УДК 519.653

А.В. Майстренко, А.А. Светлаков, Н.В. Старовойтов

Цифровое дифференцирование сигналов с применением многоточечных методов в системах автоматического регулирования процессов

Синтезирован оригинальный метод цифрового дифференцирования сигналов, предназначенный для использования в реальном масштабе времени. Метод основан на применении многоточечного оценивания неизвестных величин по их экспериментальным измерениям и псевдообратных матриц. Приведены некоторые результаты аналитических исследований, иллюстрирующие его работоспособность.

Ключевые слова: цифровое дифференцирование сигналов, система линейных алгебраических уравнений, матрица, псевдообращение.

1. Введение

Развитие средств современной микропроцессорной техники и снижение их стоимости открывают широкие возможности для совершенствования уже имеющихся и создания новых алгоритмов решения в реальном масштабе времени многих прикладных задач. Одной из таких задач является рассматриваемая в данной работе задача цифрового дифференцирования сигналов (ЦДС), измеряемых в реальном масштабе времени в системах автоматического регулирования. Известная особенность обсуждаемой задачи состоит в том, что она является одним из классических примеров некорректных задач.

Отмеченная особенность задачи ЦДС и её актуальность стимулируют проведение дальнейших исследований с целью создания робастных алгоритмов её решения, позволяющих получать достаточно точные и устойчивые к ошибкам задания измеряемых сигналов оценки их производных по времени. Некоторые результаты подобных исследований, выполненных авторами, излагаются в следующих разделах данной работы.

2. Постановка задачи ЦДС и формирование требований к алгоритмам ее решения

Пусть в каждый момент времени t производится одно измерение некоторого сигнала S и в каждый из них имеется $m+1$ измеренных значений

$$\tilde{S}_t = \{\, \tilde{s}_{t+1-m},\ \tilde{s}_{t+2-m}, \ldots,\ \tilde{s}_{t-1}\ , \tilde{s}_t \,\} \tag{2.1}$$

данного сигнала. Далее будем предполагать, что выполняются следующие шесть условий:

1) m – некоторое ограниченное натуральное число, значение которого мы можем выбирать с учетом наших потребностей;

2) расстояние между соседними моментами времени равно Δt и, как и число m, при необходимости мы можем его изменять;

3) каждое измеренное значение $\tilde{s}_t$ является аддитивной смесью неизвестного истинного значения s_t сигнала S и неизвестного значения ε_t ошибки его измерения, удовлетворяющее равенству

$$\tilde{s}_t = s_t + \varepsilon_t\,; \tag{2.2}$$

4) для любого момента времени t значение ε_t является одним из возможных значений непрерывной случайной величины ε_t, математическое ожидание $M\{\varepsilon_t\}$ и дисперсия $D\{\varepsilon_t\}$ которой удовлетворяют условиям вида

$$\text{а)}\ M\{\varepsilon_t\} = 0 \quad \text{и} \quad \text{б)}\ D\{\varepsilon_t\} = \sigma_t^2 < \infty\,, \tag{2.3}$$

где σ_t^2 – некоторое ограниченное неотрицательное число;

5) для любых различных моментов времени t и τ случайные величины ε_t и ε_τ являются некоррелированными случайными величинами и удовлетворяют условию

$$k\{\varepsilon_t \varepsilon_\tau\} = M\{\varepsilon_t \varepsilon_\tau\} = 0\,, \tag{2.4}$$

где $k\{\varepsilon_t \varepsilon_\tau\}$ – ковариация величин ε_t и ε_τ;

6) истинные значения s_t сигнала S удовлетворяют равенствам

$$s_t = s(t)\,, \text{ в моменты времени } \ t-m,\ t+1-m,\ t+2-m\,, \ldots,\ t-1\,,\ t\,, \tag{2.5}$$

где $s(t)$ – непрерывная и хотя бы один раз дифференцируемая функция.

Для упрощения и сокращения последующего изложения обозначим производную ds/dt сигнала S в момент времени t символом « p_t », а символом « $\tilde{p}_t$ » обозначим оценку производной p_t, вычисленную в соответствии с равенством

$$\tilde{p}_t = (\tilde{s}_{t+1-i} - \tilde{s}_{t-i})/\Delta t, \quad i = \overline{1,m}. \tag{2.6}$$

Равенство (2.6) является алгоритмом вычисления оценки $\tilde{p}_t$ производной p_t. Всюду далее будем называть его простейшим алгоритмом цифрового дифференцирования сигналов (ПАЦДС). Имея совокупность $\tilde{S}_t$ измерений сигнала S и преобразуя ее с помощью ПАЦДС, в каждый момент времени $t \geq m$ можно получить совокупность $\tilde{p}_t$, определяемую равенством вида

$$\tilde{P}_t = \{\tilde{p}_{t+1-m}, \tilde{p}_{t+2-m}, \ldots, \tilde{p}_{t-1}, \tilde{p}_t\} \tag{2.7}$$

и состоящую из m оценок производной p_t сигнала S.

Решаемая нами задача состоит в том, чтобы, используя совокупности (2.1) и (2.7), получить как можно более точную и устойчивую к ошибкам задания сигнала S оценку $\hat{p}_t$ его производной p_t в момент времени t. Данная задача служит базисом для создания различного типа автоматических систем управления процессами и объектами в реальном времени. Поэтому любой алгоритм решения данной задачи должен удовлетворять следующим трём требованиям:

а) он должен быть экономичным и обладать высоким быстродействием;

б) его применение должно обеспечивать достаточно высокую точность вычисляемой с его помощью производной дифференцируемого сигнала;

в) он должен быть предельно робастным.

Один из подобных алгоритмов синтезируется и обсуждается в последующих разделах данной работы.

3. Анализ возможностей повышения помехоустойчивости ПАЦДС и два подхода к их реализации

При наличии ошибок ε_t в измеренных значениях $\tilde{s}_t$ сигнала S погрешность оценки $\tilde{p}_t$, вычисляемой в соответствии с алгоритмом (2.6), может принимать недопустимо большие значения. Данное обстоятельство стимулирует поиск новых методов и алгоритмов её решения, обладающих более высокой помехоустойчивостью. Если задаться целью получить подобный метод, то нетрудно обнаружить, что такие возможности есть и их целый ряд. Одна из них заключается в том, чтобы каким-либо образом регуляризировать ПАЦДС (2.6) и тем самым повысить его помехоустойчивость. Данная возможность рассмотрена нами в работе [1] и там же предложен оригинальный метод регуляризации ПАЦДС. Рассмотрим еще одну из подобных возможностей. Она заключается в том, что оценка $\hat{p}_t$ производной p_t сигнала S в момент времени t вычисляется с использованием не двух измеренных значений $\tilde{s}_{t-1}$ и $\tilde{s}_t$, а, как это делается при использовании ПАЦДС, $m+1$ значений $\tilde{s}_{t-m}$, $\tilde{s}_{t+1-m}, \ldots, \tilde{s}_t$.

Как известно из теории вероятностей, математической статистики и их многочисленных приложений [2], использование многих измеренных значений случайной величины при оценивании ее вероятностно-статистических характеристик позволяет повысить точность и устойчивость вычисляемых оценок данных характеристик и сделать это тем успешнее, чем больше измеренных значений случайной величины при их вычислении используется. Здесь и в следующем разделе сведем ее реализацию к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и рассмотрим два подхода к решению полученной СЛАУ.

Прежде всего получим интересующую нас СЛАУ. Для этого воспользуемся совокупностью (2.1) и будем рассуждать и действовать следующим образом. Пусть в каждый момент времени $t \geq m+1$ у нас имеется совокупность (2.7) оценок $\tilde{p}_t$, вычисленных в соответствии с алгоритмом (2.6) в текущем и предшествующих тактах оценивания производной p_t. Всюду далее будем считать, что истинные значения производной p_t во все эти моменты времени t оставались равными одному и тому же значению p и удовлетворяли соотношению вида

$$p_{t+1-m} = p_{t-m} = \ldots = p_{t-1} = p_t = p. \tag{3.1}$$

Иначе говоря, всюду далее будем считать, что значения s_t сигнала S на интервале времени $I_t = [t-m, t]$ изменялись по линейному закону.

Воспользуемся теперь равенствами (2.6) и (3.1) и составим СЛАУ вида

$$p + \Delta p_i = \tilde{p}_i\,, \quad i = \overline{t, t+2-m}\,, \tag{3.2}$$

где p и Δp_i – неизвестные нам значения производной сигнала S и ошибки его оценивания при использовании оценки $\tilde{p}_i$. Анализируя систему (3.2), можно видеть, во-первых, что каждое её уравнение является уравнением относительно двух неизвестных p и Δp_t, первое из которых входит во все m уравнений, а второе из них в каждом уравнении имеет различные значения. Во-вторых, при любом ограниченном значении m в данную систему входит $m+1$ неизвестных и, таким образом, при любом ограниченном значении m она является недоопределённой. Введём в рассмотрение m-мерные векторы-столбцы $\mathbf{I}_m$, $\Delta\mathbf{p}_t$ и $\tilde{\mathbf{p}}_t$, определив их следующими равенствами:

$$\text{а)}\ \mathbf{I}_m = (1,1,\ldots,1)^T\,;\ \text{б)}\ \Delta\mathbf{p}_t = (\Delta p_1, \Delta p_2, \ldots, \Delta p_m)^T\ \text{ и в)}\ \tilde{\mathbf{p}}_t = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_m)^T, \tag{3.3}$$

где T – символ операции транспонирования векторов и матриц. Теперь, воспользовавшись данными векторами, представим СЛАУ (3.2) в следующем векторно-матричном виде:

$$\mathbf{I}_m\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}_t = \tilde{\mathbf{p}}_t\,. \tag{3.4}$$

В настоящее время существует два диаметрально противоположных подхода к решению данной СЛАУ. Первым из них является хорошо известный традиционный подход [3]. Поэтому детально его мы рассматривать не будем. Второй подход к решению СЛАУ (3.4), названный нами нетрадиционным подходом, является новым и малоизвестным. Его идейные основы, сущность и особенности достаточно подробно рассматриваются в последующих разделах данной работы.

4. Нетрадиционный подход к математической постановке и решению задачи ЦДС

Идейные основы рассматриваемого ниже подхода к решению СЛАУ вида (3.4) впервые были изложены в работах [1, 3] в них же рассмотрены причины, побуждающие искать возможные альтернативы традиционному подходу к решению СЛАУ, с которыми приходится сталкиваться при решении задач оценивания неизвестных величин на основе результатов прямых и/или косвенных их измерений.

Первая идея нетрадиционного подхода к решению задачи оценивания неизвестных величин и, в частности, производной p сигнала S на основе результатов их экспериментальных измерений заключается в том, что данная задача изначально формулируется как задача оценивания не только неизвестного p, но и вектора ошибок $\Delta\mathbf{p}_t$ оценивания p с использованием вектора оценок $\tilde{\mathbf{p}}_t$.

Вторая идея, лежащая в основе предлагаемого подхода к постановке и решению рассматриваемой задачи, заключается в том, что в вычислительном отношении ее решение сводится к решению СЛАУ вида

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{p}}_t\,, \tag{4.1}$$

где матрица A и вектор x определяются равенствами вида

$$\text{а)}\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & | & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & | & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & | & . & . & \ldots & . \\ 1 & | & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \text{б)}\quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} p \\ \Delta p_1 \\ \vdots \\ \Delta p_m \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Анализируя СЛАУ (4.1), нетрудно обнаружить следующие существенные с точки зрения её решения особенности.

Во-первых, при любом конечном m эта СЛАУ оказывается недоопределённой и при любом таком m для замыкания данной системы в нее необходимо и достаточно ввести еще одно уравнение, которое не является какой-либо линейной комбинацией уже имеющихся в ней уравнений.

Во-вторых, если воспользоваться m-мерным вектор-столбцом $\mathbf{I}_m$ и единичной порядка m матрицей $\mathbf{E}_m$, то матрицу $\mathbf{A}$ можно представить следующим более компактным равенством вида

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}_m \,|\, \mathbf{E}_m)\,, \tag{4.3}$$

которое является представлением матрицы $\mathbf{A}$ в виде горизонтальной двухблочной матрицы. При этом левым блоком данной матрицы является вектор $\mathbf{I}_m$, а правым – единичная порядка m матрица $\mathbf{E}_m$.

В-третьих, поскольку в качестве правого блока в равенствах (4.2а) и (4.3) фигурирует единичная матрица $\mathbf{E}_m$, то ранг r_A матрицы $\mathbf{A}$ равен m, а сама матрица $\mathbf{A}$ является строчно-невырожденной матрицей при любом ограниченном m. Отсюда вытекает, что при любом $\tilde{\mathbf{p}}_t$ СЛАУ (4.1) является совместной и имеет несчётное множество решений.

Таким образом, учитывая отмеченные особенности СЛАУ (4.1), можно сформулировать следующие два вывода:

1) переход от исходных данных (2.7) к СЛАУ (4.1) является строго последовательным и вполне корректным, а получаемая при этом СЛАУ полностью адекватна постулируемым особенностям данных (2.7);

2) отпадает необходимость решать несовместные СЛАУ.

В связи с недоопределенностью СЛАУ (4.1) возникают следующие два принципиально важных и определяющих все наши последующие действия вопроса: 1) какое конкретное решение наиболее предпочтительно использовать? 2) как выбранное с учётом тех или иных соображений решение вычислить?

Для устранения недоопределённости СЛАУ (4.1) в данном случае имеются следующие три группы способов.

1) Способы, основанные на сведении решения рассматриваемой задачи к решению задачи на условный экстремум и использовании при этом в качестве условий, при которых должен быть найден экстремум заданной функции, СЛАУ (4.1).

2) Способы, основанные на пополнении СЛАУ (4.1) ещё одним уравнением, связывающим оценку $\hat{p}_t$ производной p_t и оценку $\Delta\hat{p}_t$ ошибок её оценивания с использованием вектора $\tilde{\mathbf{p}}_t$, таким образом, чтобы новая СЛАУ оказалась совместной и имеющей единственное решение.

3) Способы, основанные на выборе из бесконечного множества решений СЛАУ (4.1) такого её решения, которое бы обладало некоторыми в каком-либо отношении полезными нам свойствами.

Ниже мы рассмотрим достаточно подробно один из методов решения СЛАУ (4.1), относящийся к третьей из перечисленных выше групп. На способах, составляющих 1-ю и 2-ю из названных выше групп, в данной работе останавливаться не будем.

Приступим теперь к изложению предлагаемого метода ЦДС и прежде всего отметим, что из всего несчетного множества решений СЛАУ (4.1) в данном методе используется ее псевдорешение x_{t+}, вычисляемое в соответствии со следующим равенством:

$$\mathbf{x}_{t+} = \mathbf{A}^{+}\tilde{\mathbf{p}}_t, \tag{4.4}$$

где $\mathbf{A}^{+}$ – псевдообратная к $\mathbf{A}$ матрица.

Выбор и использование в качестве решения СЛАУ (4.1) именно псевдорешения $\mathbf{x}_{t+}$, а не какого-либо другого ее решения $\mathbf{x}_t$, в данном случае оправдывается прежде всего тем, что оно удовлетворяет соотношению вида

$$\|\mathbf{x}_{t+}\| = \arg\min\{\|x_t\| : \mathbf{A}\mathbf{x}_t = \tilde{\mathbf{p}}_t\}. \tag{4.5}$$

Здесь символ $\arg\min\{\|\mathbf{x}_t\| : \mathbf{A}\mathbf{x}_t = \tilde{\mathbf{p}}_t\}$ (аргумент минимума) означает, что евклидова норма $\|\mathbf{x}_{t+}\|$ псевдорешения $\mathbf{x}_{t+}$ меньше евклидовой нормы $\|\mathbf{x}_t\|$ любого другого решения $\mathbf{x}_t$ системы (4.1).

Заметим, что полезность данного свойства для практических приложений обусловливается тем, что именно оно обеспечивает максимально возможную устойчивость псевдорешения $\mathbf{x}_{t+}$ к ошибкам задания вектора $\tilde{\mathbf{p}}_t$ и к ошибкам вычислений и то, что при любой правой части $\tilde{\mathbf{p}}_t$ и любой матрице $\mathbf{A}$ системы (4.1) ее псевдорешение $\mathbf{x}_{t+}$ является единственным. Как непосредственно видно из (4.4), для вычисления $\mathbf{x}_{t+}$ необходимо и достаточно иметь псевдообратную матрицу $\mathbf{A}^{+}$ и, таким образом, для завершения описания предлагаемого многоточечного алгоритма ЦДС необходимо и достаточно предложить хотя бы один какой-либо алгоритм псевдообращения матрицы $\mathbf{A}$. Для вычисления матрицы $\mathbf{A}^{+}$ в настоящее время предложен целый ряд алгоритмов, анализ возможностей применения которых в наших условиях позволяет видеть, что из всех этих алгоритмов наиболее целесообразно воспользоваться так называемым алгоритмом Гревилля [1, 4], на нем мы останавливаться не будем, так как его описание приведено во многих работах.

5. Некоторые результаты исследований многоточечного метода ЦДС

Ниже приводятся и обсуждаются некоторые результаты численных экспериментов, цель проведения которых заключалась в том, чтобы проверить работоспособность предла-

гаемого нами метода ЦДС. Все эксперименты были проведены с помощью пакета прикладных программ Matlab. При этом в качестве дифференцируемых сигналов использовались сигналы, задаваемые равенствами вида

$$a)\ S = s(t) = 1.0 \quad \text{и} \quad б)\ S = s(t) = \sin t\,. \tag{5.1}$$

Выбор в качестве тестовых именно этих сигналов оправдывается следующими соображениями.

Во-первых, с сигналами приведённого вида достаточно часто приходится иметь дело во многих реальных ситуациях и, в частности, при решении задач автоматизации различных технологических процессов и объектов. Во-вторых, изучив характеристики исследуемых методов с использованием данных сигналов, мы получаем возможность прогнозировать поведение данных методов и в других, более сложных ситуациях, когда дифференцируемые сигналы являются более сложными функциями времени.

Исследование помехоустойчивости рассматриваемых алгоритмов проводилось в условиях, когда с ошибками задавались только значения сигнала. Ошибки получались с помощью стандартной компьютерной программы, генерирующей равномерно распределенные случайные числа.

Проведенные эксперименты показали, что при всех значениях $m \geq 3$ предлагаемый нами метод вычисления производных оказывается более устойчивым к наличию шумов в дифференцируемом сигнале, чем метод, реализованный в пакете прикладных программ Matlab. При этом выяснилось также, что чем больше значение m, тем точность вычисления производной выше. Однако необходимо отметить, во-первых, что с увеличением m, к сожалению, увеличивается и его вычислительная сложность [3]. И, во-вторых, при фиксированных значениях приращений времени возможности увеличения m ограничены, поскольку ее увеличение неизбежно приведет к уменьшению точности аппроксимации сигнала. При уровне шумов, составляющем 5% истинного сигнала, предложенный алгоритм вполне работоспособен и имеет высокие точностные характеристики вычисления производных, которые в большинстве случаев удовлетворяют требованиям разработчиков различных устройств, использующих производные сигналов. Предложенный алгоритм одинаково хорошо аппроксимирует и вычисляет первые и вторые производные для обоих типов сигналов.

На рис. 5.1 и 5.2 проиллюстрирована зависимость среднеквадратического отклонения вычисленного значения второй производной от ее истинного значения при различных значениях m, для сигналов *а*) и *б*), соответственно [см. (5.1)]. Данные рисунки иллюстрирует усреднённые результаты, по достаточно большому количеству экспериментов (более 10000). Результаты для первой производной в данной работе не приводятся, в виду их схожести, и в связи с тем, что в силу известных причин они представляют меньший интерес.

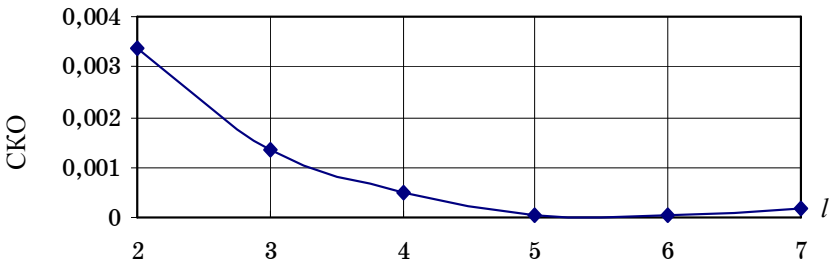

Рис. 5.1. СКО вычисленного значения второй производной от ее истинного значения при различных значениях m. Сигнал $s(t) = 1{,}0$

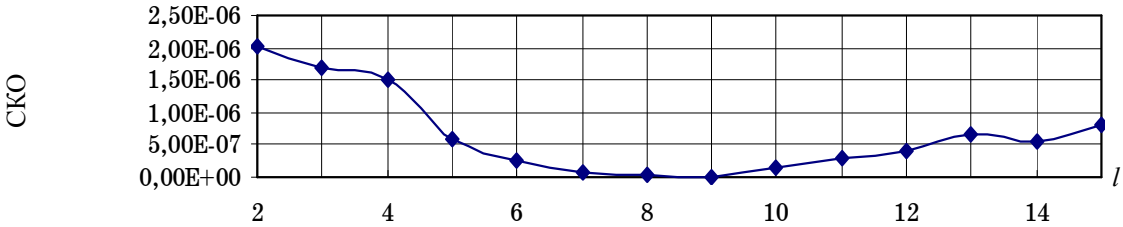

Рис. 5.2. СКО вычисленного значения второй производной от ее истинного значения при различных значениях m. Сигнал $s(t) = \sin t$

Заключение

Опираясь на результаты, представленные в предыдущих разделах, сформулируем следующие выводы:

1. Предложенные нами многоточечный метод и алгоритм ЦДС, позволяют с достаточно высокой точностью вычислять значения его первой и второй производных.

2. Данный метод имеет значительно более высокую помехоустойчивость, чем методы, основанные на использовании конечных приращений и различных интерполяционных полиномов.

3. Одновременно с перечисленными выше достоинствами, следует отметить простоту предлагаемого метода и его доступность для аппаратной и программной реализаций.

Литература

1. Светлаков А.А. Нетрадиционный подход к регуляризации плохо обусловленных линейных алгебраических уравнений // СИБКОНВЕРС '95: Труды междунар. конф. по использованию результатов конверсии науки в вузах Сибири для международного сотрудничества. Томск, 2–4 октября 1995. – Томск: ТАСУР, 1996. – Т. 1. – С. 132–133.

2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – Т. 2. – М.: Мир, 1967. – 752 с.

3. Светлаков А.А. Обобщенные обратные матрицы: некоторые вопросы теории и применения в задачах автоматизации управления процессами. – Томск: Изд-во НТЛ, 2003. – 388 с.

4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

Майстренко Андрей Васильевич
Канд. техн. наук, доцент каф. электронных систем автоматизации и управления (ЭСАУ) ТУСУРа
Тел.: 8-913-881-17-60
Эл. почта: maestro67@mail.ru

Светлаков Анатолий Антонович
Д-р техн. наук, профессор каф. ЭСАУ ТУСУРа
Тел.: 8-(382-2)-414-769
Эл. почта: iit@tusur.ru

Старовойтов Николай Владимирович
Аспирант каф. ЭСАУ ТУСУРа
Тел.: 8-(382-2)-414-769
Эл. почта: k@sibmail.ru

A.V. Maistrenko, A.A. Svetlakov, N.V. Starovoitov

Digital differentiation of signals with application of multi-point methods in systems of automatic control of processes

The original method of digital differentiation of signals for use in real time is synthesized. The method is based on application of multi-point estimation of unknowns on their experimental measurements and pseudo-inverse matrices. Some results of analytical researches, showing the efficiency of the method are given.

Keywords: digital differentiation of signals, system of the linear algebraic equations, matrix, pseudo-inversion (pseudo-manipulation).