УДК 621.396.674

А.С. Запасной, В.П. Беличенко

Добротность излучения сферического излучателя

Получены соотношения для добротности излучения сферического излучателя с учетом запаса реактивной энергии внутри излучателя.
Ключевые слова: запасенные электрическая и магнитная энергии, добротность излучения, сферический излучатель, полоса согласования.

Добротность излучения имеет фундаментальное значение в теории электрически малых антенн, для которых важнейшим параметром является относительная полоса согласования. Такие антенны целиком помещаются внутри гипотетической сферы с диаметром, равным примерно $\lambda/3$ и, как показал Чу [1], характеризуются достаточно высоким уровнем рассогласования с питающим фидером, низким КПД, большой величиной добротности излучения и узкой полосой рабочих частот.

Добротность излучения антенны Q_1 определяется следующим образом [2]:

$$Q_1 = \begin{cases} \dfrac{2\omega W_e'}{P}, \; W_e' > W_m', \\ \dfrac{2\omega W_m'}{P}, \; W_m' > W_e', \end{cases} \tag{1}$$

где W_e' – усреднённая по времени, не распространяющаяся (запасённая) электрическая энергия; W_m' – усреднённая по времени, не распространяющаяся (запасённая) магнитная энергия; ω – круговая частота; P – усреднённая по времени излучённая мощность.

Для добротности излучения были установлены [1] фундаментальные пределы, которые определяют её потенциально достижимые значения в функции от занимаемого антенной объёма. Но вопрос о том, насколько можно приблизиться к этим пределам в конструкциях реальных антенн, до сих пор остаётся открытым.

В 1996 г. Маклин [2] уточнил классическую формулу Чу для минимально возможного значения добротности Q_1 произвольной идеальной антенны. Идеальной называют антенну, не имеющую омических потерь, целиком вмещаемую в гипотетическую сферу электрического радиуса ka и не имеющую запаса энергии внутри этой сферы. Уточнённое выражение выглядит следующим образом:

$$Q_1 = \left[\frac{1}{(ka)^3} + \frac{1}{ka} \right]. \tag{2}$$

Отметим, что и в [1], и в [2] при расчете добротности не учитывался запас реактивной энергии внутри вмещающей антенну сферы. Нами с использованием представлений для поля системы электрических и магнитных токов в сферической системе координат [3] получены общие соотношения для расчета добротности излучения произвольной антенны.

Процедура их вывода сводится к следующему. Сначала необходимо получить представления для запасённых вне сферы $r = a$ электрической W_e' и магнитной W_m' энергий. Полная энергия электромагнитного поля, содержащаяся в некотором сферическом слое $a \le r \le b$, может быть рассчитана по формуле

$$W_e + W_m = \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\varepsilon_a}{4} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_a}{4} |\mathbf{H}|^2 \right\} r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi \, . \tag{3}$$

В (3) ε_a и μ_a – соответственно, абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости окружающей среды. Однако при $b \to \infty$ интеграл (3) расходится. Энергия, накопленная во всем пространстве, бесконечна, поскольку это накопление проистекало в результате бесконечно длительной работы источников поля, которые в течение любого периода колебаний излучали определенную долю энергии.

Нас, однако, интересует энергия поля, локализованного в непосредственной близости от области, занимаемой источниками. Эту энергию можно выделить из полной энергии, если осуществить регуляризацию интеграла (3). Согласно этой процедуре определяется поток мощности P излученного поля через сферу S радиуса $r \to \infty$.

Если потери в окружающей среде отсутствуют, то этот поток будет оставаться неизменным при пересечении поверхности любой сферы с радиусом $r > a$. Результат деления последнего выражения на скорость c распространения электромагнитных волн (в предположении её постоянства) даёт значение плотности энергии излучённого поля, проинтегрированное по сфере произвольного радиуса $a < r < \infty$. Тогда запасённая в ближней зоне излучающей системы энергия может быть рассчитана по формуле

$$W'_e + W'_m = \int\limits_a^\infty dr \left[\int\limits_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 \left\{ \frac{\varepsilon_a}{4} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_a}{4} |\mathbf{H}|^2 \right\} - \frac{P}{c} \right]. \tag{4}$$

Представление (4) позволяет вычислить только суммарную запасенную энергию $W'_e + W'_m$. Чтобы вычислить W'_e и W'_m по отдельности необходимо воспользоваться дополнительно соотношением

$$W_m - W_e = \frac{1}{4\omega} \mathrm{Im} \int\limits_0^\pi d\theta \sin\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi a^2 \mathbf{i}_r \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right). \tag{5}$$

Фактические вычисления по формулам (4), (5) сводятся к следующему. После подстановки в них представлений для компонент полей из [3] и использования свойств ортогональности экспоненциальных функций в интервале $(0, 2\pi)$ и присоединённых полиномов Лежандра в интервале $(0, \pi)$ получаем

$$\begin{gathered} W'_e + W'_m = \pi \sum_{n,l} \left(\varepsilon_a |F_{nl}|^2 + \mu_a |G_{nl}|^2 \right) N_{nl} \times \\ \times \int\limits_a^\infty \left[[n(n+1) + (kr)^2] \left| h_n^{(2)}(kr) \right|^2 + \left| \left[kr\, h_n^{(2)}(kr) \right]' \right|^2 - 2 \right] dr, \end{gathered} \tag{6}$$

где $N_{nl} = \dfrac{n(n+1)}{2n+1} \dfrac{(n+l)!}{(n-l)!}$,; $h_n^{(2)}(kr)$ – сферическая функция Ханкеля второго рода, штрих означает дифференцирование по полному аргументу, а выражения для фигурирующих в (6) коэффициентов $|F_{nl}|$ и $|G_{nl}|$ приведены в [3].

Входящий в (6) интеграл берётся в аналитическом виде:

$$\begin{gathered} \int\limits_a^\infty \left[[n(n+1) + (kr)^2] \left| h_n^{(2)}(kr) \right|^2 + \left| \left[kr\, h_n^{(2)}(kr) \right]' \right|^2 - 2 \right] dr = \\ = \frac{1}{k} \left\{ 2ka - ka \left| \left[ka\, h_n^{(2)}(ka) \right]' \right|^2 + [n(n+1)ka - (ka)^3] \left| h_n^{(2)}(ka) \right|^2 \right\}. \end{gathered}$$

В итоге получаем

$$\begin{gathered} W'_e + W'_m = \frac{\pi}{\omega} \sum_{n,l} \left(\frac{1}{Z_0} |F_{nl}|^2 + Z_0 |G_{nl}|^2 \right) N_{nl} \times \\ \times \left\{ 2ka - ka \left| \left[ka\, h_n^{(2)}(ka) \right]' \right|^2 + [n(n+1)ka - (ka)^3] \left| h_n^{(2)}(ka) \right|^2 \right\}. \end{gathered} \tag{7}$$

Проводя аналогичные выкладки, находим

$$\begin{gathered} W'_m - W'_e = \frac{\pi}{\omega} \sum_{n,l} \left(\frac{1}{Z_0} |F_{nl}|^2 - Z_0 |G_{nl}|^2 \right) N_{nl} \times \\ \times \left\{ ka[j_n^2(ka) + n_n^2(ka)] + (ka)^2 [j_n(ka) j'_n(ka) + n_n(ka) n'_n(ka)] \right\}. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $j_n(ka), n_n(ka)$ – сферические функции Бесселя и Неймана соответственно; Z_0 – волновое сопротивление среды.

При вычитании и сложении (7) и (8) получаются общие соотношения для запасов электрической и магнитной энергий в ближней зоне произвольной излучающей системы

$$W_e' = \frac{\pi}{\omega}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(1)} \sum_{l=-n}^{n} \frac{1}{Z_0}\left|F_{nl}\right|^2 N_{nl} + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(2)} \sum_{l=-n}^{n} Z_0\left|G_{nl}\right|^2 N_{nl}\right\},$$
$$W_m' = \frac{\pi}{\omega}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(2)} \sum_{l=-n}^{n} \frac{1}{Z_0}\left|F_{nl}\right|^2 N_{nl} + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(1)} \sum_{l=-n}^{n} Z_0\left|G_{nl}\right|^2 N_{nl}\right\}, \quad (9)$$

где

$$Q_n^{(1)} = ka - \left[\frac{(ka)^3}{2} + (n+1)ka\right]\left|h_n^{(2)}(ka)\right|^2 - \frac{(ka)^3}{2}\left|h_{n+1}^{(2)}(ka)\right|^2 +$$
$$+ (ka)^2\left(\frac{2n+3}{2}\right)\left[j_n(ka)j_{n+1}(ka) + n_n(ka)n_{n+1}(ka)\right],$$
$$Q_n^{(2)} = ka - \frac{(ka)^3}{2}\left[\left|h_n^{(2)}(ka)\right|^2 - j_{n-1}(ka)j_{n+1}(ka) - n_{n-1}(ka)n_{n+1}(ka)\right].$$

Излучаемую произвольной системой токов мощность определим методом вектора Пойнтинга

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right)\mathbf{i}_r\, r^2 \sin\theta d\theta d\varphi\ . \quad (10)$$

Подставляя в (10) выражения для компонент полей из [3] и проводя необходимые вычисления, получаем

$$P = 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=-n}^{n}\left(\frac{1}{Z_0}\left|F_{nl}\right|^2 + Z_0\left|G_{nl}\right|^2\right)N_{nl}. \quad (11)$$

Используя представления (9) и (11), можно найти добротности излучения идеальной антенны в виде сферического излучателя.

Структура поля такого излучателя исследована в [3]. В частности, приведены соотношения для коэффициентов возбуждения F_{n0}, G_{n0} в предположении, что поверхностная плотность меридионального электрического тока на сферической поверхности $r = a$ не зависит от азимутального угла.

Минимальное значение добротности излучения получается при $n = 1$. Оно оказывается в точности равным Q_1. Однако учет наличия запаса энергии у сферического излучателя в области $r < a$ приводит к увеличению добротности на величину

$$Q_2 = ka\left(\frac{\left|\left[kah_1^{(2)}(ka)\right]'\right|}{\left[kaj_1(ka)\right]'}\right)^2\left[\left[kaj_1(ka)\right]'^2 + \left[\frac{(ka)^2}{2} - 2\right]j_1^2(ka) + \frac{(ka)^2}{2}j_0(ka)j_2(ka)\right]. \quad (12)$$

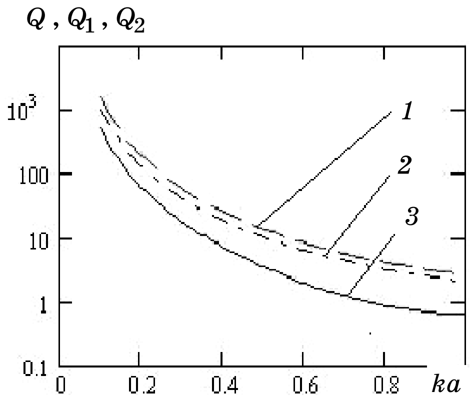

Рис. 1. Зависимость добротностей от электрического радиуса сферы ka

При $ka \ll 1$ выражение (12) перепишется в следующем виде: $Q_2 = 1/2(ka)^3$.

На рис. 1 приведены зависимости Q_1 (кривая *2*), Q_2 (кривая *3*) и Q (кривая *1*) от электрического радиуса сферы ka.

Вычисление добротности с учётом добавки для интервала значений $0{,}2 < ka < 1$ показало, что максимальное её увеличение составляет 1,47. Для сравнения отметим, что введенная Маклином поправка формул Чу привела к увеличению добротности в 1,33 раза.

Литература

1. Chu L.J. Physical limitations of omnidirectional antennas // Journal of Applied Physics. – 1948. – Vol. 19. – P. 1163–1175.

2. McLean J.S. A re-examination of the fundamental limits on the radiation Q of electrically small antennas // IEEE Trans. Antennas and Prop. – 1996. – Vol. 44, №5. – P. 672–676.

3. Марков Г.Т. Возбуждение электромагнитных волн / Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. – М.: Радио и связь, 1983. – 296 с.

Запасной Андрей Сергеевич
Аспирант каф. радиофизики РФФ ТГУ
Тел.: 8-961-095-96-97
Эл. почта: zas_rff@sibmail.com

Беличенко Виктор Петрович
Д-р физ.-мат. наук, доцент каф. радиофизики РФФ ТГУ
Тел.: (382-2) 41-25-83
Эл. почта: bvp@elefot.tsu.ru

Zapasnoy A.S., Belichenko V.P.
Quality factor of a spherical radiator

Expressions for quality factor of a spherical radiator, which take into account a stored energy within a radiator, are established.
Keywords: stored electrical and magnetic energies, quality factor, spherical radiator, matching bandwidth.
