z_k^2$  соответствует относительная длительность импульсов проводимости силового ключа и диода, обеспечивающая стабилизацию выходного напряжения. При высоких коэффициентах усиления  $\alpha$  относительный уровень пульсаций выходного напряжения понижается до  $K_{\Pi U_C} = 0,0133\%$ , в то время как коэффициент пульсаций тока дросселя достигает значительной величины:  $K_{\Pi i_L} = 228,5\%$ .

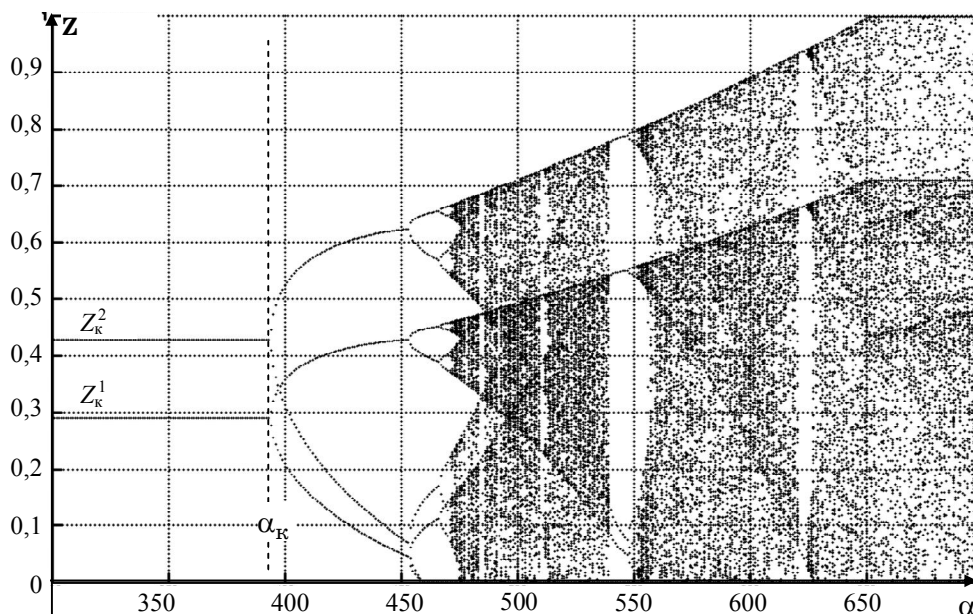


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма коэффициентов заполнения  $\mathbf{Z}$

При достижении значения петлевого усиления критического значения  $\alpha_{кр} = 393$  одноцикловый режим теряет устойчивость и при  $\alpha > \alpha_{кр}$  мягко возникает новый двухцикловый ( $m=2$ ) периодический режим с частотой  $f = 20$  кГц и возрастающими пульсациями тока и напряжения. В частности, при  $\alpha = 452$  устойчивым становится четырехцикловый режим ( $m = 4$ ) с коэффициентами пульсаций  $K_{\Pi U_C} = 0,028\%$  и  $K_{\Pi i_L} = 306,1\%$ . Далее динамика удвоения периода развивается по Фейгенбаумановскому сценарию вплоть до хаотизации вектора переменных состояний, при котором коэффициенты пульсаций плавно растут до величин  $K_{\Pi U_C} = 0,066\%$  и  $K_{\Pi i_L} = 445\%$  (при  $\alpha = 700$ ). Хаотическая широкополосная динамика может перемежаться «окнами» устойчивых детерминированных процес-

сов, например, при  $\alpha = 541$  происходит зарождение устойчивого 3-циклового режима ( $m = 3$ ) с коэффициентами пульсаций тока и напряжения  $K_{\Pi U_C} = 0,041\%$  и  $K_{\Pi i_L} = 360\%$ .

Столь высокие значения  $\alpha_{кр}$  обеспечивают при проектировании стабилизаторов превосходные значения запаса устойчивости одноциклового режима.

Для того чтобы представить общую картину эволюции динамических режимов работы преобразователя при изменении других параметров, например управляющего воздействия  $U_y$ , необходимо «сорвать частности» однопараметрических диаграмм и построить карту (многопараметрическую диаграмму) существования устойчивых движений  $Z = f(U_y, \alpha, \dots)$  [4]. В качестве примера на рис. 4 представлена двухпараметрическая карта динамических режимов ( $m$ -циклов) преобразователя с разрывными токами дросселя, в осях: задающее напряжение  $U_y$  – коэффициент усиления  $\alpha$ . Вычисления проводились при фиксированных значениях величин индуктивности  $L = 2 \cdot 10^{-3}$  Гн и емкости  $C = 10^{-3}$  Ф фильтра. Можно видеть, что имеет место почти линейная зависимость момента зарождения и разрушения  $m$ -циклов от величины петлевого усиления  $\alpha$ , при изменении управляющего напряжения  $U_y$ , что справедливо как для проектного режима, так и для режимов высшей кратности.

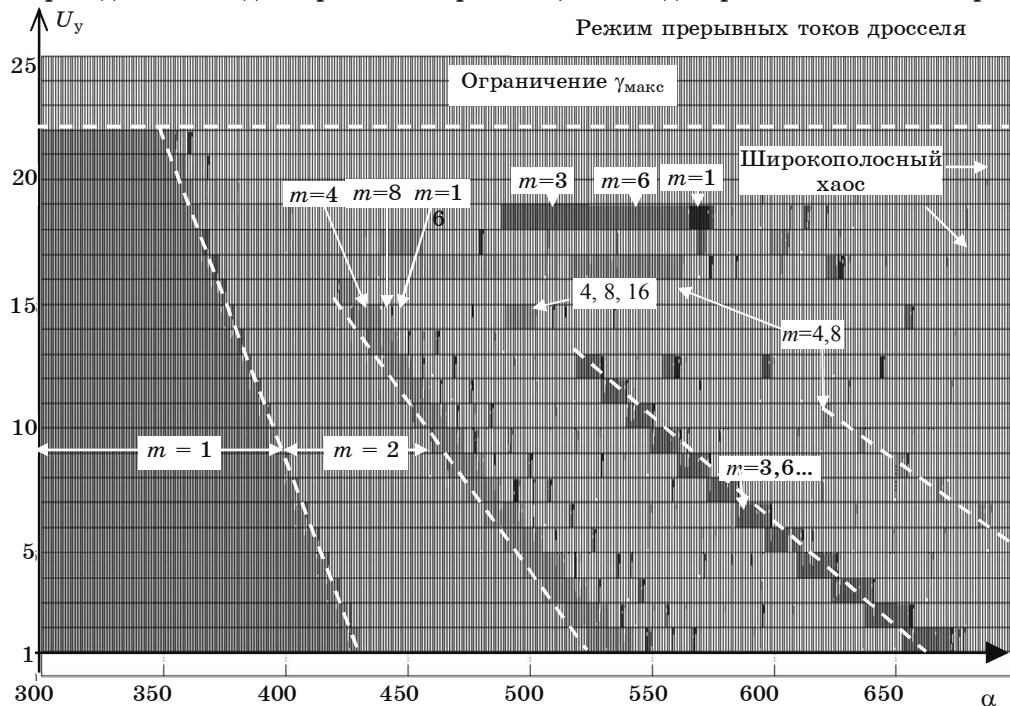


Рис. 4. Двухпараметрическая карта динамических режимов

С точки зрения создания преобразователей, устойчиво функционирующих в проектно-одноцикловом режиме, разработчик должен знать закономерности изменения его границы –  $\alpha_{кр}$ . На основе полученной информации для режима ПТ ( $L = 1 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 10^{-4}$  Гн), установлена зависимость величины критического коэффициента усиления  $\alpha_{кр}$ , при которой происходит потеря устойчивости основного режима:

$$\alpha_{кр}(U_y, L) = 181,32 \cdot e^{0,036 U_y} + (4,8 - 0,23 \cdot U_y) \cdot L + 0,84.$$

**Нелинейная динамика в режиме непрерывных токов.** На рис. 5 представлена однопараметрическая бифуркационная диаграмма коэффициентов заполнения силового ключа  $Z_k^1(\alpha)$ , обратного диода  $Z_k^2(\alpha)$ , наложенная на бифуркационную диаграмму тока дросселя  $i_L(\alpha)$ . Эта диаграмма получена при задании  $U_y = 11,5$  В. По диаграмме можно видеть, что при  $\alpha < \alpha_{кр}$  стабилизатор напряжения устойчиво функционирует в одноцикловом режиме с коэффициентами пульсаций тока и выходного напряжения  $K_{\Pi i_L} = 10,28\%$  и  $K_{\Pi U_C} = 5,31 \cdot 10^{-3}\%$  соответственно. После потери устойчивости проектного режима, в узком диапазоне изменения параметров  $\alpha_{кр} \leq \alpha \leq \alpha_{HT}$  возникают низкочастотные субгармоники, что приводит к интенсивному росту размаха колебаний тока  $i_L$  в режиме НТ (так как  $z_k^2 \equiv 1$ ).



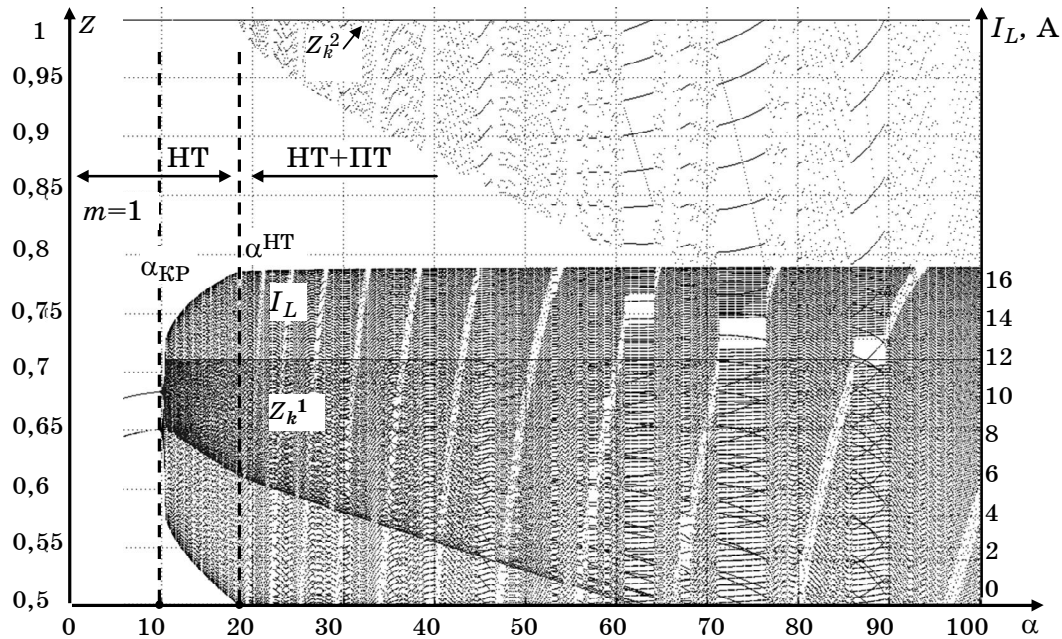


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма зависимостей коэффициента заполнения  $Z$  и тока дросселя  $i_L$

При  $\alpha > \alpha_{\text{HT}}$  минимум величины тока  $i_L$  периодически, с частотой субгармонических колебаний, начинает достигать нулевого значения – с этого момента, как отмечалось выше, процессы в преобразователе характеризуются чередованием непрерывных и прерывистых токов (НТ+ПТ). Размах колебаний тока дросселя достигает максимальной величины (от 0 до 16 А) и ограничивается лишь глобальной нелинейностью типа «насыщение» –  $z_{k\text{макс}}^1 = 0,71$ . Коэффициент пульсаций выходного напряжения, характеризующий широкополосную динамическую хаотизацию, возрастает в 37 раз и колеблется на уровне  $K_{\text{П}U_C} = 0,22 \dots 0,19\%$ , в то время как коэффициент пульсаций тока дросселя увеличивается лишь в 8–9 раз ( $K_{\text{П}i_L} = 94,6 \dots 89,3\%$ ). Некоторое снижение  $K_{\text{П}}$  с ростом  $\alpha$  связано с уменьшением периода субгармонических колебаний (порядка  $m$ -циклов).

В режиме НТ потеря устойчивости проектным режимом не сопровождается удвоением периода, как в ПТ, а возникает как следствие зарождения квазипериодических состояний в спектре анализируемых параметров вектора переменных состояний.

Естественно, в режимах НТ и НТ+ПТ коренным образом отличается и двухпараметрическая бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 6, где темным цветом выделена область параметров с устойчивым одноцикловым режимом. Можно видеть, что значение  $\alpha_{\text{кр}}$ , при котором теряет устойчивость одноцикловый режим, с ростом управляющего напряжения  $U_y$  изменяется нелинейно. При  $U_y > 13$  В преобразователь переходит в режим ограничения и запределывания коэффициентов заполнения  $Z$ . Для рассматриваемого хаотизированного состояния системы также характерна перемежаемость хаотических и детерминированных движений. На диаграмме (рис. 6) светлым фоном выделена область хаотичной динамики с темными «островками» областей устойчивости периодических режимов высокого порядка ( $m > 42$ ).

Зависимость величины критического коэффициента усиления ( $\alpha_{\text{кр}}$ ) от двух переменных  $U_y$  и  $L$ , с погрешностью не более 0,5%, может быть аппроксимирована следующей функцией:

$$\alpha_{\text{кр}}(U_y, L) = 19,368 \cdot e^{-0,26 \cdot U_y} + \left( 251,4 \cdot e^{-0,253 \cdot U_y} + 20,65 \right) \cdot e^{-L \cdot (0,142 \cdot \ln(U_y - 0,485) + 0,496)} + 1,421.$$

**Динамические режимы вблизи границы непрерывных и прерывистых токов** ( $L = 3,4 \cdot 10^{-4}$  Гн;  $C = 1000$  мкФ). Результаты расчетов бифуркационных диаграмм на границе, как и следовало ожидать, показывают наличие рассмотренных выше динамических свойств, характерных для непрерывных и прерывистых токов.

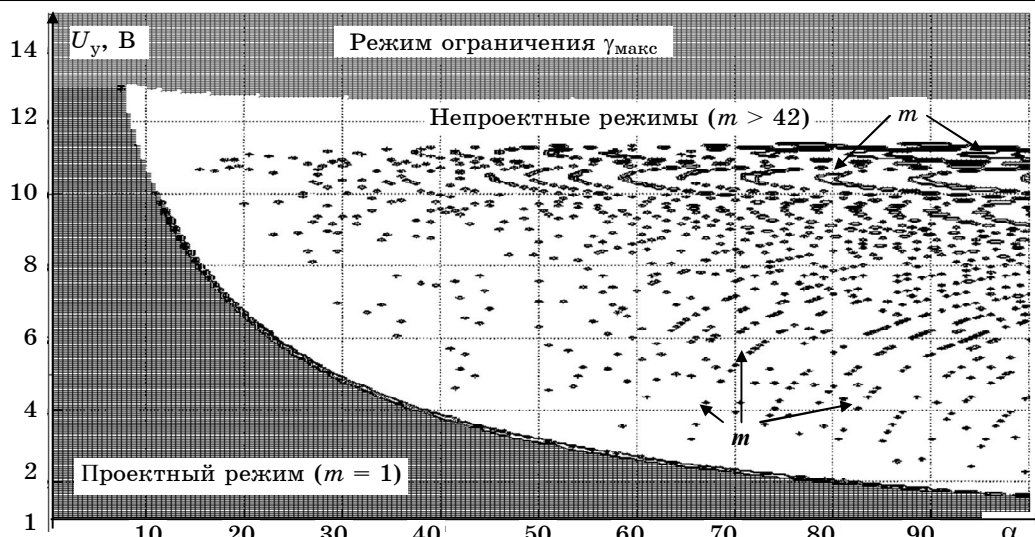
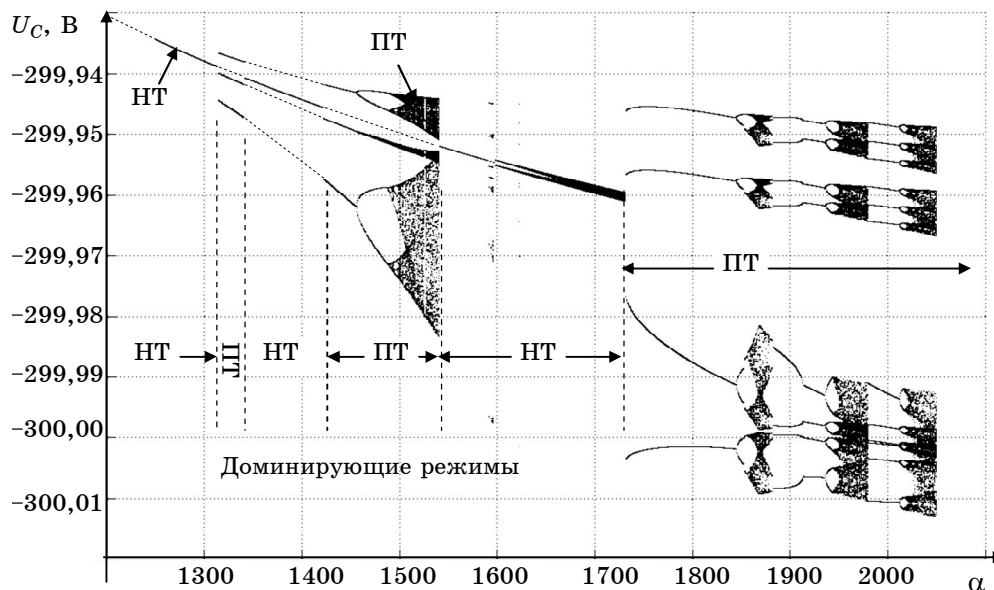


Рис. 6. Карта динамических режимов для непрерывных токов дросселя

На рис. 7 приведена однопараметрическая диаграмма, построенная для  $U_C(t)$  при  $U_y = 7,5$  В. Бифуркационные процессы, при выбранных параметрах непрерывной части системы, начинают проявляться при довольно высоких значениях  $\alpha_{кр} > 1300$ . Следует заметить, что эта величина снижается пропорционально уменьшению емкости конденсатора, и, при  $C = 100$  мкФ, достигает уровня  $\alpha_{кр} = 140$  [5]. При проведении численных экспериментов величина емкости выбрана равной 1000 мкФ лишь для сопоставления анализируемого граничного режима с результатами, полученными при анализе процессов в режиме непрерывных токов.

Рис. 7. Бифуркационная диаграмма выходного напряжения  $U_C$  инвертирующего преобразователя в области ПТ+НТ

В эволюции динамических режимов инвертирующего преобразователя на границе режимов прерывистых и непрерывных токов дросселя одновременно присутствуют ветви как со сценарием удвоения периода (режим ПТ), так и со сценарием низкочастотной модуляции размаха колебаний вектора переменных состояний с эволюцией к узкополосному хаосу. Преобладание одного режима над другим зависит от расположения доминирующей ветви бифуркационной диаграммы и варьируемого параметра  $\alpha$ . В частности, можно видеть, что смена того или другого доминирующего режима, т.е. чередование режимов прерывных и непрерывных токов дросселя, реализуется через жесткие бифуркационные переходы. Показатели качества преобразователя во многом зависят от того, в каком из режимов он находится, и могут отличаться друг от друга на порядок.

### Заключение

1. В режиме прерывистых токов дросселя имеет место классический сценарий удвоения периода с последующей эволюцией его от узкополосной к широкополосной хаотической динамике. При смене расчетного одноциклового режима двухцикловым амплитуда пульсаций выходного напряжения увеличивается в 2–4 раза, в зависимости от  $U_y$ , и практически не зависит от величины индуктивности.

2. При непрерывных токах дросселя потеря устойчивости проектным режимом сопровождается зарождением квазипериодических колебаний огибающей тока и напряжения и резким ростом размаха колебаний вектора переменных состояний, что сопровождается катастрофической перегрузкой полупроводниковых приборов.

3. Бифуркационные процессы вблизи границы непрерывных и прерывистых токов характеризуются циклическими сменами доминирующих режимов работы, причем каждая смена доминирующего режима представляет собой жесткую бифуркацию.

### Литература

1. Булатов О.Г. Тиристорно-конденсаторные преобразователи / О.Г.Булатов, А.И. Царенко. – М.: Энергоатомиздат, 1982. – 216 с.
2. Бородин К.В. Математическое моделирование динамики инвертирующего DC/DC преобразователя напряжения / К.В. Бородин, С.Г. Михальченко // Доклады ТУСУРа. – 2008. – № 2 (18), ч. 2. – С. 150–156.
3. Алейников О.А. Исследование локальной устойчивости периодических режимов в нелинейных импульсных системах / О.А. Алейников, В.С. Баушев, А.В. Кобзев, Г.Я. Михальченко // Электричество. – 1991. – № 4. – С. 16–21.
4. Баушев В.С. Стохастичность в динамике стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием / В.С. Баушев, Ж.Т. Жусубалиев, С.Г. Михальченко // Электричество. – 1996. – № 3. – С. 69–75.
5. Бородин К.В. Определение области устойчивости проектного режима инвертирующего DC/DC преобразователя напряжения // Всерос. науч.-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР». – Томск: ТУСУР, 2010. – С. 129–131.

---

#### Бородин Кирилл Валерьевич

Аспирант каф. промышленной электроники, ТУСУРа  
Тел.: 8-903-953-82-65  
Эл. почта: bkirill@hotmail.ru

#### Михальченко Сергей Геннадьевич

Канд. техн. наук, доцент каф. промышленной электроники, ТУСУРа  
Тел.: 8-913-826-09-07  
Эл. почта: msg@ie.tusur.ru

#### Михальченко Геннадий Яковлевич

Д-р техн. наук, профессор каф. промышленной электроники ТУСУРа,  
директор НИИ Промышленной электроники  
Тел.: (382-2) 41-32-32  
Эл. почта: kpe-tusur@yandex.ru

Borodin K.V., Mikhachenko S.G., Mikhachenko G.Ya.

#### Bifurcations in the dynamics of inverting converter

The paper presents the research results of the nonlinear phenomena causing possible dynamic modes of one of perspective structures of semi-conductor converters with dispensing of energy, which is transferred in loading. For the first time there are analyzed the revealed steady periodic, quasiperiodic and chaotic fluctuations of voltage and currents of the inverting converter, their area of existence and bifurcation borders of the calculated variety of dynamic modes. The numerical-analytical method of the analysis of key converters provides the reliability of calculations for long numerical series, in case of either continuous or breaking currents of the inductive store of energy.

**Keywords:** bifurcation, design mode, stability areas, border of dynamic modes, dynamic chaos.