УДК 621.396.41

Л.Л. Егоров, В.А. Кологривов

Нелинейная задача расчета зон обслуживания базовых станций

Сформулирована нелинейная задача расчета зон покрытия базовых станций сотовой сети стандарта GSM и на основе метода линеаризации нелинейных систем алгебраических уравнений Ньютона–Рафсона предложен нелинейный алгоритм метода наименьших квадратов для ее решения. Приведена оценка эффективности предложенного метода при решении задач планирования и оптимизации сети.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, нелинейная задача, итерационный алгоритм, базовая станция, зона покрытия.

Введение

Ранее [1, 2] были предложены и исследованы алгоритмы и методики расчетов оптимальных зон покрытия кластеров базовых станций сотовых сетей связи. Суть этих методов сводится к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений вида $A \cdot r = d$ методом наименьших квадратов (МНК) (1) и методом взвешенных наименьших квадратов (МВНК) (2)

$$\mathbf{r} = \left[\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}\right]^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{d}\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{r} = [\mathbf{A}_{ij}^T \cdot \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{A}_{ij}^T \cdot \mathbf{d}\,, \tag{2}$$

где $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ – матрица эластичности зон покрытия, определяемая интенсивностями нагрузок соседних БС y_i и y_j; $\mathbf{r} = |r_i|$ – вектор-столбец неизвестных, соответствующих радиусам круговых зон покрытия; $\mathbf{d} = |d_i|$ – вектор известных расстояний пролетов между соседними базовыми станциями (БС).

В обоих случаях искомыми величинами данных расчетов являются радиусы зон обслуживания $r(y_i, y_j, d_{ij})$, функционально зависящие от предполагаемых нагрузок БС y_i, y_j и расстояний пролетов между БС d_{ij}. Важно отметить, что при решении данных задач средние интенсивности нагрузок на БС y_i, y_j были величинами постоянными и независимыми от размеров зон обслуживания. Полученные при этом результаты не противоречат физическим и геометрическим представлениям.

Однако более реалистично предполагать зависимость нагрузок базовых станций, а следовательно, и коэффициентов матрицы эластичности от размеров зон обслуживания. Такая задача расчета оптимальных размеров зон покрытия является нелинейной. При этом предполагается задание двумерной плотности абонентов на обслуживаемой территории, однако здесь для простоты изложения алгоритма решения нелинейной задачи плотность абонентов ρ предполагается постоянной.

Интенсивности нагрузок БС при этом пропорциональны площадям или квадратам радиусов зон покрытия:

$$y_i = \rho \cdot S_i = \rho \cdot \pi \cdot r_i^2\,, \tag{3}$$

где ρ – плотность абонентов; S_i – площадь зоны покрытия i-й БС; r_i – радиус i-й зоны покрытия. Соответственно, элементы матрицы эластичности при этом приобретают вид

$$a_{ij} = k \cdot \frac{y_i}{y_i + y_j} = k \cdot \frac{r_i^2}{r_i^2 + r_j^2}\,, \tag{4}$$

где k – коэффициент, учитывающий влияние мощности передатчика БС, высоты подвеса антенны и т.д.

Решение нелинейной задачи предполагает задание начальных значений, в данном случае – интенсивностей нагрузок БС. В качестве начальных значений интенсивностей нагрузок БС можно использовать данные, полученные на этапе планирования сети, либо данные с контроллеров БС, принадлежащих интересующему нас кластеру (см. рис. 1), полученные в процессе эксплуатации сети предшествующей этапу оптимизации.

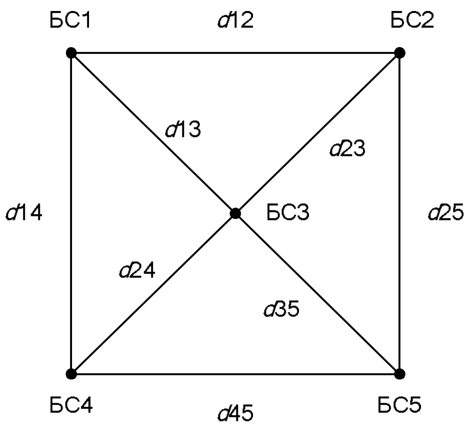

Рис. 1. Симметричный кластер (группа БС) размерностью $q=5$

В линейном случае данные о нагрузках БС y_i однозначно определяют элементы матрицы эластичности $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$, что при известных расстояниях пролетов между БС d_{ij} с использованием соотношений (1) и (2) позволяет рассчитать оптимальные размеры $r=|r_i|$ зон обслуживания БС.

В нелинейном случае задача решается итерационными методами. Здесь на каждом шаге итерации вычисляются размеры зон обслуживания и с использованием заданной плотности абонентов пересчитываются интенсивности нагрузок БС. Условием завершения итерационного процесса является уравновешивание размеров зон обслуживания и нагрузок БС, при котором значимое изменение размеров зон от итерации к итерации прекращается.

Целями данной статьи являются изложение нелинейного алгоритма МНК (НМНК), нахождение зон покрытий БС путем решения переопределенной системы нелинейных алгебраических уравнений, анализ полученных вариантов решений.

Решение переопределенной нелинейной системы

Решение переопределенных систем нелинейных уравнений может быть реализовано различными методами. Наиболее известным является алгоритм Ньютона–Рафсона, основанный на линеаризации исходной нелинейной системы уравнений [3] путем разложения нелинейной вектор-функции в окрестности предполагаемого корня в ряд Тейлора и удержании линейных членов ряда. В результате приходим к линеаризованной системе алгебраических уравнений

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})\cdot\Delta\mathbf{X}^{(k)}=-\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}), \tag{5}$$

где $\mathbf{F}'(\mathbf{X}^{(k)})=\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})$ – матрица первых производных; $\Delta\mathbf{X}^{(k)}=\mathbf{X}^{(k+1)}-\mathbf{X}^{(k)}$ – вектор приращений неизвестных или разностный вектор решений на $(k+1)$-й и k-й итерациях.

Для переопределенной исходной нелинейной системы переопределенная линеаризованная система алгебраических уравнений может быть решена методом наименьших квадратов (МНК) или (МВНК)

$$\Delta\mathbf{X}^{(k)}=-\left[\mathbf{J}^T(\mathbf{X}^{(k)})\cdot\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})\right]^{-1}\cdot\mathbf{J}^T(\mathbf{X}^{(k)})\cdot\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}). \tag{6}$$

В результате итерационная запись метода Ньютона–Рафсона или нелинейного алгоритма МНК приобретает вид

$$\mathbf{X}^{(k+1)}=\mathbf{X}^{(k)}-\left[\mathbf{J}^T(\mathbf{X}^{(k)})\cdot\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})\right]^{-1}\cdot\mathbf{J}^T(\mathbf{X}^{(k)})\cdot\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}). \tag{7}$$

Сходимость метода Ньютона-Рафсона существенно зависит от начальных значений $\mathbf{X}^{(0)}$, и для обеспечения сходимости и снижения требуемого числа итераций обычно модифицируют выражение (7)

$$\mathbf{X}^{(k+1)}=\mathbf{X}^{(k)}-t_i\cdot\left[J^T(\mathbf{X}^{(k)})\cdot J(\mathbf{X}^{(k)})\right]^{-1}\cdot\mathbf{J}^T(\mathbf{X}^{(k)})\cdot\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}), \tag{8}$$

где t_i – дополнительный коэффициент, подбираемый на каждом шаге итерации.

В нашем случае система нелинейных алгебраических уравнений и нелинейная вектор-функция имеют вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{R})\cdot\mathbf{R}=\mathbf{D}, \tag{9}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{R})=\mathbf{A}(\mathbf{R})\cdot\mathbf{R}-\mathbf{D}=0, \tag{10}$$

где $\mathbf{R}$ – вектор неизвестных (радиусов зон обслуживания); $\mathbf{A}(\mathbf{R})$ – матрица эластичности, элементы которой являются функциями радиусов; $\mathbf{D}$ – вектор расстояний пролетов БС. В покомпонентном виде нелинейное уравнение m-го пролета между i-й и j-й БС как компонент нелинейной вектор-функции имеет вид

$$f_m(r_i,r_j)=k\cdot\frac{r_i^2}{r_i^2+r_j^2}\cdot r_i+k\cdot\frac{r_j^2}{r_i^2+r_j^2}\cdot r_j-d_m, \tag{11}$$

соответственно, m-я строка матрицы первых производных содержит два отличных от нуля компонента:

$$\mathbf{J}[m,\cdots]=\left[\cdots\frac{k\cdot\left\langle r_i^2\cdot(r_i^2+3\cdot r_j^2)-2*r_i*r_j^3\right\rangle}{(r_i^2+r_j^2)^2}\cdots\frac{k\cdot\left\langle r_j^2\cdot(r_j^2+3\cdot r_i^2)-2*r_j*r_i^3\right\rangle}{(r_i^2+r_j^2)^2}\cdots\right]. \tag{12}$$

Таким образом, нелинейная задача расчета зон покрытия сети сотовой связи может быть решена нелинейным методом наименьших квадратов, основанным на линеаризации нелинейных систем уравнений методом Ньютона–Рафсона.

Постановка задачи исследования

Решение нелинейной задачи будем находить, используя MatLab [4]. Расчет зон покрытий произведем на примере симметричного (рис. 1) и несимметричного (рис. 2) кластеров с равномерной нагрузкой на БС.

Для симметричного кластера расстояния между БС равны $d_{12}=d_{25}=d_{45}=d_{14}=10$ км, $d_{13}=d_{23}=$ $=d_{35}=d_{34}=7{,}071$ км; для несимметричного – $d_{12}=$ $=d_{14}=10$ км; $d_{13}=d_{23}=d_{34}=7{,}07$ км; $d_{25}=d_{45}=12{,}61$ км; $d_{35}=9{,}89$ км. Далее сравним результаты решения нелинейной задачи нахождения зон покрытий БС с аналогичными вычислениями, полученными ранее в [2, 3] по методу наименьших квадратов (МНК) и модифицированному методу взвешенных наименьших квадратов (ММВНК).

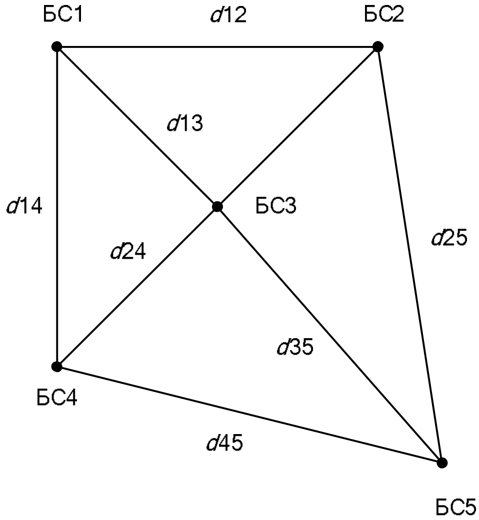

Рис. 2. Несимметричный кластер (группа БС) размерностью q=5

Количественную и качественную оценку произведем по значению величины «нормы» Δ [1], которая показывает суммарную среднеквадратическую ошибку решения. Слагаемые нормы, то есть разности суммы радиусов зон обслуживания пары БС и расстояния между этой парой, пропорциональны площадям перекрытия/недопокрытия:

$$\Delta=\sqrt{\sum((r_i+r_j)-d_{ij})^2}\ , \tag{13}$$

где Δ – суммарная среднеквадратическая ошибка решения; r_i и r_j – радиусы зон обслуживания соответствующих БС$_i$ и БС$_j$; d_{ij} – пролет между БС$_i$ и БС$_j$.

Варианты решений

При равномерной плотности абонентов на местности для симметричного кластера исследованы различные варианты решений. Наилучший результат вычислений по величине наименьшей среднеквадратической ошибки приведен в сравнительной табл. 1.

Таблица 1

Оценка зон покрытий БС для симметричного кластера

Метод вычисления	Величина Δ по МНК		Величина Δ по ММВНК		Величина Δ по методу Ньютона–Рафсона	
	Δ	Радиусы БС, км	Δ	Радиусы БС, км	Δ	Радиусы БС, км
Нагрузка на БС $y_{1-5}=1$ Эрл	$5{,}4\cdot10^{-15}$	$r_1=5$ $r_2=5$ $r_3=2{,}071$ $r_4=5$ $r_5=5$	$5{,}4\cdot10^{-15}$	$r_1=5$ $r_2=5$ $r_3=2{,}071$ $r_4=5$ $r_5=5$	0,0259	$r_1=4{,}9523$ $r_2=4{,}9523$ $r_3=2{,}3518$ $r_4=4{,}9523$ $r_5=4{,}9523$

Результаты вычислений для несимметричного кластера при тех же исходных данных приведены в табл. 2.

Таблица 2

Оценка зон покрытий БС для несимметричного кластера

Метод вычисления	МНК		ММВНК		Метод Ньютона–Рафсона	
	Δ	Радиусы БС, км	Δ	Радиусы БС, км	Δ	Радиусы БС, км
Нагрузка на БС $y_{1-5} = 1$ Эрл	0,645 7	r_1 =5,0665 r_2 =4,9311 r_3 =2,2706 r_4 =4,6699 r_5 =8,0963	0,6457	r_1 =5,0665 r_2 =4,9311 r_3 =2,2706 r_4 =4,6699 r_5 =8,0963	0,074 2	r_1 = 4,935 r_2 = 4,8945 r_3 = 2,3433 r_4 = 4,8814 r_5 = 7,9385

Графическая интерпретация наилучших вариантов, полученных по методу Ньютона–Рафсона, приведена на рис. 3 и 4.

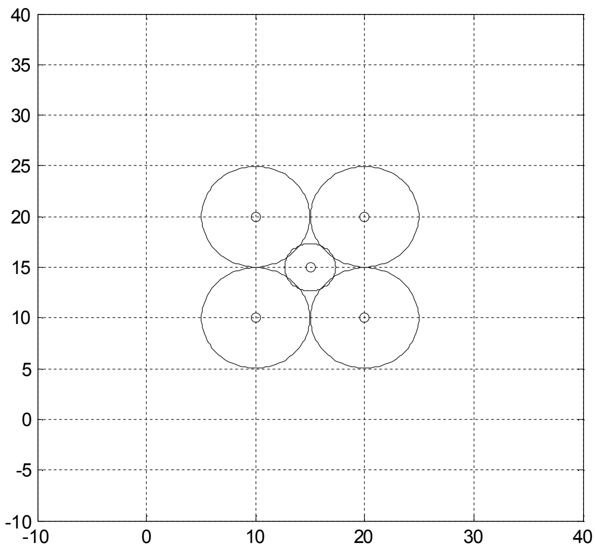

Рис. 3. Симметричный кластер (группа БС) размерностью q = 5 при $y_{1-5} = 1$ Эрл

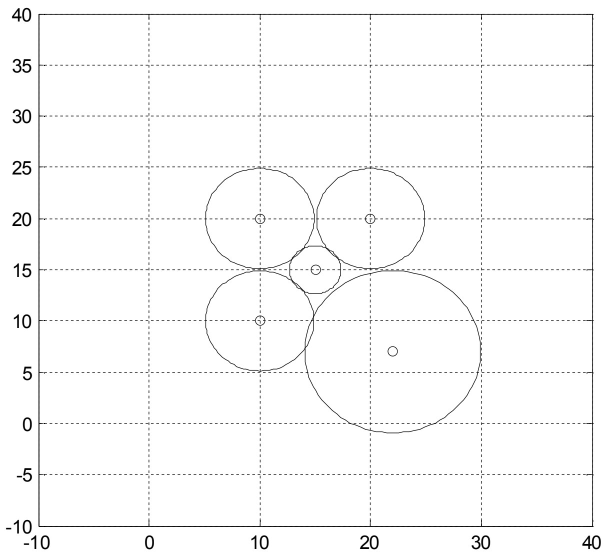

Рис. 4. Несимметричный кластер (группа БС) размерностью q = 5 при $y_{1-5} = 1$ Эрл

Анализ полученных результатов

Результаты вычислений радиусов зон обслуживания БС по нелинейному алгоритму метода наименьших квадратов не противоречат физическим представлениям и адекватно учитывают геометрическую конфигурацию кластеров при заданной плотности нагрузки. В рассмотренных вариантах получены результаты, близкие к ранее достигнутым методами МВНК и МНК.

Решение нелинейной системы находится малым количеством итераций. Различным конфигурациям кластеров БС соответствуют свои неповторяющиеся решения.

Наблюдается зависимость решения от начального приближения, что приводит к различным вариантам покрытия кластера с одной и той же конфигурацией.

Результаты решения нелинейной задачи предложенным методом характеризуются большей среднеквадратической ошибкой по сравнению с линейной задачей в случае симметричного кластера, что, вероятно, обусловлено предварительной линеаризацией исходной нелинейной системы уравнений, и меньшей среднеквадратической ошибкой в случае несимметричного кластера, что обусловлено возможностью варьирования и подбора начальных условий в исходной системе уравнений.

Целесообразным является рассмотрение альтернативного метода решения переопределенной нелинейной системы уравнений, первый этап которого включал бы МНК, а на втором этапе линеаризацию.

Адекватное использование предложенного алгоритма предполагает задание двумерной плотности абонентов на обслуживаемой территории.

Литература

1. Егоров Л.Л. Алгоритм расчета зон покрытия базовых станций сотовой связи / Л.Л. Егоров, В.А. Кологривов // Доклады ТУСУРа (Томск). – 2007. – 2(16). – С. 157–162.
2. Егоров Л.Л. Алгоритм расчета зон покрытия базовых станций сотовой связи / Л.Л. Егоров, В.А. Кологривов, С.В. Мелихов // Доклады ТУСУРа (Томск). – 2009. – 5(19). – С. 15–20.
3. Влах И. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем / И. Влах, К. Сингхал / Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1988. – 560 с.
4. Потемкин В.П. Справочник по применению системы PC MatLab. – М.: Физматлит, 1993. – 112 с.

Егоров Леонид Леонидович
Аспирант каф. средств радиосвязи ТУСУРа
Тел.: 41-37-09
Эл. почта: Yegoroff@sibmail.com

Кологривов Василий Андреевич
Канд. техн. наук, доцент каф. средств радиосвязи ТУСУРа
Тел.: 41-37-09
Эл. почта: mrc@main.tusur.ru

L.L. Yegorov, V.A. Kologrivov
Nonlinear problem of the calculation of a base station's coverage area

The nonlinear problem of calculation the GSM-standard base stations' coverage area based on the linearization of Newton-Raphson nonlinear systems of algebraic equations has been stated. The nonlinear least squares method algorithm of its solving has been offered. The estimation of the efficiency of an offered method in solving problems with network planning and optimization has been made.
Keywords: least squares method, nonlinear problem, iterative algorithm, base station, coverage zone.