УДК 654.02

А.В. Пуговкин, А.Ю. Антонова, И.А. Заречная, Е.С. Матылицкая, Н.И. Муслимова, Я.В. Непомнящих

Моделирование монопольных услуг

На основе системы нелинейных дифференциальных уравнений была разработана и реализована в пакете Math Lab модель поведения монопольной телекоммуникационной услуги с учетом следующих факторов: тарифы, реклама, привлекательность услуги, постоянные и переменные затраты.
На основе полученных результатов возможно проведение оптимизации постоянных затрат предприятия. Продолжение развития темы разобранной в данной статье позволит перейти и к анализу модели конкурентного рынка телекоммуникационных услуг, со многими видами услуг.
Ключевые слова: монопольная услуга, система нелинейных дифференциальных уравнений, компьютерная модель, абоненты, прибыль, затраты.

Задачей данной работы является прогнозирование поведения на рынке телекоммуникационных услуг, их оптимизация с целью экономии и повышения прибыли.

В работе рассмотрены результаты дальнейших исследований математического моделирования монопольных услуг [1] или монопольного производства товара на примере телекоммуникационной сферы. Как правило, это такие услуги, которые не привлекают внимание бизнеса в силу низкой экономической эффективности и требуют заметных капитальных затрат. К таким услугам можно отнести сельскую связь, отдельные виды цифровой связи, например ISDN. Кроме того, рассмотрение монопольных объектов позволяет отработать методы исследований с тем, чтобы потом применять их и для конкурентных услуг.

В основу математического моделирования положено применение системы дифференциальных балансных уравнений для числа абонентов n_1, получающих услугу, и прибыли P, полученной оператором связи. Основная цель исследований – прогнозирование развития услуги во времени t и анализ условий, способствующих увеличению прибыли при оптимизации затрат.

Запишем систему уравнений для n_1 и P [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dn_1}{dt} = W_{01}\cdot(n_0 - n_1) - W_{10}\cdot n_1, & (1) \\ \dfrac{dP}{dt} = n_1\cdot d_{\text{ср}} - R_s - R_{\text{об}} - R_{\text{р}}, & (2) \end{cases}$$

где W_{01} и W_{10} – вероятности того, что абонент начал или прекратил получать услугу соответственно; n_0 – число потенциальных абонентов; $n_1 d_{\text{ср}}$ – это доход, полученный в данном месяце от n_1 абонентов при среднем доходе от одного, равном $d_{\text{ср}}$; R_s, $R_{\text{об}}$ и $R_{\text{р}}$ – расходы в данном месяце на оплату труда, оборудование и рекламу соответственно.

Рассмотрим теперь элементы развития модели, исследованной ранее [1].

1. Число потенциальных абонентов n_0 предполагается зависящим от времени $n_0(t)$. Эта зависимость может быть возрастающей (рост спроса), например: $n_0(t) = n_{0\text{ст}}\cdot(1+\alpha\cdot\frac{t}{T})$, или убывающей (кризис): $n_0(t) = n_{0\text{ст}}\cdot e^{-a\cdot\frac{t}{T}}$, где T – отчетный период, α – коэффициент пропорциональности, а также может менять характер при регулировании тарифов, или расходов.

2. Коэффициент W_{01}, отвечающий за приток абонентов, будет теперь не только функцией текущего времени t, но и функцией времени задержки τ.

$$W_{01}(t,\tau) = W_{01}^0 + \gamma_n\cdot n_1(t-\tau_n) + \gamma_{\text{р}}\cdot(R_{\text{р}0} + \beta_{\text{р}}\cdot P(t-\tau_{\text{р}})) . \quad (3)$$

Здесь W_{01}^0 определяет долю абонентов, приходящих к оператору за услугой, независимо от внешних факторов (реклама и др.). Член $\gamma_n\cdot n_1$ соответствует «неявной» рекламе (информация от соседей, знакомых) и зависит от числа абонентов, уже получающих ус-

лугу. Однако реакция на полученную информацию приходит с некоторой задержкой во времени τ_n. Третий член определяет рекламу, затраты на которую делятся на постоянные R_{p0} и зависящие от прибыли. Последняя составляющая также влияет на приход абонентов с задержкой τ_p.

Влияние тарифов на W_{01} можно моделировать с помощью коэффициента γ_p, уменьшение которого будет эквивалентно росту тарифов.

На вероятность того, что абоненты перестают получать услугу W_{10}, влияют низкое качество услуги (невнимательность персонала и плохое оборудование) и высокие тарифы:

$$W_{10} = W_{10}^0 + \xi_s(1 - \frac{R_s}{2R_{sср}}) \cdot 2 \cdot R_{sср} + \xi_{об}(1 - \frac{R_{об}}{2 \cdot R_{обср}}) \cdot 2 \cdot R_{обср} + \xi_т \cdot P_{тср}. \quad (4)$$

В (4) W_{01}^0 – доля абонентов, прекративших получать услугу, независимо от ее содержания. Это случайные люди, абоненты, сменившие место жительства. $P_{sср}, R_{обср}$ – константы, отражающие средний уровень затрат за выбранную единицу времени. $P_{тср}$ – средний тариф. $\xi_s, \xi_{об}, \xi_т$ – коэффициенты, показывающие долю влияния затрат на оплату труда, оборудование, тарифов на уход абонентов.

При моделировании все расходы будем разделять на постоянные и переменные. Постоянная часть не зависит от объемов услуг и прибыли. Переменная часть предполагает линейную зависимость.

$$R_s = R_{s0} + \alpha_s \cdot n_1(t), \quad (5)$$

$$R_{об} = R_{об0} + \alpha_{об} \cdot n_1(t + \tau_{об}), \quad (6)$$

$$R_p = R_{p0} + \beta_p \cdot P \cdot (t - \tau_p), P > 0, \quad (7)$$

где $R_{s0}, R_{об0}, R_{p0}$ – постоянные затраты на оплату труда, оборудование, рекламу; $\alpha_s, \alpha_{об}$ – коэффициенты пропорциональности затрат на оплату труда и оборудование от числа абонентов; $\tau_{об}, \tau_p$ – временные задержки.

Здесь также может быть введено время задержки ($-\tau$) или опережение ($+\tau$). Под опережением понимаем факт, что для того чтобы увеличить абонентскую базу, вначале нужно закупить и установить оборудование. Кроме того, в выражении (7) переменная часть расходов на рекламу существует только для $P > 0$, т.е. когда прибыль превышает расходы. Подставляя (3)–(7) в (1), (2), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dn_1}{dt} = A_0 n_0 + \Gamma n_1 - \Delta_2 n_1^2 + \Delta_{пр} n_0 P - \Delta_{пр} n_1 P, \\ \dfrac{dP}{dt} = -R_0 + D_1 n_1 - \beta_p P, \end{cases} \quad (8)$$

где $A_0 = W_{01}^0 + \gamma_p R_{po}$, $\Gamma = \gamma_n n_0 - (W_{10}^0 + W_{01}^0) - \varsigma_s R_{S0} - \gamma_p R_{p0} - \varsigma_т P_{т.ср}$, $\Delta_2 = \varsigma_s \alpha_s + \gamma_n$, $\Delta_{пр} = \gamma_p \beta_p$, $R_0 = R_{so} + R_{oo} + R_{po}$, $D_1 = d_{ср} - \alpha_s - \alpha_{об}$.

Выясним математические особенности полученной модели. Вначале рассмотрим линейный случай, когда $\beta_p = 0$ и $\Delta_2 = 0$.

Анализ систем второго порядка показывает, что решение всегда имеет вещественные корни и колебательный режим исключен. Типичные зависимости для n_1 и P приведены на рис. 1.

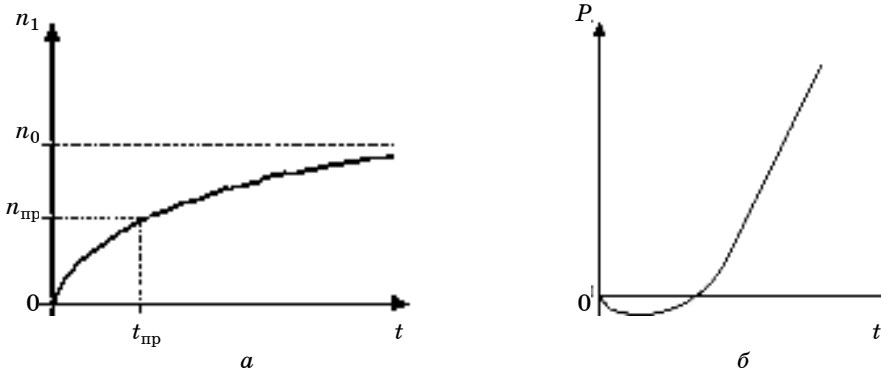

Рис. 1. Развитие абонентской базы (*а*) и динамика нарастания прибыли (*б*)

Из рис. 1,*а* видно, что зависимость развития абонентской базы состоит из двух фаз – фазы роста и фазы насыщения. Увеличение численности потенциальных абонентов проявляется в увеличении прибыли и более быстром её нарастании. Поведение прибыли с нарастающим итогом приведено на рис. 1,*б*.

По мере того как нарастает абонентская база, доходы начинают превалировать над расходами, крутизна нарастания прибыли увеличивается.

Рассмотрим теперь влияние нелинейных членов в модели ($\beta_р \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$). Для этого используем систему компьютерного моделирования Matlab. Значения исходных параметров будем использовать такие же, как и в работе [1]:

$$n_0 = 500;\ W_{01} = 2\cdot 10^{-2};\ W_{01}^0 = 2\cdot 10^{-3};\ \gamma_р = 1{,}6\cdot 10^{-5}.$$

Исходное соотношение расходов R_s:$R_{об}$:$R_р$ = 3:5:2, а постоянные расходы относятся к переменным как 1:1. Далее $\gamma_р = 1{,}6\cdot 10^{-5}\ \dfrac{1}{\text{тыс. руб.}}$, $\alpha_s = 0{,}127\ \dfrac{\text{тыс. руб.}}{\text{аб.}}$, $\alpha_{об} = 0{,}21\ \dfrac{\text{тыс. руб.}}{\text{аб.}}$, $\beta_р = 0{,}15$, $d_{ср} = 1{,}4\ \dfrac{\text{тыс. руб.}}{\text{аб.}}$ за единицу времени.

Далее в качестве примера будем рассматривать развитие монопольной услуги ISDN в одной географической зоне (район города). При этом воспользуемся ежеквартальными статистическими данными предприятия–оператора связи по этой услуге.

Типичные зависимости для n_1 и P приведены на рис. 2.

Рассмотрим влияние коэффициента $\Delta_{пр}$. Этот коэффициент напрямую отражает зависимость от расходов на рекламу и равен $\Delta_{пр} = \gamma_р\beta_р$. В семействе кривых параметром является $\beta_р$. Меняя значение $\Delta_{пр}$, получим семейство характеристик (рис. 2).

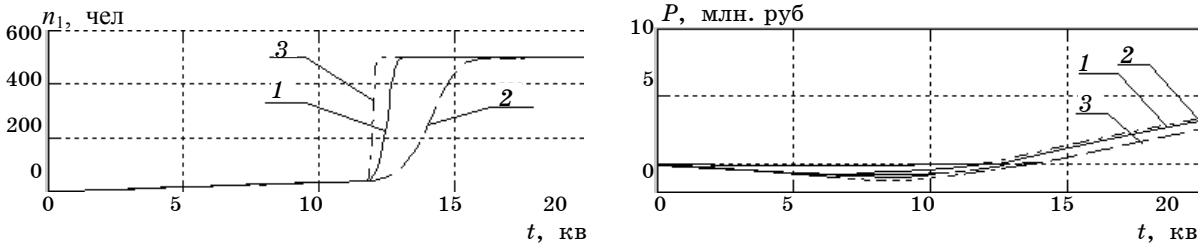

Рис. 2. Семейство зависимостей для числа абонентов n_1, получающих услугу, и прибыли P при изменении коэффициента $\Delta_{пр}$: *1* – $\Delta_{пр} = 5{,}12\cdot 10^{-5}$, *2* – $\Delta_{пр} = 5{,}12\cdot 10^{-6}$, *3* – $\Delta_{пр} = 5{,}12\cdot 10^{-4}$

Сравнение рис. 1 и 2 показывает, что нелинейный режим проявляется в трех фазах: 1 – прибыль отрицательна, абоненты прирастают медленно; 2 – прибыль положительна, абоненты прирастают быстро за счет явной и неявной рекламы; 3 – рост абонентской базы прекращается, а рост прибыли замедляется, так как затраты на рекламу и оборудование менее эффективны.

Для нелинейного режима характерен «триггерный» эффект, когда на второй фазе прирост абонентов резко увеличивается. Скорость этого прироста зависит от коэффициента $\Delta_{пр}$. В то же время зависимости для прибыли менее подвержены влиянию нелинейности, хотя отклонение от линейной зависимости имеет место.

Далее проанализируем влияние разных факторов на динамику бизнес-процессов. Вначале рассмотрим изменение соотношения затрат (рис. 3).

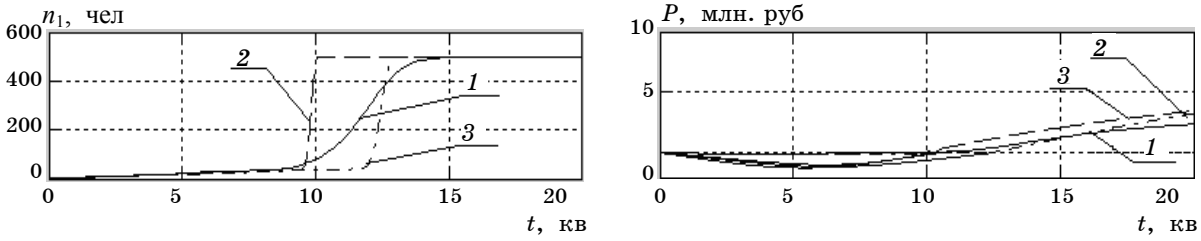

Рис. 3. Семейство зависимостей для числа абонентов n_1, получающих услугу, и прибыли P при изменении соотношений затрат

На рис. 3: *1* – зависимость числа абонентов и прибыли при внутренних затратах на заработную плату, оборудование и рекламу как 30–50–20% (при соотношении постоянных и переменных расходов как 1:1); *2* – 30–60–10% (при соотношении постоянных и переменных расходов как 1:1); *3* – 30–60–10% (при соотношении постоянных и переменных расходов как 8:2).

Из рис. 3 видно, что чрезмерное увеличение рекламы на третьей фазе приводит к замедлению роста прибыли либо совсем к прекращению роста. Это объясняется тем, что после того как абонентская база сформировалась, расходы на рекламу, как постоянные, так и переменные, нерациональны. Это хорошо иллюстрируется кривой *3*, где доля расходов на рекламу сокращена до 10%. Одновременно сокращена доля переменных расходов. Вместе с тем точка, в которой прибыль равна нулю, смещается вправо, что задерживает момент окупаемости затрат.

Рассмотрим теперь влияние параметра $A_0 = W_{01}^0 + \gamma_р \cdot R_{р0}$. Этот параметр отражает сразу три фактора: *1* – привлекательность услуги (W_{01}^0); *2* – влияние тарифов через коэффициент $\gamma_р$; *3* – влияние постоянной части расходов на рекламу $R_{р0}$.

Семейство кривых для разных значений параметра A_0 приведены на рис. 4.

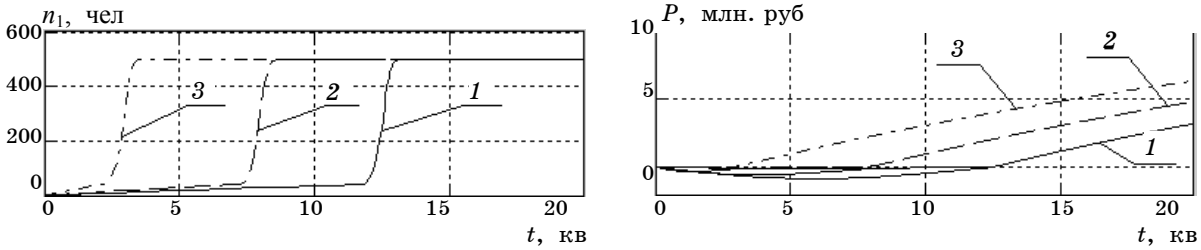

Рис. 4 Семейство зависимостей для числа абонентов n_1, получающих услугу, и прибыли P при изменении коэффициента A_0: *1* – $A_0 = 7{,}76 \cdot 10^{-3}$, *2* – $A_0 = 12{,}5 \cdot 10^{-3}$, *3* – $A_0 = 40 \cdot 10^{-3}$

Увеличение A_0 ведет к возрастанию числа абонентов на первой фазе и ранней окупаемости расходов. С практической точки зрения целесообразно увеличивать $R_{р0}$ и снижать тарифы на первом этапе. Увеличение тарифов приводит к смещению участка быстрого роста абонентов (вторая фаза) вправо. Есть критический тариф, когда абоненты игнорируют услугу.

Кроме этого нами проанализировано влияние суммарных расходов R_0 и времени задержки $\tau_р$. Получены вполне объяснимые результаты, когда при увеличении R_0 и $\tau_р$ все характерные точки на графиках смещаются вправо.

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Полученная модель является адекватной, поскольку зависимости для числа абонентов и прибыли соответствуют поведению реальных систем.

2. Нелинейность системы уравнений проявляется прежде всего в возможности быстрого роста абонентской базы при активизации явной и неявной рекламы.

3. Эффективность рекламы неодинакова на разных стадиях развития услуги. Затраты на рекламу необходимо увеличивать во время интенсивного прироста абонентской базы. В стадии насыщения затраты на рекламу необходимо сокращать.

4. Для быстрой «раскрутки» услуги необходимо уменьшать тарифы на первых стадиях жизненного цикла.

5. Дальнейшее развитие модели целесообразно проводить, разбивая временной процесс на 3 фазы, в каждой из которых значения некоторых параметров различны. Это, например, могут быть $\gamma_р$, $\xi_{т.ср}$ и др. Для разных временных интервалов решения согласуются с помощью граничных условий.

Литература

1. Математическое моделирование регионального рынка Интернет–услуг / А.В. Пуговкин, Е.А. Венокурова, И.А. Леднева // Доклады Том. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники. – 2004. – № 2 (10). – С. 80–86.

2. Шехтман Л.Н. Системы телекоммуникаций: проблемы и перспективы. – М.: Радио и связь, 1998. – 280 с.

Пуговкин Алексей Викторович
Д-р техн. наук, зав. каф. телекоммуникаций и основ радиоэлектроники ТУСУРа
Тел.: 8-913-822-95-60
Эл. почта: pav@tomsknet.ru

Антонова Анастасия Юрьевна
Студентка гр. 146-2, РТФ, ТУСУР

Заречная Инна Александровна
Студентка гр.166, РТФ, ТУСУР

Матылицкая Екатерина Сергеевна
Студентка гр. 165-1, РТФ, ТУСУР
Тел.: 8-913-805-54-52
Эл. почта: katya-matylickaya@yandex.ru

Муслимова Надежда Игоревна
Студентка гр. 166, РТФ, ТУСУР

Непомнящих Яков Викторович
Аспирант каф. ТОР, РТФ

A.V. Pugovkin,A.Yu. Antonova,I.A. Zarechnaya,
E.S. Matylickaya, N.I. Muslimova, Ya.V. Nepomnyaschih
Modeling of the monopoly services

On the basis of the system of nonlinear differential equations a new model of the behavior of monopoly telecommunication services has been designed and implemented on software package Math Lab with provision for the following factors: tariffs, advertisements, service attraction, constant and variable expenses.
On the basis of the achieved results it is possible to optimize the constant expenses of the enterprise. The development of the subject given in the article will allow to analyze the models of competitive market of telecommunication services, with different types of services.
Keywords: monopoly service, system of nonlinear differential equations, computer model, subscribers, profit, expenses.