УДК 519.872, 519.21

А.А. Назаров, М.Г. Носова

Математическая модель процесса изменения демографической ситуации и ее исследование*

Предлагается математическая модель процесса изменения демографической ситуации в виде автономной немарковской системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и PH-распределением времени обслуживания заявок. Ее исследование выполняется методом асимптотического анализа численности заявок, обслуживаемых в системе в момент времени t. Находятся распределение вероятностей численности заявок и основные характеристики, определяющие это распределение. Показывается возможность применения разработанной модели и метода к исследованию процесса изменения демографической ситуации.

Ключевые слова: математическое моделирование, система массового обслуживания, демографическая ситуация, численность населения.

Данные демографических исследований востребованы как в экономическом планировании, так и в планировании социальной политики, например, в образовании, здравоохранении, спорте и т.д., что делает особенно актуальной задачу построения научно обоснованных демографических прогнозов. В решении этой задачи полезным является математическое моделирование.

К первым математическим моделям населения относятся детерминированные модели роста человечества, прежде всего это модели линейного, экспоненциального и гиперболического роста [1–5]. Следует отметить, что данные модели дают удовлетворительные результаты только на короткий период прогнозирования, продление же на более длительный срок не дает адекватных результатов.

Наиболее известная детерминированная модель – модель стабильного населения [1, 4, 6–9]. В такой модели население характеризуется неизменными во времени возрастными интенсивностями рождаемости, смертности и возрастной структурой. Разработку теории стабильного населения связывают с такими именами, как Л. Эйлер, Г. Кнапп, В. Лексис, Дж. Лотка, В. Борткевич, П. Лесли. Большой вклад в разработку методов практического применения модели стабильного населения внесли советские демографы С.А. Новосельский, В.В. Паевский, А.Я. Боярский, И.Г. Венецкий и др. [4]. Известны непрерывные и дискретные аналоги модели стабильного населения. В основе непрерывных моделей лежит интегральное уравнение воспроизводства населения (уравнение Лотки), в основе дискретных – матричная модель (матрица Лесли).

Современный этап развития теории стабильного населения связывают с обобщением основных выводов на случай демографических процессов с переменными интенсивностями (процессы рождаемости и смертности в виде временных рядов, случайных процессов) – А. Коул и А. Лопес, а также Р. Лии, Д. Ахлбург, З. Сайкес, М. Алхо, Б. Спенсер, Дж. Поллард, Дж. Кохен, Н. Кейфица, Х. Касвелл, Л. Гудман и др. [4, 10–11].

Значительный вклад в построении математических моделей сделан О.В. Староверовым [12]. О.В. Староверов рассматривал демографические процессы в виде марковских моделей в форме цепей Маркова. Модели естественного движения населения исследованы в дискретном и непрерывном виде, для них в [12] получены основные уравнения. В [12] О.В. Староверовым также предложена стохастическая модель развития населения с дискретным временем, учитывающая случайность как в рождаемости, так и в смертности.

Заметим, что в моделировании демографических процессов наиболее распространены детерминированные (дискретные и непрерывные) и стохастические дискретные модели. Поскольку реальные процессы развития численности населения протекают в непрерывном времени и являются стохастическими, то актуальным является построение стохастической демографической модели с непрерывным временем.

В работе для моделирования демографических процессов предлагается математическая модель, которая является оригинальной не только в демографии, но и в теории массового обслуживания, а также более адекватной демографическим процессам.

* Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» Федерального агентства по образованию РФ по проекту «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применения к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

1. Автономная система с PH-распределением времени обслуживания

В качестве математической модели процесса изменения численности женского населения рассматривается функционирование автономной немарковской системы массового обслуживания с PH-распределением времени обслуживания заявок и неограниченным числом приборов.

В такой системе каждая заявка входящего потока в момент своего поступления занимает свободный прибор и находится на нем в течение всего времени обслуживания. Продолжительность обслуживания τ каждой заявки складывается из продолжительностей конечного числа фаз

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_\nu,$$

где τ_i – продолжительность i-й фазы обслуживания. Величины τ_i являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами с параметром μ, который одинаков для всех $i = 1, 2 \ldots \nu$. Обслуживание каждой новой заявки начинается на первой фазе. Заявка, завершив обслуживание на i-й фазе, с вероятностью r_i переходит к обслуживанию на $(i + 1)$-ю фазу, а с вероятностью $1 - r_i$ завершает свое обслуживание и покидает систему. Заявка, находящаяся на i-й фазе обслуживания, с интенсивностью $b_i(t) = b(i/\mu, t)$ генерирует новые требования.

Число ν фаз обслуживания определяется достижением из первого состояния нулевого состояния цепью Маркова, заданной графом вероятностей переходов (рис. 1).

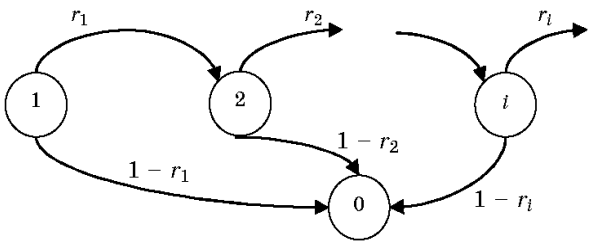

Рис. 1. Граф цепи Маркова, определяющий продолжительность обслуживания заявки

В терминах демографии обслуживаемая заявка интерпретируется как женщина, время обслуживания заявки – продолжительность жизни этой женщины, под фазой подразумевается стохастический эквивалент возраста женщины, функция $b_i(t)$ – интенсивность рождения девочек у женщины i-й фазы жизни в году t. Входящим потоком заявок является процесс рождаемости девочек, т.е. последовательность моментов рождения девочек от всей совокупности женщин.

Обозначим $n(i, t)$ – число заявок, обслуживаемых в момент времени t на i-й фазе, тогда случайный процесс

$$n(t) = \{n(1,t), n(2,t), \ldots\}^T$$

является многомерной цепью Маркова с непрерывным временем. Для ее распределения вероятностей

$$P(n_1, n_2, \ldots, t) = P\{n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, \ldots\}$$

с помощью формулы полной вероятности запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова [13]

$$\frac{\partial}{\partial t}\{P(n_1,n_2,\ldots,t)\} = -P(n_1,n_2,\ldots,t)\left\{\sum_{i=1}^{\infty} n_i\left(\mu + b_i(t)\right)\right\} + P(n_1-1,n_2,\ldots,t)\left\{(n_1-1)b_1(t) + \sum_{i=2}^{\infty} n_i b_i(t)\right\} +$$

$$+\mu\sum_{i=1}^{\infty}(n_i+1)\{P(n_1,n_2,\ldots,n_i+1,n_{i+1},\ldots,t)(1-r_i) + P(n_1,n_2,\ldots,n_i+1,n_{i+1}-1,n_{i+2}\ldots,t)r_i\}. \quad (1)$$

Обозначим характеристическую функцию числа обслуживаемых заявок в такой системе в момент времени t в виде

$$H(u,t) = M\left\{\exp\left(j\sum_{i=1}^{\infty} u_i n_i(t)\right)\right\} = \sum_{n_1,n_2,\ldots} P(n_1,n_2,\ldots,t)\exp\left\{j\sum_{i=1}^{\infty} u_i n_i(t)\right\}, \quad (2)$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Характеристическая функция $H(u, t)$ является функцией векторного аргумента $u=\{u_1, u_2, u_3, \ldots\}^T$ и скалярного аргумента t. Из системы (1) нетрудно получить равенство

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t} = j\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial H(u,t)}{\partial u_i}\left\{(1-e^{ju_1})b_i(t) + (1-e^{-ju_i})\mu + e^{-ju_i}(1-e^{ju_{i+1}})\mu r_i\right\}, \quad (3)$$

где $b_i(t) = b(i/\mu, t)$, $r_i = S(i/\mu)/S(i-1/\mu)$.

Решение $H(u, t)$ этого уравнения определяет характеристическую функцию компонент многомерного процесса $n(t)$, а следовательно, решает задачу исследования автономной системы с PH-распределением времени обслуживания.

Очевидно, что в аналитическом виде записать решение $H(u, t)$ уравнения (3) не удастся, поэтому для нахождения распределения вероятностей его значений, а также основных его характеристик воспользуемся методом асимптотического анализа [14], модифицированным к рассматриваемой задаче.

2. Исследование системы методом асимптотического анализа

Будем рассматривать уравнение (3) для характеристической функции $H(u, t)$ в асимптотическом условии большой численности групп, пропорциональных бесконечно большой величине N. В асимптотическом условии найдем характеристическую функцию числа заявок $n(t)$, обслуживаемых в системе в момент времени t.

Отметим, что асимптотики первого и второго порядков рассматриваемого метода асимптотического анализа аналогичны закону больших чисел, центральной предельной теореме и теории вероятностей [15].

2.1. Асимптотика первого порядка

Обозначив $\varepsilon=1/N$, в уравнении (3) выполним замены асимптотики первого порядка

$$u=\varepsilon w\,,\quad H(u,t)=F_1(w,t,\varepsilon)\,, \tag{4}$$

получим равенство

$$\varepsilon\frac{\partial F_1(w,t,\varepsilon)}{\partial t}=j\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial F_1(w,t,\varepsilon)}{\partial w_i}\{(1-e^{j\varepsilon w_1})b_i(t)+(1-e^{-j\varepsilon w_i})\mu+e^{-j\varepsilon w_i}(1-e^{-j\varepsilon w_{i+1}})\mu r_i\}. \tag{5}$$

В силу определения характеристической функции (2) эта замена эквивалентна рассмотрению последовательности процессов $\varepsilon n(t, \varepsilon)$, для которой можно ожидать сходимости при $\varepsilon\to 0$.

По формальному признаку наличия малого параметра ε при производной уравнение (5) можно отнести к сингулярно возмущенному уравнению [16].

Рассмотрим такой подкласс решений $H(u, t)$ уравнения (3), для которых, в силу (4), функция $F_1(w, t, \varepsilon)$ обладает следующими свойствами.

Существует конечный предел при $\varepsilon\to 0$ функции $F_1(w, t, \varepsilon)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F_1(w,t,\varepsilon)=F_1(w,t)$$

и ее производной по t и по w_i

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial F_1(w,t,\varepsilon)}{\partial t}=\frac{\partial F_1(w,t)}{\partial t},\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial F_1(w,t,\varepsilon)}{\partial w_i}=\frac{\partial F_1(w,t)}{\partial w_i},\qquad i=\overline{1,\infty}.$$

Сформулируем теорему.

Теорема 1. При $\varepsilon\to 0$ решение задачи (5) имеет вид

$$F_1(w,t)=\exp\{j\sum_{i=1}^{\infty}w_\upsilon m_\upsilon(t)\},$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица, а компоненты $m_i(t)$ являются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} m_1'(t)=-\mu m_1(t)+\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_i(t)m_i(t), \\ m_i'(t)=-\mu m_i(t)+\mu r_{i-1}m_{i-1}(t), \quad i>1, \end{cases} \tag{6}$$

где функции $m_i(t)$ имеют смысл среднего значения числа заявок $n(i, t)$, обслуживаемых в момент времени t на i-й фазе.

Доказательство теоремы опустим.

Из замен (4), для характеристической функции $Me^{jun(t)}$ величины $n(t)$ запишем асимптотическое равенство

$$H(u,t)=Me^{jun(t)}=F_1(w,t,\varepsilon)=F_1(w,t)+O(\varepsilon)=\exp\{j\sum_{\upsilon=1}^{\infty}w_\upsilon m_\upsilon(t)\}+O(\varepsilon)=\exp\{jN\sum_{\upsilon=1}^{\infty}u_\upsilon m_\upsilon(t)\}+O(\varepsilon).$$

Определение. Функцию

$$\tilde{H}_1(u,t)=\exp\Big\{jN\sum_{\upsilon=1}^{\infty}u_\upsilon m_\upsilon(t)\Big\}$$

будем называть *асимптотикой первого порядка* характеристической функции $H(u, t)$ числа заявок $n(t)$, обслуживаемых в системе с PH-распределением времени обслуживания в момент времени t.

Следует отметить, что система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (6) определяет среднее значение числа заявок, обслуживаемых в системе в момент времени t, или в терминах демографии, среднее значение численности женского населения.

2.2. Асимптотика второго порядка

Поскольку асимптотика первого порядка определяет лишь средние значения численности заявок $n(t)$, обслуживаемых в системе в момент времени t, то, естественно, возникает необходимость нахождения асимптотики второго порядка, которая позволяет получить более детальные характеристики системы.

Вернемся к уравнению (3), решение $H(u,t)$ которого запишем в виде

$$H(u,t)=e^{jNm(t)u}H_2(u,t), \tag{7}$$

где $m(t) = \{m_1(t),\ m_2(t),\ m_3(t),\ \ldots\}^{\mathrm{T}}$, $u = \{u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\}^{\mathrm{T}}$. Из (7) очевидно следует, что $H_2(u,\ t)$ является характеристическим функционалом центрированной величины $n(t) - Nm(t)$, для которого математическое ожидание равно нулю. Подставляя выражение (7) в (3), получим равенство

$$\begin{gathered}\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial t}=j\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial u_i}\left\{(1-e^{ju_1})b_i(t)+(1-e^{-ju_i})\mu+e^{-ju_i}(1-e^{-ju_{i+1}})\mu r_i\right\}-\\ -NH_2(u,t)\sum_{i=1}^{\infty}\{m_i(t)\{(1-e^{ju_1})b_i(t)+(1-e^{-ju_i})\mu+\{e^{-ju_i}(1-e^{-ju_{i+1}})\mu r_i\}+ju_im_i'(t)\}.\end{gathered} \tag{8}$$

Обозначив $\varepsilon^2=1/N$, в этом уравнении выполним замены

$$u=\varepsilon w,\qquad H_2(u,t)=F_2(w,t,\varepsilon)\,, \tag{9}$$

которые формально совпадают с заменами (4) для асимптотики первого порядка, но порядок малости параметра ε в этих асимптотиках отличается принципиально. Выполнив указанные замены, получим равенство

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\frac{\partial F_2(w,t,\varepsilon)}{\partial t}=j\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial F_2(w,t,\varepsilon)}{\partial w_i}\left\{(1-e^{j\varepsilon w_1})b_i(t)+(1-e^{-j\varepsilon w_i})\mu+e^{-j\varepsilon w_i}(1-e^{-j\varepsilon w_{i+1}})\mu r_i\right\}-\\ -F_2(w,t,\varepsilon)\sum_{i=1}^{\infty}\{m_i(t)[(1-e^{j\varepsilon w_1})b_i(t)+(1-e^{-j\varepsilon w_i})\mu+e^{-j\varepsilon w_i}(1-e^{-j\varepsilon w_{i+1}})\mu r_i]+j\varepsilon w_im_i'(t)\}.\end{gathered} \tag{10}$$

Аналогично асимптотике первого порядка рассмотрим подкласс решений $H_2(u,\ t)$ уравнения (8), для которых в силу (9) функция $F_2(w,\ t,\ \varepsilon)$ обладает следующими свойствами.

Существует конечный предел при $\varepsilon\to 0$ функции $F_2(w,\ t,\ \varepsilon)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F_2(w,t,\varepsilon)=F_2(w,t),$$

и ее производной по t и по компонентам w_i

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial F_2(w,t,\varepsilon)}{\partial t}=\frac{\partial F_2(w,t)}{\partial t},\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial F_2(w,t,\varepsilon)}{\partial w_i}=\frac{\partial F_2(w,t)}{\partial w_i},\qquad i=\overline{1,\infty}.$$

Теорема 2. Решение задачи (10) при $\varepsilon\to 0$ имеет вид

$$F_2(w,t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}w_iw_jR_{ij}(t)\right\}, \tag{11}$$

где $R_{ij}(\mathrm{t})$, $i=\overline{1,\infty}$, $j=\overline{1,\infty}$ являются решением неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases}R_{11}'(t)=-2\mu R_{11}(t)+\sum\limits_{\upsilon=1}^{\infty}b_\upsilon(t)\{R_{1\upsilon}(t)+R_{\upsilon 1}(t)\}+q_{11}(t),\\ R_{i1}'(t)=-2\mu R_{i1}(t)+\mu r_{i-1}R_{i-11}(t)+\sum\limits_{\upsilon=1}^{\infty}b_\upsilon(t)R_{i\upsilon}(t)+q_{i1}(t),\\ R_{1j}'(t)=-2\mu R_{1j}(t)+\mu r_{j-1}R_{1j-1}(t)+\sum\limits_{\upsilon=1}^{\infty}b_\upsilon(t)R_{\upsilon j}(t)+q_{1j}(t),\\ R_{ij}'(t)=-2\mu R_{ij}(t)+\mu r_{i-1}R_{i-1j}(t)+\mu r_{j-1}R_{ij-1}(t)+q_{ij}(t),\end{cases} \tag{12}$$

где функции $q_{\mathrm{ij}}(t)$ имеют вид

$$\begin{gathered} q_{11}(t)=\mu m_1(t)+\sum_{\upsilon=1}^{\infty} m_\upsilon(t)b_\upsilon(t), \\ q_{\upsilon\upsilon+1}(t)=q_{\upsilon+1\upsilon}(t)=-\mu m_\upsilon(t)r_\upsilon, \quad \upsilon=\overline{1,\infty}, \\ q_{\upsilon\upsilon}(t)=\mu m_\upsilon(t)+\mu m_{\upsilon-1}(t)r_{\upsilon-1}, \quad \upsilon=\overline{2,\infty}, \\ q_{ij}(t)=0, \quad |j-i|\geq 2, \quad i,j=\overline{2,\infty}. \end{gathered} \tag{13}$$

Доказательство теоремы приводить не будем.

Заметим, что система дифференциальных уравнений (12) совместно с (13) определяет вторые центральные моменты числа обслуживаемых заявок в системе.

В силу замены (9) и равенства (11) очевидно можно записать

$$H_2(u,t)=F_2(w,t)+O(\varepsilon)=\exp\left\{-\frac{1}{2}N\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}u_iu_jR_{ij}(t)\right\}+O(\varepsilon).$$

Подставив в (7), запишем

$$H(u,t)=e^{jNm(t)u}H_2(u,t)=\exp\{jN\sum_{\upsilon=1}^{\infty}u_\upsilon m_\upsilon(t)-\frac{1}{2}N\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}u_iu_jR_{ij}(t)\}+O(\varepsilon).$$

Определение. Функцию

$$\tilde{H}_2(u,t)=\exp\{jN\sum_{\upsilon=1}^{\infty}u_\upsilon m_\upsilon(t)-\frac{1}{2}N\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}u_iu_jR_{ij}(t)\}$$

будем называть *асимптотикой второго порядка* характеристической функции $H(u, t)$ числа заявок $n(t)$, обслуживаемых в системе с PH-распределением времени обслуживания в момент времени t.

Следствие. Распределение вероятностей величины $n(t) = \{n_1(t), n_2(t), n_3(t), \ldots\}^T$ числа заявок, обслуживаемых в системе в момент времени t, можно аппроксимировать гауссовским (нормальным) распределением с параметрами: вектор математических ожиданий $Nm(t) = \{Nm_1(t), Nm_2(t), Nm_3(t), \ldots\}^T$ и матрица ковариаций $NR = [NR_{ij}]$, где $R_{ij} = M\{(n_i(t) - Nm_i(t))(n_j(t) - Nm_j(t))\}$, $R_{ij} = R_{ji}$, $i=\overline{1,\infty}$, $j=\overline{1,\infty}$.

В работе получены асимптотики первого и второго порядков, которые являются аналогами хорошо известных в теории вероятностей предельных теорем – закона больших чисел и центральной предельной теоремы [15], поэтому условия существования асимптотик и области их применимости аналогичны условиям этих предельных теорем, применение которых считается допустимым при $N \geq 100$, в то время как в демографии численности N стандартных демографических групп имеют порядок 10^3 для регионов и 10^6 для страны в целом.

Заметим, что предложенная математическая модель более адекватна реальности [17], чем пуассоновский процесс рождаемости, например, как в [12]. Из полученных в работе результатов следуют известные ранее результаты по детерминированной модели, в то же время методы, описанные в работе, позволяют найти вторые моменты численностей демографических групп, что является необходимым для анализа сценариев развития демографической ситуации.

Заключение

Построена математическая модель процесса изменения демографической ситуации в виде автономной немарковской системы с PH-распределением времени обслуживания заявок и неограниченным числом приборов. Найдены распределение вероятностей численности заявок и основные характеристики, определяющие это распределение.

Прикладное значение работы состоит в использовании полученных результатов к исследованию сложившейся и прогнозирования будущей демографической ситуации, например в Российской Федерации.

Литература

1. Венецкий И.Г. Статистические методы в демографии. – М.: Статистика, 1977. – 207 с.

2. Kendall D.G. Stochastic processes and population growth [Электронный ресурс] // Journal of the Royal Statistical Society. – 1949. – Vol. 11, № 2. – Электрон. версия печат. публ. – Доступ из базы данных «Jstor». – URL: http://www.jstor.org (дата обращения: 11.01.2009).

3. Tuljapurkar S., Caswell H. Structured-population models in Marine [Электронный ресурс]. – third edition. – New York: Springer, 2005. – Электрон. версия печат. публ. –

Доступ из базы данных «Springerlink». – URL: http://www.springerlink.com (дата обращения: 23.04.2009).

4. Демографический энциклопедический словарь / под ред. Д.И. Валентея. – М.: Советская энциклопедия, 1985. – 608 с.

5. Капица С.П. Общая теория роста человечества: сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. – М.: Наука, 1999. – 190 с.

6. Демографические модели: сб. статей / под ред. Е.М. Андреева, А.Г. Волкова. – М.: Статистика, 1977. – 182 с.

7. Уильямсон М. Анализ биологических популяций: пер. с англ. А.Д. Базыкина; под ред. Ю.М. Свирежева. – М.: Мир, 1975. – 271 с.

8. Donald T.R. Demographic methods and concepts. – Oxford: Oxford University Press, 2006. – 523 p.

9. Hinde A. Demographic methods. – Arnold, 1998. – 305 p.

10. Lee R. Probabilistic approaches to population forecasting [Электронный ресурс] // Population and Development Review. – 1998. – Vol. 24, Supplement: Frontiers of Population Forecasting. – Электрон. версия печат. публ. – Доступ из базы данных «Jstor». – URL: http://www.jstor.org (дата обращения: 11.01.2009).

11. Booth H. Demographic forecasting: 1980 to 2005 in review [Электронный ресурс] // International Journal of Forecasting. – 2006. – № 22. – Электрон. версия печат. публ. – Доступ из базы данных «Sciencedirect». – URL: http:// www.sciencedirect.com (дата обращения: 11.01.2009).

12. Староверов О.В. Азы математической демографии. – М.: Наука, 1997. – 158 с.

13. Назаров А.А. Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 228 с.

14. Назаров А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

15. Коваленко И.Н. Теория вероятностей и математическая статистика / И.Н. Коваленко, А.А. Филиппова. – М.: Высшая школа, 1982. – 206 с.

16. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

17. Назаров А.А. О нецелесообразности аппроксимации процесса рождаемости потоками Пуассона при долгосрочном прогнозировании / А.А. Назаров, М.Г. Носова // Вестник Том. гос. ун-та. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – №3(8). – С. 75–80.

Назаров Анатолий Андреевич
Д-р техн. наук, профессор, зав. каф. теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики ТГУ
Тел.: (382-2) 52-95-99

Носова Мария Геннадьевна
Аспирант каф. теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики ТГУ
Тел.: +7-905-992-03-25
Эл. почта: nosova_mg@mail.ru

A.A. Nazarov, M.G. Nosova

The mathematical model of the process of change of a demographic situation and its research

The mathematical model of change process of a demographic situation in the form of independent non-Markov system of mass service with unlimited number of devices and PH-distribution of a holding time of applications is proposed. Its research is carried out by the method of asymptotic analysis of application number served in the system at the moment of time t. The distribution of probabilities of the number of applications and the basic characteristics defining this distribution are found. The opportunity of application of the developed model and the research method of change process of a demographic situation are shown.

Keywords: mathematical model, system of mass service, demographic situation, population.