

УДК 004.67

В.А. Толстунов, П.В. Степанец

Нелинейный усредняющий фильтр с экспоненциальным преобразованием

Предлагается алгоритм цифрового сглаживающего фильтра со скользящим окном, использующий экспоненциальную обработку входных значений сигнала. Предложенный алгоритм исследуется аналитически в случае, когда мешающий шум является суммой гауссовской и импульсной помех. Приведены результаты цифрового моделирования работы данного фильтра.

Ключевые слова: фильтр, мешающий шум, оценка параметров, погрешность фильтрации, цифровое моделирование.

Введение

Рассмотрим задачу построения цифрового фильтра для восстановления детерминированного одномерного сигнала, искаженного наличием аддитивных помех.

При решении в пространственной области этой задачи находится такая вычислительная процедура, которая для восстановления сигнала в выбранной точке учитывает также значения сигнала из заданной окрестности исходной точки. Данную окрестность обычно называют апертурой фильтра или маской. В частности, в качестве выходного сигнала фильтра часто используется некоторое среднее значение входных отсчетов сигнала из апертуры [1, 2].

Большое развитие получил подход [1, 2], когда фильтр рассматривается как линейная система, для которой, согласно заданному критерию оптимальности, находится частотная характеристика. Частотные фильтры нашли широкое применение не только для восстановления полезных сигналов при наличии аддитивных помех, но и для устранения таких искажений, которые приводят, в частности, к «смазу» полезного сигнала.

В настоящей работе в отличие от классического подхода, задача определения выходного сигнала фильтра рассматривается как статистическая задача оценки неизвестных параметров.

Получение и анализ алгоритма фильтрации

Пусть на вход фильтра с длиной апертуры $n+1$ поступают дискретные сигналы $x_i = s_i + n_i$, $i = 1, 2, \dots$, где $s_i = s(t_i)$ – отсчеты полезного детерминированного сигнала, $n_i = n(t_i)$ – отсчеты мешающего шума. Будем полагать, что в пределах апертуры фильтра значения полезного сигнала s_i практически одинаковы. Это предположение оправдано, по крайней мере, при высокой частоте дискретизации сигнала $x(t)$ и малых значениях апертуры. Тогда $x_i = s_k + n_i$, $i \in (k-n/2, \dots, k, \dots, k+n/2)$.

По значениям входного сигнала из апертуры $(x_{k-n/2}, \dots, x_k, \dots, x_{k+n/2})$ будем определять значение выхода фильтра y_k , которое рассматриваем как статистическую оценку неизвестного полезного сигнала s_k . При этом в качестве исходной выборки возьмем вектор $(f(x_{k-n/2}), \dots, f(x_k), \dots, f(x_{k+n/2}))$, где $f(x)$ – некоторая монотонная дифференцируемая функция, которая будет определять характер нелинейной фильтрации.

Используя подход статистического метода наименьших квадратов, отличие выходного сигнала y_k от значений x_i из апертуры будем характеризовать величиной

$$R_k = \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} (f(x_i) - f(y_k))^2 \quad (1)$$

и в качестве выходного сигнала фильтра возьмем такое y_k , которое минимизирует расстояние (1). Решая уравнение $\frac{\partial R_k}{\partial y_k} = 0$, получим

$$y_k = f^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} f(x_i) \right). \quad (2)$$

Выберем для $f(x)$ экспоненциальную зависимость вида

$$f(x) = \exp(-\alpha x), \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

Тогда из (2) для выхода фильтра будем иметь

$$y_k = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} \exp(-\alpha x_i) \right). \quad (3)$$

Рассмотрим сглаживающие свойства фильтра (3). Для этого найдем прежде закон распределения и числовые характеристики сигнала (3). Для определенности будем полагать, что мешающий шум $n(t)$ является аддитивной смесью независимых стационарной гауссовской $\xi(t)$ и импульсной $\eta(t)$ помех. При этом считаем, что $\xi(t)$ имеет нулевое среднее значение и дисперсию σ^2 , а $\eta(t)$ принимает два значения: 0, $A > 0$ с вероятностями соответственно p , $q = 1 - p$.

Используя известную формулу полной вероятности [3], для плотности распределения входного сигнала x_i при сделанных предположениях относительно модели входного сигнала можно получить

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(p \exp \left\{ -\frac{(x-s_i)^2}{2\sigma^2} \right\} + q \exp \left\{ -\frac{(x-s_i-A)^2}{2\sigma^2} \right\} \right), \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (4)$$

Согласно центральной предельной теореме теории вероятностей [3] полагаем, что при $n \gg 1$ случайная величина

$$Z_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} \exp(-\alpha x_i)$$

распределена по нормальному закону

$$p_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_k^2} (x - m_k)^2 \right). \quad (5)$$

Зная плотность вероятностей (5), можно по известным [3] соотношениям найти плотность вероятностей выходного сигнала $y_k = -\frac{1}{\alpha} \ln Z_k$

$$p_y(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\alpha x} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_k^2} (e^{-\alpha x} - m_k)^2 \right), \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (6)$$

Для числовых характеристик $M(Z_k) = m_k$, $D(Z_k) = \sigma_k^2$, используя (4), при $A \gg 1$, $p > q$ можно получить

$$m_k = p e^{-\alpha s_k} e^{\frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}}, \quad (7)$$

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{n+1} p e^{-2\alpha s_k} e^{2\alpha^2 \sigma^2} \left(1 - p e^{-\alpha^2 \sigma^2} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\sigma_k}{m_k} = \sqrt{\frac{1}{(n+1)p} \left(e^{\alpha^2 \sigma^2} - p \right)}. \quad (9)$$

Согласно (9) при $n \gg 1$, $\sigma^2 \ll 1$, $0 \ll p \leq 1$ можно считать, что

$$\frac{\sigma_k}{m_k} \ll 1. \quad (10)$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию сигнала на выходе фильтра. Используя (6), будем иметь

$$M(y_k) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma_k}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\alpha x} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_k^2}(e^{-\alpha x} - m_k)^2\right) dx, \quad (11)$$

$$D(y_k) = M(y_k^2) - (M(y_k))^2. \quad (12)$$

Из (11), (12) при условии (10) можно получить

$$M(y_k) = -\frac{1}{\alpha} \ln m_k - \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\sigma_k}{m_k}\right)^2, \quad (13)$$

$$D(y_k) = -\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\sigma_k}{m_k}\right)^2 \ln m_k. \quad (14)$$

Используя теперь (7), (8), для математического ожидания и дисперсии выхода фильтра находим приближенные соотношения

$$M(y_k) = s_k - \frac{1}{\alpha} \ln p - \alpha \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{2\alpha(n+1)} \left(\frac{1}{p} e^{\alpha^2 \sigma^2} - 1\right), \quad (15)$$

$$D(y_k) = \frac{1}{\alpha^2(n+1)} \left(\frac{1}{p} e^{\alpha^2 \sigma^2} - 1\right) \left(\alpha s_k - \ln p - \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}\right). \quad (16)$$

Рассмотрим частные случаи формул (15), (16).

1. $\sigma^2 = 0$, $p = 1$, т.е. во входном сигнале шумы отсутствуют. Тогда

$$M(y_k) \Big|_{\sigma^2 = 0, p = 1} = s_k, \quad D(y_k) \Big|_{\sigma^2 = 0, p = 1} = 0,$$

что естественно ожидать.

2. $\sigma^2 = 0$, $0 < p < 1$ – на полезный сигнал воздействует только импульсный шум. Тогда

$$M(y_k) \Big|_{\sigma^2 = 0, p < 1} = s_k - \frac{1}{\alpha} \ln p - \frac{1}{2\alpha(n+1)} \frac{q}{p},$$

$$D(y_k) \Big|_{\sigma^2 = 0, p < 1} = \frac{q}{p} \frac{1}{\alpha^2(n+1)} (\alpha s_k - \ln p).$$

Из этих соотношений видно, что наличие импульсного шума приводит к сдвигу и разбросу выходного сигнала фильтра относительно полезного s_k . Вместе с тем влияние импульсного шума можно ослабить за счет увеличения параметра нелинейности фильтра α , так как при $p \neq 0$

$$M(y_k) \Big|_{\sigma^2 = 0, p < 1} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} s_k, \quad D(y_k) \Big|_{\sigma^2 = 0, p < 1} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0.$$

3. $\sigma^2 \neq 0, p = 1$ – на полезный сигнал воздействует только гауссовский шум. Тогда

$$M(y_k) \Big|_{\sigma^2 \neq 0, p = 1} = s_k - \alpha \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{2\alpha(n+1)} \left(e^{\alpha^2 \sigma^2} - 1\right),$$

$$D(y_k) \Big|_{\sigma^2 \neq 0, p = 1} = \frac{1}{\alpha^2(n+1)} \left(e^{\alpha^2 \sigma^2} - 1\right) \left(\alpha s_k - \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}\right).$$

Из последних формул видно, что наличие гауссовского шума тоже приводит к появлению сдвига и разброса выхода фильтра относительно s_k , которые тем больше, чем больше дисперсия σ^2 . Это влияние гауссовского шума можно ослабить за счет уменьшения параметра α .

Действительно, так как $\frac{e^{\alpha^2 \sigma^2} - 1}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$, $\frac{e^{\alpha^2 \sigma^2} - 1}{\alpha^2} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \sigma^2$, то

$$M(y_k) \Big|_{\sigma^2 \neq 0, p = 1} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} s_k, \quad D(y_k) \Big|_{\sigma^2 \neq 0, p = 1} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0.$$

Отметим также, что при $\alpha \ll 1$ фильтр (3) близок к линейному фильтру скользящего усреднения.

Моделирование

Фильтр (3) был промоделирован численно в среде программирования Matlab 6.5. В качестве тестового сигнала был выбран прямоугольный импульс с высотой ступеньки 0,5, на который аддитивно наносились смоделированные численно гауссовский и импульсный шумы. Гауссовский шум имел нулевое математическое ожидание и дисперсию $\sigma^2 = 0,01$, а импульсный шум мог принимать одно из значений: 0, $A > 0$ с вероятностями соответственно $p, 1-p$. Результат фильтрации характеризовался погрешностью $R = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - s_k)^2$, где N – число отсчетов тестового сигнала.

На рис. 1 показан прямоугольный импульс, на который наложен импульсный шум с параметрами $p = 0,6$, $A = 0,5$. Среднее квадратичное отклонение R зашумленного сигнала от тестового составило 0,1175. На рис. 2 показан прямоугольный импульс, на который наложен гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = 0,01$. При этом отклонение R зашумленного сигнала от тестового составило 0,0078.

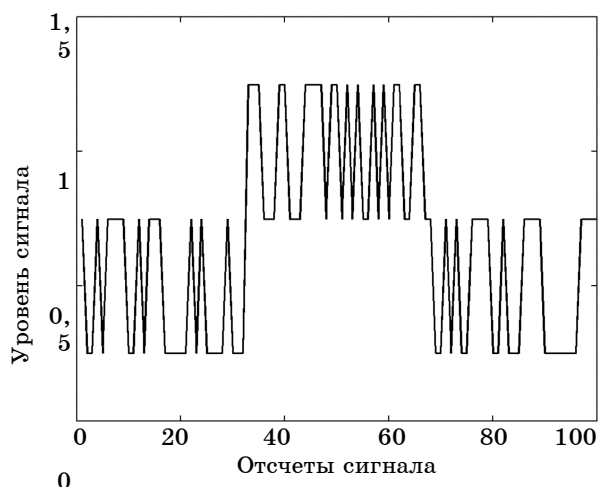


Рис. 1. Наложение импульсного шума

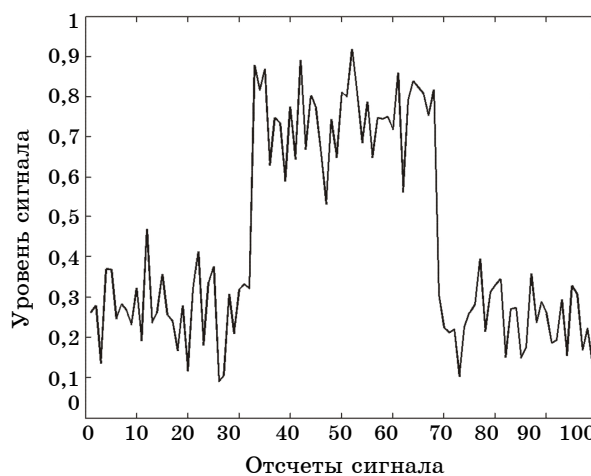


Рис. 2. Наложение гауссовского шума

На рис. 3 и 4 показаны результаты подавления импульсного шума соответственно фильтром (3) и медианным фильтром.

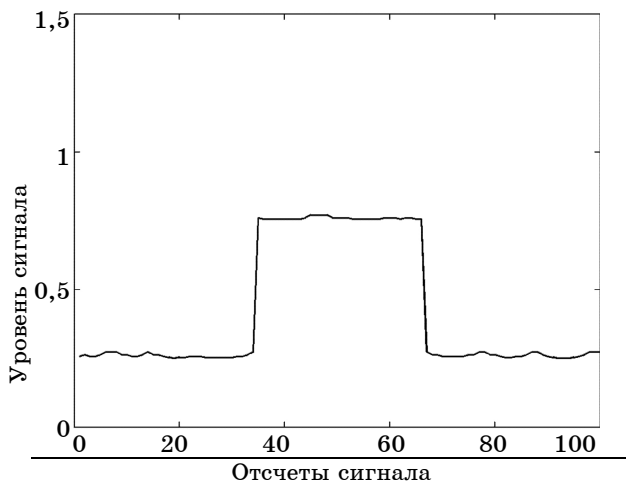


Рис. 3. Подавление импульсного шума фильтром (3) при $n+1=5$, $\alpha=70$, $R=0,0094$

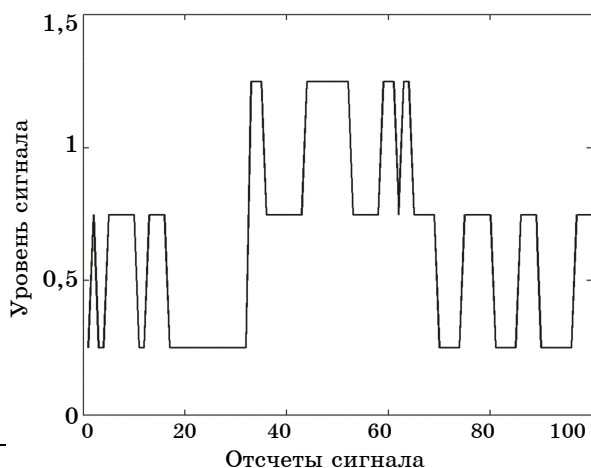


Рис. 4. Подавление импульсного шума медианным фильтром при $n+1=5$, $R=0,1075$

На рис. 5 и 6 показаны результаты подавления гауссовского шума фильтром (3) и медианным фильтром.

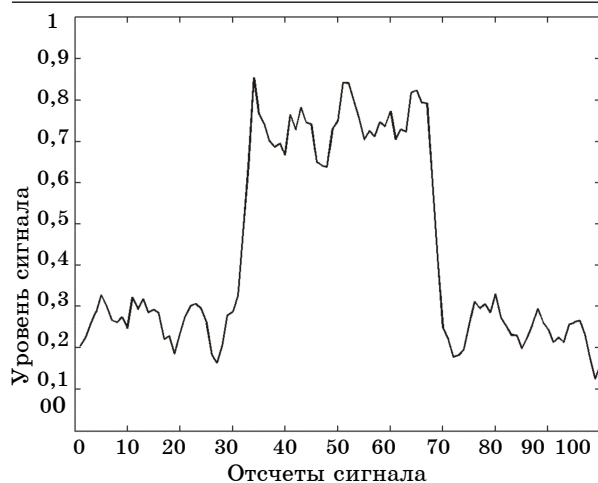


Рис. 5. Подавление гауссовского шума фильтром (3) при $n+1=3$, $\alpha=1$, $R=0,0035$

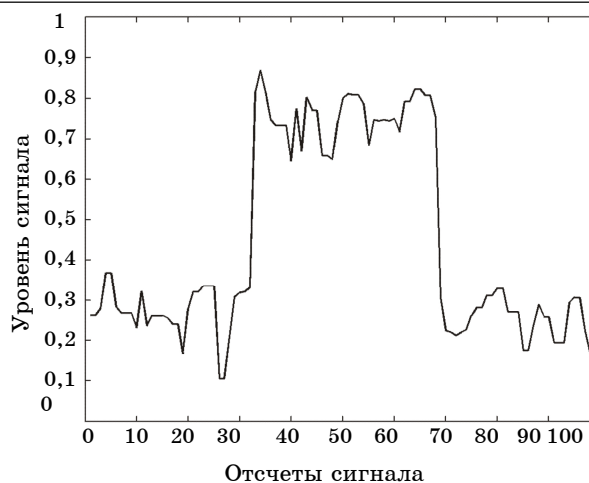


Рис. 6. Подавление гауссовского шума медианным фильтром при $n+1=3$, $R=0,0054$

Как видно из приведенных рисунков, исследуемый фильтр лучше, чем медианный подавляет оба вида мешающих шумов, причем при фильтрации импульсного шума его преимущество существенно. Моделирование показало также, что при малой вероятности появления импульсного шума сглаживающие свойства обоих фильтров близки. В случае, когда импульсный шум имеет отрицательную амплитуду для параметра α фильтра (3), следует выбирать отрицательные значения.

Заключение

Таким образом, использованный в работе подход к построению цифрового фильтра позволил получить алгоритм с хорошими сглаживающими свойствами. Этот алгоритм допускает различные обобщения и может быть также использован для обработки изображений.

Литература

1. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.
2. Гольденберг Л.М. Цифровая обработка сигналов / Л.М. Гольденберг, Б.Д. Матюшкин, М.Н. Поляк. – М.: Радио и связь, 1990. – 256 с.
3. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

Толстунов Владимир Андреевич

Канд. техн. наук, доцент каф. автоматизации исследований и технической кибернетики
 Кемеровского госуниверситета
 Тел.: +7-903-943-91-99
 Эл. почта: vat@bk.ru

Степанец Павел Вячеславович

Аспирант каф. автоматизации исследований и технической кибернетики
 Кемеровского госуниверситета
 Тел.: +7-904-965-00-35
 Эл. почта: pahhan.ne@mail.ru

V.A. Tolstunov, P.V. Stepanets

Nonlinear averaging filter on the basis of exponential transformation

The algorithm of digital smoothing filter with slithering window is offered, which uses exponential processing of input values of the signal. The offered algorithm is analyzed analytically when disturbing noise is an amount of the normal and pulsed components. The results of digital modeling of the given filter are shown.

Keywords: filter, disturbing noise, estimation, inaccuracy of filtering, digital modeling.