

УДК 531/534.01:51-72

О.И. Черепанов, Р.О. Черепанов, А.А. Никанкин

Трехмерная математическая модель механического поведения тонкостенных конструкций двойкой кривизны при квазистатических нагрузках

Предложена модификация трехмерной численной схемы расчета конструкций сложной формы, основанная на вариационной постановке квазистатических задач механики, отличающаяся улучшенной сходимостью решения по сравнению со схемами, основанными на аппроксимации производных в элементах прямоугольной формы.

Ключевые слова: вариационные уравнения, упругость, пластичность, устойчивость, аппроксимация, матрица, проектирование.

1. Введение

Сложная форма и нелинейность процессов деформации конструкций двойкой кривизны приводят к тому, что повышение точности их проектирования возможно только на основе численных методов решения трехмерных нелинейных задач теории упругости и пластичности. Примером таких конструкций является тор с поперечным сечением эллиптической формы. Конструкции в виде сферического сегмента, цилиндров эллиптического сечения, эллипсоидов можно рассматривать как частный случай тора. Область применения результатов решения таких задач достаточно широка: проектирование упругих элементов измерительных приборов, баков, туннелей или горных выработок, исследование механического поведения автомобильных шин.

Эффективным численным методом решения таких задач является вариационно-разностный метод. Однако далеко не всякая численная схема, пригодная для решения двумерных задач прочности и устойчивости, может быть обобщена на трехмерный случай. В данной работе предлагается модификация вариационно-разностного метода для решения трехмерных квазистатических задач прочности и устойчивости конструкций двойкой кривизны, построенная на основе вариационных уравнений Лагранжа [1].

2. Вариационные уравнения

Вариационное уравнение Лагранжа [1] для расчета параметров напряженно-деформированного состояния конструкций в области упругих и упругопластических деформаций имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \iiint_{V^{(n)}} C_{ijkl}^* (\Delta_{kl}^\alpha + \Delta_{lk}^\alpha) u_\alpha^{(n)} (\Delta_{ji}^\beta + \Delta_{ij}^\beta) \delta u_\beta^{(n)} dV - \iiint_{V^{(n)}} (\bar{P}_\beta^{(n-1)} + \Delta \bar{P}_\beta) \delta u_\beta^{(n)} dV + \\ & + \frac{1}{2} \iiint_{V^{(n)}} (\sigma_{ij}^{(n-1)} - \beta_{ij}^* \Delta T) (\Delta_{ji}^\beta + \Delta_{ij}^\beta) \delta u_\beta^{(n)} dV - \iint_{S_\sigma^{(n)}} (\bar{R}_\beta^{(n)} + \Delta \bar{R}_\beta) \delta u_\beta^{(n)} dS = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{P}_\beta^{(n-1)} + \Delta \bar{P}_\beta$, $\bar{R}_\beta^{(n-1)} + \Delta \bar{R}_\beta$ – компоненты векторов массовых и поверхностных сил на очередном шаге (n) по нагрузке; $u_\alpha^{(n)}$, $\delta u_\beta^{(n)}$ – приращения компонент вектора перемещений и их вариации; $(\Delta_{kl}^\alpha + \Delta_{lk}^\alpha) u_\alpha^{(n)}$ – тензор приращения деформаций; $\sigma_{ij}^{(n-1)}$ – тензор напряжений; ΔT – приращение температуры, C_{ijkl}^* , β_{ij}^* – тензоры касательных модулей и термических напряжений.

На части боковой поверхности S_u в уравнении (1) заданы кинематические ограничения вида

$$u_\alpha^{(n)} = \bar{u}_\alpha, \quad \delta u_\alpha^{(n)} = 0. \quad (2)$$

Определяющие уравнения для деформируемого тела записываются в виде линеаризованных соотношений

$$\Delta^* \sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}^* (\Delta_{kl}^\alpha + \Delta_{lk}^\alpha) u_\alpha^{(n)} - \beta_{ij}^* \Delta T. \quad (3)$$

В области упругих деформаций тензор $C_{ijkl}^* = C_{ijkl}^T$ совпадает с тензором изотермических упругих постоянных анизотропного тела [2]. В пластической области тензор C_{ijkl}^* зависит от вида функции пластичности. Тензор β_{ij}^* зависит от коэффициентов термического расширения, касательных модулей и температуры (см., например, [3–4]).

Наряду с декартовой системой $OX_1X_2X_3$ вводится система координат $O\gamma\psi\theta$ (рис. 1, а). Здесь θ – угловая координата, которая определяет положение сечения, ортогонального оси тора; ψ – угловая координата, отсчитываемая вдоль меридиана; γ – координата, отсчитываемая от внутренней поверхности трубки по внешней нормали; a , b – полуоси эллипса (рис. 1, б).

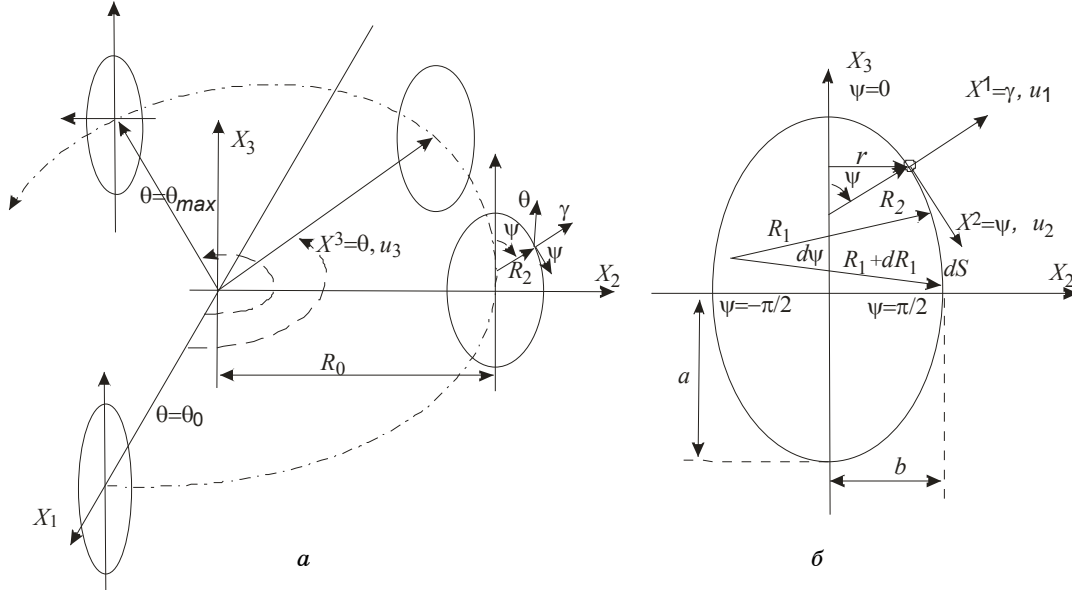


Рис. 1. Декартова $OX_1X_2X_3$ и специальная $O\gamma\psi\theta$ системы координат для расчета тора эллиптического сечения

Тензор малых деформаций ϵ_{ij} в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x^1}, \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2 / \partial x^2}{(R_1 + x^1)} + \frac{u_1}{(R_1 + x^1)}, \epsilon_{33} = \frac{(\partial u_3 / \partial x^3 + u_1 \sin x^2 + u_2 \cos x^2)}{[R_0 + (R_2 + x^1) \sin x^2]}, \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} - \frac{u_2}{(R_1 + x^1)} \right], \epsilon_{31} = \frac{1}{2} \left[\frac{(\partial u_1 / \partial x^3 - u_3 \sin x^2)}{[R_0 + (R_2 + x^1) \sin x^2]} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1} \right] \\ \epsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\partial u_3 / \partial x^2)}{(R_1 + x^1)} + \frac{(\partial u_2 / \partial x^3 - u_3 \cos x^2)}{[R_0 + (R_2 + x^1) \sin x^2]} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Вариационное уравнение Лагранжа [1] для оценки устойчивости напряженно-деформированного состояния имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \iiint_{V^{(n)}} C_{ijkl}^* (\Delta_{kl}^\alpha + \Delta_{lk}^\alpha) u_\alpha^* (\Delta_{ji}^\beta + \Delta_{ij}^\beta) \delta u_\beta^* dV + \\ & + \frac{1}{2} \iiint_{V^{(n)}} \sigma_{ij}^{(n)} [(\Delta_{jm}^\beta \delta u_\beta^*) (\Delta_{im}^\alpha u_\alpha^* + (\Delta_{im}^\beta \delta u_\beta^*) (\Delta_{jm}^\alpha u_\alpha^*)] dV + \\ & - \frac{1}{2} \iiint_{V^{(n)}} \beta_{ij}^* \Delta T^* (\Delta_{ji}^\beta + \Delta_{ij}^\beta) \delta u_\beta^* dV - \iiint_{V^{(n)}} \bar{P}_\beta^* \delta u_\beta^* dV - \iint_{S_\sigma^{(n)}} \bar{R}_\beta^* \delta u_\beta^* dS = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

здесь u_α^* , \bar{P}_β^* , \bar{R}_β^* , ΔT^* – перемещения, массовые и поверхностные силы, изменение температуры соответственно, которые соответствуют появлению смежной формы равновесия на очередном шаге по нагрузке.

3. Вариационно-разностная схема

Суть вариационно-разностного метода заключается в том, что расчетная область покрывается конечно-разностной сеткой, в узлах которой необходимо найти перемещения, вызванные действующими на конструкцию внешними силами. Непрерывные значения искомых перемещений и их производных заменяются их конечно-разностными аналогами, выражающими деформации и напряжения в элементах сетки через значения перемещений в узлах. Такая замена приводит к тому, что вариационные уравнения (1), (5) порождают две системы алгебраических уравнений относительно компонент вектора перемещений в каждом узле:

$$A\bar{x} = \bar{b}, \tag{6}$$

$$\left[A - B(\bar{\sigma}^*) \right] \bar{x}^* = 0, \det \left[A - B(\bar{\sigma}^*) \right] = 0, \tag{7}$$

где A – симметричная ленточная положительно определенная матрица коэффициентов, \bar{x} – «обобщенный» вектор узловых перемещений, \bar{b} – вектор свободных членов (нагрузки), которые соответствуют исходной форме равновесия, $B(\bar{\sigma}^*)$ – симметричная матрица, зависящая от достигнутого уровня напряжений в конструкции, \bar{x}^* – вектор узловых перемещений, соответствующий появлению смежной формы равновесия.

Из системы уравнений (6) можно найти узловые перемещения, а затем и другие параметры напряженно-деформированного состояния. Уравнения (7) позволяют найти критические значения напряжений $\bar{\sigma}^*$ и соответствующую форму потери устойчивости (вектор \bar{x}^*).

Для решения уравнений (6), (7) использовался метод Гаусса. Однако при расчете конструкций двоякой кривизны в трехмерной постановке задачи выяснилось, что далеко не всякая аппроксимация позволяет получить достаточно точное решение при относительно слабых кинематических ограничениях на границах расчетной области. По результатам предварительных проверок различных, формально – одинаковых по точности, аппроксимирующих соотношений, можно сказать, что свойства [а значит, и успех в решении систем (6), (7)] матриц коэффициентов A , $[A - B(\bar{\sigma}^*)]$ зависят как от порядка точности аппроксимирующих соотношений, так и от правил «сборки» коэффициентов при неизвестных в этих уравнениях. С учетом этих результатов предлагается разностная схема, основанная на аппроксимации пространственных производных в пределах тетраэдра – основного элемента сетки, по формулам:

$$\overline{\text{grad}f} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\iint_S f d\bar{S}}{\iiint_V dV} \cong \frac{(f_{i_1} + f_{i_2} + f_{i_3}) d\bar{S}_{i_1 i_2 i_3}}{3dV} + \frac{(f_{i_1} + f_{i_3} + f_{i_4}) d\bar{S}_{i_1 i_3 i_4}}{3dV} + \frac{(f_{i_1} + f_{i_4} + f_{i_2}) d\bar{S}_{i_1 i_4 i_2}}{3dV} + \frac{(f_{i_4} + f_{i_3} + f_{i_2}) d\bar{S}_{i_4 i_3 i_2}}{3dV}. \tag{8}$$

Здесь f – дифференцируемая функция, $d\bar{S}_{i_j i_k i_l}$ – компоненты вектора внешней нормали к грани тетраэдра с вершинами $i_j i_k i_l$, dV – объем тетраэдра, а компоненты градиента скалярной функции f определяют разностные аналоги соответствующих пространственных производных этой функции, в частности компонент вектора перемещений. Схема нумерации узлов, которая соответствует формуле (8), показана на рис. 2.

Схема разбиения расчетной области в целом представлена на рис. 3. Здесь каждая линия сетки изображает соответствующую ось специальной системы координат (см. рис. 1).

В соответствии с этой схемой перемещениям каждого узла сетки, для которого записывается одна строка в системах уравнений (6), (7), и каждому неизвестному в этой строке соответствует сумма коэффициентов при узловых перемещениях всех тетраэдров, примыкающих к этой вершине. При этом имеется два типа («а» и «b») узлов, для кото-

рых записываются соответствующие уравнения (строки) систем (6), (7) и которые отличаются количеством примыкающих к ним тетраэдров.

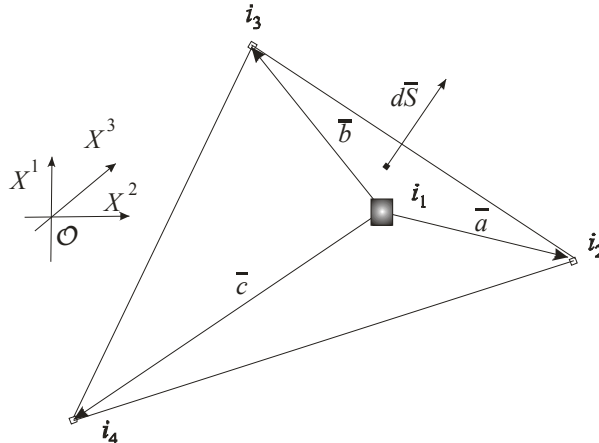


Рис. 2. Шаблон 3D-схемы: нумерация вершин тетраэдра:

$d\vec{S} = \vec{a} \times \vec{b} / 2$ – векторный элемент площади грани тетраэдра, $dV = (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} / 6$ – его объём

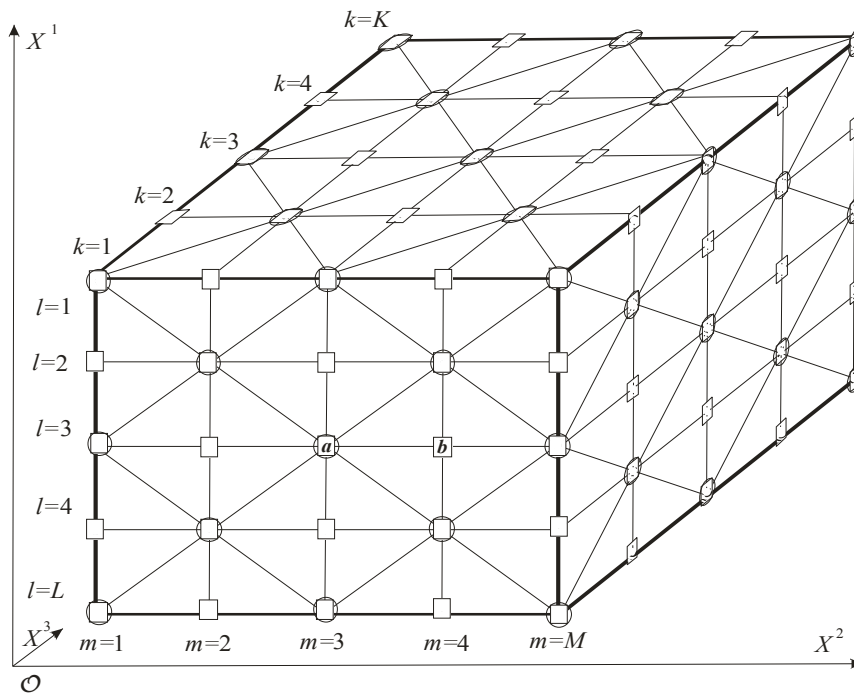


Рис. 3. Шаблон 3D-схемы: два типа окружения узлов варьирования

Для трехмерных задач при таком разностном шаблоне чередующиеся в шахматном порядке узлы варьирования оказываются в центре многогранника (32 грани в общем случае) или октаэдра (рис. 4, 5).

На рис. 4, 5 узлы варьирования перемещений выделены дополнительным черным прямоугольником. Прямоугольниками серого цвета помечены узлы сетки, которые дают вклад в коэффициенты при неизвестных перемещениях в соответствующей строке систем (6), (7). Здесь же приведен вариант нумерации узлов и ячеек, окружающих узел варьирования, удобный при программировании алгоритма расчета.

Предложенная технология построения конечно-разностных аналогов уравнений (1), (5) позволяет существенно улучшить сходимость разностной схемы и точность решения соответствующих уравнений вида (6), (7) для разных типов закрепления краев в трехмерных задачах. Следует отметить, что этот результат хорошо согласуется с результатами работы [5], где, в частности, указывается на возможность вообще отказаться от требования сплошного заполнения расчетной области ячейками сетки и использовать «ажурные» схемы решения трехмерных задач.

На рис. 4, 5 узлы варьирования перемещений выделены дополнительным черным прямоугольником. Прямоугольниками серого цвета помечены узлы сетки, которые дают вклад в коэффициенты при неизвестных перемещениях в соответствующей строке систем (6), (7). Здесь же приведен вариант нумерации узлов и ячеек, окружающий узел варьирования, удобный при программировании алгоритма расчета.

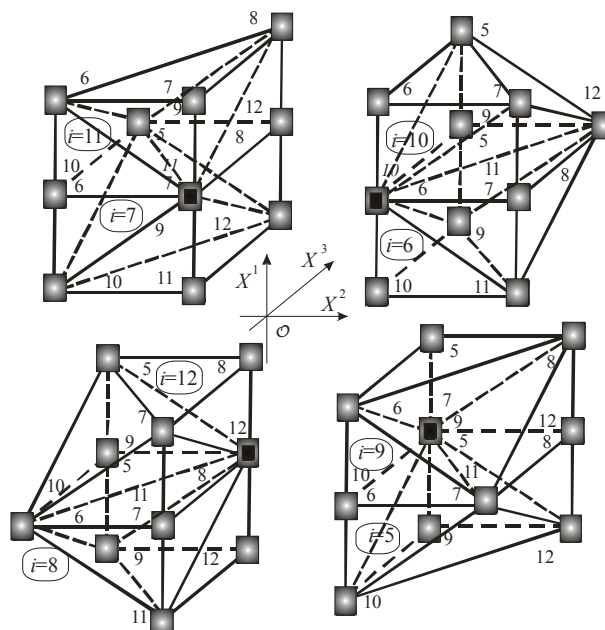


Рис. 4. Многогранник, окружающий узел варьирования типа «а» – 14 плоских граней в исходном состоянии, 32 грани после деформации

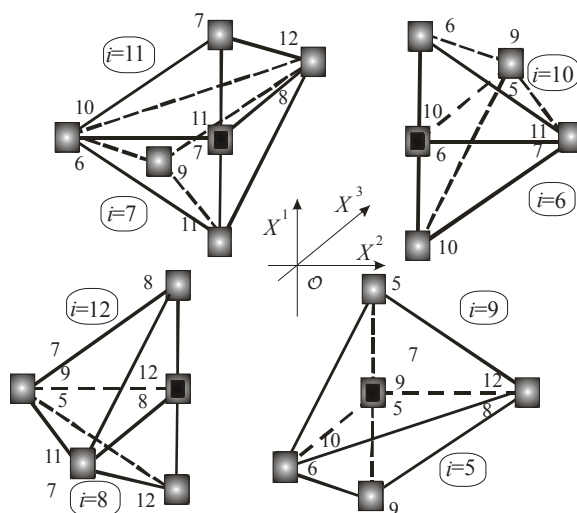


Рис. 5. Октаэдр, окружающий узел варьирования типа «b»

Предложенная технология построения конечно-разностных аналогов уравнений (1), (5) позволяет существенно улучшить сходимость разностной схемы и точность решения соответствующих уравнений вида (6), (7) для разных типов закрепления краев в трехмерных задачах. Следует отметить, что этот результат хорошо согласуется с результатами работы [5], где, в частности, указывается на возможность вообще отказаться от требования сплошного заполнения расчетной области ячейками сетки и использовать «ажурные» схемы решения трехмерных задач.

4. Результаты тестовых расчетов

На основе описанной методики разработан комплекс программ для расчета трехмерного напряженно-деформированного состояния тел вращения и оценки устойчивости тонкостенных конструкций двойкой кривизны. Как пример области приложения этих ре-

зультатов можно рассматривать задачи проектирования трубок Бурдона, которые являются первичным элементом датчиков давления. С целью тестирования предложенного алгоритма были использованы результаты аналитических расчетов и экспериментальные данные [6] для зависимости от внутреннего давления P хода стальных пружин с различной высотой $H = 2b$ и шириной профиля $B = 2a$, радиуса $R = 22,25$ мм, углом раствора $\gamma_0 = \theta_{\max} = 265^\circ$. Численное решение в сравнении с экспериментальными данными и аналитическим решением представлено в таблице (h – толщина стенки). Точность решения можно признать удовлетворительной. При этом следует отметить высокую чувствительность пружины к форме профиля.

В качестве примера решения задачи устойчивости на основе предложенной схемы была рассмотрена задача расчета критических нагрузок и форм потери устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии, изученная ранее теоретически и экспериментально.

Данные сравнительных расчетов хода трубчатой пружины

P , кгс/см ²	B , мм	H , мм	h , мм	Ход, мм		
				Эксперимент	Численное решение	Аналитическое решение
80	9,6	3,3	0,6	1,8÷2,5	1,9÷2,2	2,65
100	9,8	3,4	0,675	1,8÷2,5	1,7÷2,0	2,48
150	10,0	3,6	0,775	1,8÷2,5	2,0÷2,4	2,55
200	10,15	3,75	0,85	1,8÷2,5	1,8÷2,1	2,77
250	10,2	3,85	0,925	1,8÷2,5	2,3÷2,7	2,56
300	10,35	4,0	0,975	1,8÷2,5	2,8÷3,2	2,66
400	10,6	4,2	1,1	1,8÷2,5	2,8÷3,2	2,45

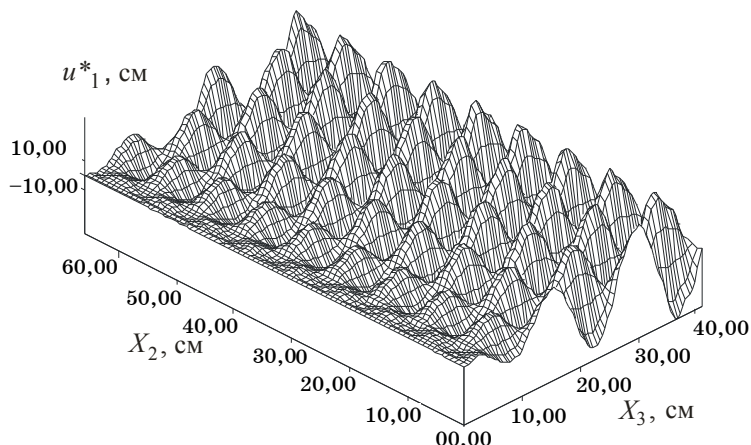


Рис. 6. Форма потери устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии (X_3 – осевая координата, X_2 – развертка по окружности)

На рис. 6 показана расчетная форма потери устойчивости стальной цилиндрической оболочки длиной $L = 0,4$ м, радиусом $R = 0,1$ м, толщины $h = 6,9 \times 10^{-4}$ м при осевом сжатии. Эти результаты по точности практически полностью совпадают с результатами работы [4], в которой этот пример подробно рассматривался ранее в сопоставлении с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными по значениям критической нагрузки и форме потери устойчивости. Имеет место хорошее количественное совпадение критических нагрузок, найденных экспериментально, аналитическим и численным методами.

5. Заключение

Таким образом, предложена и апробирована трехмерная математическая модель и модификация численной схемы для исследования механического поведения конструкций сложной геометрической формы при квазистатических нагрузках. Основное отличие рассмотренной схемы от использованных ранее заключается в применении комбинированной, двойственной, схемы сборки коэффициентов систем разностных уравнений. Это улучшает свойства глобальных матриц коэффициентов разностных уравнений и характеристики сходимости.

Литература

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
3. Драгон А. Континуальная модель пластически-хрупкого поведения скальных пород и бетона / А. Драгон, З. Мруз // Механика деформируемых твердых тел. Направления развития. – М.: Мир, 1983. – С. 163–188.
4. Черепанов О.И. Численное решение некоторых квазистатических задач мезомеханики. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003. – 190 с.
5. Чекмарев Д.Т. Автоматическое построение и анализ конечно-разностного представления вариационно-разностных и КЭ схем: учеб.-метод. материал по программе повышения квалификации «Информационные технологии и компьютерное моделирование в математике и механике». – Н. Новгород, 2007. – 88 с.
6. Справочник конструктора точного приборостроения / под ред. д-ра техн. наук проф. Ф.Л. Литвина. – М.; Л.: Машиностроение, 1964. – 943 с.

Черепанов Олег Иванович

Д-р ф.м.н., профессор каф. электронных систем автоматизации и управления ТУСУРа
Тел.: (8-382-2) 41-47-69, 8-906-958-33-91
Эл. почта: oi_cherepanov@mail.ru

Черепанов Роман Олегович

Аспирант каф. механики деформируемого твердого тела ТГУ
Эл. почта: cro096@ngs.ru

Никанкин Александр Александрович

Аспирант каф. электронных систем автоматизации и управления ТУСУРа
Тел.: (8-382-2) 41-47-69

O.I. Cherepanov, R.O. Cherepanov, A.A. Nikankin

3D mathematical model of mechanical behaviors of double curved shell structures under quasi-static loading

Tree-dimensional numerical scheme is modified for modeling of mechanical behavior of thin-shell construction with complex geometry. The model is based on the variational statement of the quasi-static problem of solids mechanics. Calculation methods is based on the usage of the tetrahedral finite different mesh and have a better convergence character compared to scheme based on the approximation of space derivatives with spatial rectangular grid.

Keywords: variational equations, elasticity, plasticity, stability analysis, approximation, matrix, project.