УДК 681.516.73

В.И. Гончаров, Ф.Д. Нгуен

Интерполяционный синтез регуляторов систем автоматического управления на основе нулей полиномов Чебышева

Рассмотрено применение вещественного интерполяционного метода для решения задач синтеза регуляторов систем автоматического управления объектами с распределенными параметрами. Особенность подхода состоит в формировании сетки интерполяционных узлов на основе нулей полиномов Чебышева I рода. Положительные ожидания по повышению точности решения связаны с уникальным свойством указанных полиномов наименее уклоняться от нуля. Приведенный расчетный пример показал, что этот путь синтеза, базирующийся на численных методах, безаппроксимационной процедуре и использовании принятого закона распределения узлов, приводит к достаточно простой вычислительной схеме достижения цели.

Ключевые слова: объекты с распределенными параметрами, синтез регуляторов, вещественный интерполяционный метод, полиномы Чебышева.

1. Введение

При построении многих систем автоматического управления (САУ) нельзя не учитывать распространенность параметров объектов управления по пространственным координатам [1]. Коррекция динамических свойств таких систем имеет особенности, которые делают задачу значительно более сложной по сравнению с подобными задачами в случае объектов с сосредоточенными параметрами. Главная особенность состоит в том, что они не описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями и вследствие этого их передаточные функции (ПФ), определенные для определенной точки пространства, могут содержать не только дробно-рациональные, но и трансцендентные и/или иррациональные выражения, которые могут иметь вид $e^{-p\tau}, e^{-\frac{C(p)}{D(p)}}, \sqrt{p}, \mathrm{ch}p, \mathrm{sh}p\sqrt{ap^2+bp+c}, \frac{k}{\sqrt{Tp}+1}, \ldots$ Такие ПФ обычно относят к сложным, подчеркивая их отличие от дробно-рациональных ПФ. В дальнейшем будем сопровождать математические описания систем и объектов с распределенными параметрами (РП) индексом «РП».

Один из традиционных подходов к синтезу регуляторов систем с РП базируется на двухэтапной процедуре [2]. На первом этапе заменяют исходную сложную ПФ аппроксимирующей дробью

$$W(p)=\frac{b_p p^p + b_{p-1}p^{p-1}+\ldots+b_1 p+b_0}{a_q p^q + a_{q-1}p^{q-1}+\ldots+a_1 p+a_0}, \qquad (1)$$

которая с заданной точностью описывает объект с РП. На втором этапе выполняют собственно синтез регулятора на основе приближенной модели (1). При всей очевидности и достаточной простоте этого пути он имеет существенный недостаток, связанный со значительной погрешностью получаемого решения, так как каждый этап вносит свою составляющую в итоговую ошибку. Повышение точности может быть достигнуто при переходе к одноэтапной процедуре синтеза, которая исключила бы операцию аппроксимации сложной ПФ. Речь идет о необходимости получения регулятора непосредственно по исходной модели объекта.

Такие возможности имеются. Одна из них, использующая вещественный интерполяционный метод (ВИМ) [3], рассмотрена в работе [4]. В настоящей работе развивается этот подход, имея целью дальнейшее повышение точности. Для пояснения привлекаемого аппарата ВИМ ниже приведены краткие сведения о нем.

2. Предварительные замечания. Вещественный интерполяционный метод

Для устранения этапа аппроксимации необходимо использовать такой метод синтеза САУ, который бы позволял совершать действия над ПФ, содержащими трансцендентные и иррациональные выражения. Кроме того, он должен относиться к операторным методам, т.к. операции в области изображений являются более экономичными по сравнению с аналогичными операциями в области времени. Еще один приоритет – метод должен допускать численную реализацию, обеспечивая привлечение цифровых вычислительных

средств. Выполнение последнего требования в основном базируется на формировании и выполнении интерполяционных условий в отношении пары динамических характеристик САУ – желаемой (эталонной) и синтезируемой систем. В нашем случае такими характеристиками выступают ПФ – исходная $W_{pn}(p)$ и аппроксимирующая вида (1).

Интерполяционные подходы известны, имеется их классификация [5], оперирующая комплексной плоскостью и координатными осями. Известны также трудности выполнения интерполяционных условий при использовании комплексной плоскости или мнимой оси. В самом деле, выполнять численные действия над трансцендентными или иррациональными выражениями, приведенными выше, при $p=p_i$ или $p=j\omega_i$ трудно, а во многих случаях препятствия оказываются непреодолимыми. Реальной основой перехода к интерполяционным формам близости ПФ остается положительная полуось комплексной плоскости. Для перехода к такой форме в [3,4] предложено формировать описания сигналов и динамических систем в виде функций вещественной переменной. Для этого используется частный случай преобразования Лапласа $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$, когда комплексная переменная $p=\delta+j\omega$ вырождается в вещественную δ:

$$F(\delta)=\int_0^\infty f(t)e^{-\delta t}dt,\ \delta\in[C,\infty),\ C\geq 0\,. \tag{2}$$

Величина параметра C зависит от свойств функции времени $f(t)$ и выбирается из условия сходимости интеграла.

При рассмотрении динамических систем под функцией $f(t)$ можно понимать, к примеру, импульсную переходную характеристику $k(t)$, тогда изображение $F(\delta)$ имеет смысл вещественной ПФ $W(\delta)$.

Изображения $F(\delta)$ можно представить в форме численных характеристик $\{F(\delta_i)\}_\eta$ = $(F(\delta_1), F(\delta_2),\ldots, F(\delta_\eta))$, которые распространяются как на сигналы, так и на передаточные функции. В последнем случае будем иметь дискретные модели вида $\{W(\delta_i)\}_\eta$. Здесь же отметим важную особенность перехода к дискретной форме – трансцендентные и иррациональные выражения не являются препятствиями при дискретизации сложной ПФ, увеличивается в некоторой степени лишь сложность вычислений.

Этап перехода от непрерывных моделей к дискретным достаточно прост и понятен при решении практических задач, так как известны верхняя и нижняя границы области расположения узлов интерполирования. В то же время имеется неоднозначность – закон распределения произволен. В [4] используется наиболее простое – равномерное распределение. Очевидно, что с точки зрения точности решения задачи синтеза этот вариант не является лучшим. Однако неравномерных распределений можно предложить как угодно много, поэтому возникает задача выбора закона, обеспечивающего какие-либо преимущества, например, по точности синтеза САУ. Один из возможных вариантов ориентирован на выбор узлов интерполирования в нулях каких-либо полиномов. Наиболее привлекательны на наш взгляд, полиномы Чебышева I рода, обладающие важным свойством наименее уклоняться от нуля [6].

3. Постановка задачи

Рассмотрим одноконтурную систему управления объектом с РП, показанную на рис. 1. Считаем, что ПФ $W_{pn}(p)$ объекта задана, а регулятор известен с точностью до коэффициентов его описания

$$W_p(p)=\frac{b_2p^2+b_1p+b_0}{a_2p^2+a_1p+1}\,. \tag{3}$$

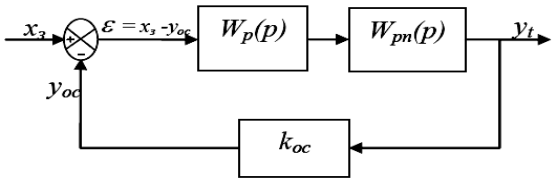

Рис. 1. Схема системы управления объектом с РП

Полагаем также, что известен коэффициент обратной связи k_{oc} и желаемая ПФ $W_ж^з(p)$ (она найдется по требуемым показателям – перерегулированию $\sigma_з$, его допустимому отклонению $\pm\Delta\sigma$, времени установления $t_у^ж$ и другим исходным сведениям). На основании этих данных составим уравнение

$$W_{ж}^{з}(p) \cong \frac{W_p(p)W_{pn}(p)}{1+W_p(p)W_{pn}(p)k_{ос}} \quad (4)$$

($x_з$ – заданное значение входного сигнала, y_t – требуемое значение выходного сигнала, $W_р(p)$ – ПФ регулятора; $W_{pn}(p)$ – ПФ объекта с РП; $k_{ос}$ – коэффициент обратной связи), описывающее поведение САУ, в котором неизвестны лишь коэффициенты ПФ регулятора. Это уравнение можно рассматривать как уравнение синтеза системы.

Для дальнейшей работы целесообразно перейти к эквивалентному уравнению

$$W_{ж}^{р}(p) \cong W_p(p)W_{pn}(p), \quad (5)$$

которое описывает систему в разомкнутом состоянии. Такой переход позволяет снизить объем вычислений, что важно для встроенных в САУ контроллеров. Необходимая для решения уравнения ПФ $W_{ж}^{р}(p)$ найдется по функции $W_{ж}^{з}(p)$.

Задача состоит в том, чтобы найти такие коэффициенты регулятора, которые бы обеспечивали выполнение требований по перерегулированию и быстродействию:

$$\sigma_з - \Delta\sigma \le \sigma_с \le \sigma_з + \Delta\sigma, \quad (6)$$

$$t_у \to \min. \quad (7)$$

Будем считать в этих условиях показатель перерегулирования приоритетным. И это сделано не случайно. Он фактически является интегральным показателем, определяя не только перерегулирование, но и косвенно запас устойчивости и колебательность системы. Такой подход перспективен, он успешно используется в задачах синтеза регуляторов [7].

4. Вычисление коэффициентов регулятора

Решение задачи в соответствии с ВИМ заключается в преобразовании уравнения (5) в вещественную форму, назначении узлов интерполирования $\delta_i, i=\overline{1,\eta}$ и формировании уравнения синтеза в дискретной форме:

$$W_{ж}^{р}(\delta_i) = W_p(\delta_i)W_{pn}(\delta_i). \quad (8)$$

Запись (8) представляет собой систему уравнений относительно коэффициентов ПФ регулятора (3). При $\eta = m + n + 1$ эта система имеет решение, и оно единственное [3]. В результате решения этой системы найдется ПФ регулятора (3), затем ПФ синтезированной системы в разомкнутом $W_{с}^{р}(p) = W_p(p)W_{pn}(p)$ и замкнутом $W_{с}^{з}(p)$ состояниях. Теперь можно сопоставить функции $W_{ж}^{з}(p)$ и $W_{с}^{з}(p)$ в области изображений или времени, оценить погрешность и возможности ее уменьшения. Сказанное относится в том числе к принятому условию (6).

Получение системы (8) является одним из главных элементов в процедуре синтеза САУ с РП. По этому поводу сделаем два замечания.

Первое из них относится к вычислительной стороне формирования численной характеристики $\{W_{pn}(\delta_i)\}_\eta$. Составляющие вида $\sqrt{p}$, $\exp[C(p)/D(p)]$ и подобные, содержащиеся в исходной ПФ $W_{pn}(p)$, не создают принципиальных препятствий при последовательном преобразовании их в вещественные непрерывные модели $\sqrt{\delta}$, $\exp[C(\delta)/D(\delta)]$, затем дискретные $\sqrt{\delta_i}$, $\exp[C(\delta_i)/D(\delta_i)]$. Каждый элемент $W_{pn}(\delta_i), i=1,2$ будет представлять собой число вне зависимости от наличия или отсутствия иррациональных и трансцендентных составляющих в составе функции $W_{pn}(p)$.

Второе замечание относится к проблеме точности решения задачи синтеза на основе уравнения (5). Близость желаемой $W_{ж}^{з}(p)$ и $W_{с}^{з}(p)$ синтезированных функций, достигаемая на основе решения системы (8), в определяющей степени зависит от принятых узлов $\delta_i, i=\overline{1,\eta}$ [3]. Как уже отмечалось, неравномерные распределения узлов, в частности, распределение по нулям полиномов Чебышева I рода, будут создавать предпосылки и возможности для повышения точности. Рассмотрим эту возможность.

Полиномы Чебышева I рода $T_n(x)$ определены соотношениями [8,9]

$$T_0(x)=1, T_1(x)=x,\ T_2(x)=x^2-\frac{1}{2},\ T_{n+1}(x)=xT_n(x)-\frac{1}{4}T_{n-1}(x), x\in[-1,1]. \quad (9)$$

Начальный шаг в привлечении полиномов Чебышева состоит в согласовании интервалов определения рассматриваемых функций. Выберем вариант, сохраняющий неизменными описания САУ. Для этого введем переменную t подстановкой

$$x = 2e^{-at} - 1, \tag{10}$$

где a – некоторый вещественный параметр. В этом случае полиномы примут вид

$$T_0(t) = 1, T_1(t) = -1 + 2e^{-at}, T_2(t) = \frac{1}{2} - 4e^{-at} + 4e^{-2at}, ...$$

Для получения значений узлов $\delta_i, i = 1,2,...,\eta$ выберем полином $T_\eta(t)$, найдем его δ-изображение, используя подстановку (10), записанную для области изображений $\frac{x}{\delta} = \frac{2}{\delta + a} - \frac{1}{\delta}$, что приводит к расчетной формуле для произвольного узла:

$$\delta_i = \frac{1 + x_i}{1 - x_i} a. \tag{11}$$

Значения нулей x_i полинома $T_\eta(x)$ можно получить как решение уравнения $T_\eta(x) = 0$ или же воспользоваться готовыми результатами – таблицами нулей полиномов.

Наличие параметра a создает неоднозначность в применении формулы. Однако наряду с этим негативным оттенком здесь проявляется его позитивная роль – его можно рассматривать в качестве масштабного множителя узлов $\delta_i, i = 1,2,...,\eta$ и масштабного параметра функций времени. Это позволяет определить его значение формально, сопоставляя время установления объекта и соответствующий временной параметр полинома $T_\eta(t)$. Значение параметра a можно найти иначе, используя возможность его изменения для минимизации погрешности синтеза.

Полученное решение на основе принятой системы узлов, как правило, не является лучшим и может оказаться даже неудовлетворительным: могут не выполняться условия (6) и (7), не обеспечиваться необходимый уровень робастности и т.д. Для коррекции используется итерационная процедура приближения к желаемым параметрам путем направленного изменения узлов $\delta_i, i = \overline{1,\eta}$ за счет масштабного параметра a и желаемого времени установления $t_у^ж$ [3].

5. Расчетный пример

Для пояснения подхода приведем результаты синтеза регулятора для звена «буксирный трос – подводный объект» [10], представленного ПФ:

$$W_{pn}(p) = \frac{1}{ch(1{,}2483p) + (0{,}89p + 0{,}27).sh(1{,}2483p)}.$$

Заданы желаемые показатели $\sigma_з = 5\%$, $t_у^3 = 3c$, по которым получена желаемая ПФ системы в замкнутом и разомкнутом состояниях соответственно $W_ж^3(p) = \frac{5{,}58p + 10}{0{,}558p^2 + 1{,}116p + 1}$, $W_ж^р(p) = \frac{6{,}976p + 12{,}5}{0{,}6976p^2 + 1{,}256p + 1}$ с учетом коэффициента образной связи $k_{ос} = 0{,}02$.

Требуется получить регулятор 1-го порядка ($m = n = 1$), что приводит к вычислению коэффициентов b_1, b_0, a_1 и, следовательно, к назначению трех узлов δ_i, соответствующих нулям x_i, $i = 1,2,3$, полинома $T_3(x) = 4x^3 - 3x = 0$. Будем иметь: $x_{1,3} = \pm 0{,}866$, $x_2 = 0$. По формуле (11) найдены значения узлов: $\{\delta_i\}_3 = \{0{,}0718a;\ a;\ 13{,}9a\}$. Дальнейшее решение задачи состоит в том, чтобы найти такое значение параметра a, при котором выполняется требование (6). Наряду с этим требованием будем использовать специфическую возможность, предоставляемую ВИМ, – оценку близости функций $W_ж^3(p)$ и $W_с^3(p)$ в форме

$$\Delta W(\delta) = \max_\delta \left| W_ж^р(\delta) - W_с^р(\delta) \right|, \tag{12}$$

которая позволяет не только минимизировать эту оценку, но и придавать синтезируемой системе нужные свойства [3].

Результаты вычислений: минимальное значение оценки (12) $\Delta W = 3{,}68$ достигается при $a = 0{,}014$ ($\delta_3 = 0{,}195$), когда ПФ регулятора имеет вид $W_p(p) = \frac{2070p + 12{,}51}{166{,}8p + 1}$ и выполняется

условие (6). Для сравнения приведем оценку (12) для случая равномерной сетки $\Delta W = 3{,}71$, что свидетельствует (на формальном уровне, детали здесь не обсуждаются) о целесообразности назначения узлов в нулях полиномов $T_\eta(x)$ с позиций критерия (12).

Проверка результатов синтеза по условиям (6), (7) затруднительна из-за особенностей САУ с РП, так как непосредственное получение переходных характеристик $h_c(t)$ невозможно. Поэтому воспользуемся аппроксимацией ПФ синтезированной САУ $W_c^3(p)$, что позволило получить приближенную характеристику $h_c(t)$ и определить показатели качества. Не поясняя здесь влияние параметра t_y^3, отметим только, что этот параметр служит для настройки решения на робастность САУ по перерегулированию и времени установления. Эти возможности использованы, результат показан на рис. 2 в виде переходных характеристик желаемой и синтезированной систем.

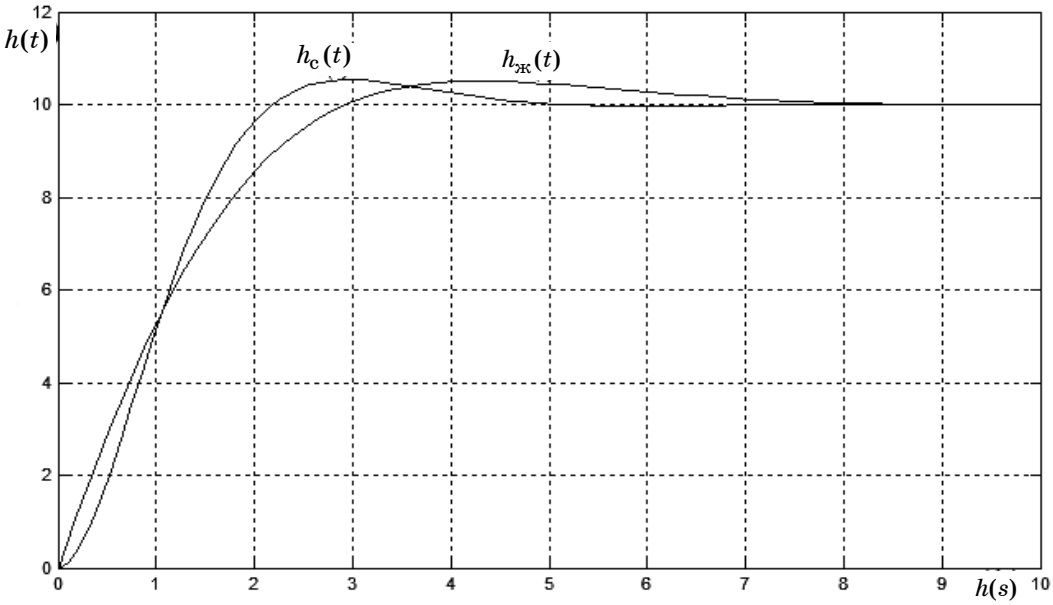

Рис. 2. Переходные характеристики желаемой $h_ж(t)$ и синтезированной $h_c(t)$ систем при $t_y^3 = 5c$

Еще один способ оценивания результатов – привлечение частотных характеристик. Можно построить желаемую логарифмическую частотную характеристику (ЛАЧХ) и ЛАЧХ синтезированной системы, затем сопоставить их с целью получения информации о показателях качества. Такие характеристики показаны на рис. 3. В основном результаты совпадают с анализом по временным характеристикам.

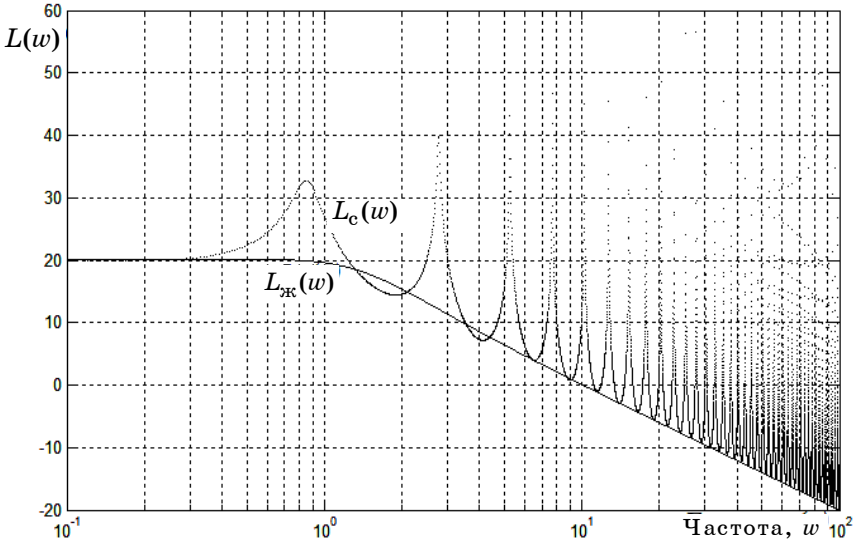

Рис. 3. Логарифмические частотные характеристики желаемой и синтезированной системы

6. Заключение

В работе рассмотрена процедура синтеза регуляторов САУ, объекты которых имеют распределенные в пространстве параметры. Предложенный способ синтеза систем с РП имеет достаточно определенный алгоритм, возможности для коррекции свойств синтезируемой САУ и достижения поставленной цели. Приведенный пример синтеза демонстрирует практические возможности алгоритма. Полученный в результате расчетов регулятор не только стабилизирует систему, но является робастным и обеспечивает быстродействие, близкое к оптимальному.

Литература

1. Рапопорт Э.Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. – М.: Высш. шк., 2005. – 292 с.

2. Гольдман А.Ю. Аппроксимативный синтез динамических систем. 1. Матричное представление аппроксимаций Паде и модельная редукция / А.Ю. Гольдман // Известия вузов. Электромеханика. – 1999. – № 3. – С. 63-69.

3. Гончаров В.И. Вещественный интерполяционный метод синтеза систем автоматического управления. – Томск: Изд-во ТПУ, 1995. – 108 с.

4. Нгуен Ф.Д. Синтез регуляторов систем автоматического управления объектами с распределенными параметрами // Сб. трудов междунар. науч.-техн. конф. «Компьютерное моделирование 2009». – СПб.: Политехн. ун-т, 2009. – С. 235–242.

5. Скворцов Л.М. Интерполяционные методы синтеза систем управления // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 6. – С. 25–30.

6. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. — 5-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2006. — 672 с.

7. Крутова И.Н. Проектирование алгоритма управления для итерационных процессов // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 2. – С. 73–84.

8. Mohammed A. Abutheraa, David Lester. Computable function representations using effective Chebyshev polynomial / Mohammed A. Abutheraa, David Lester // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2007. – P. 103–109.

9. Luke L. Yudell. Mathematical functions and their approximations. – New York; San-Francisco; London: Academic Press, 1975. – 584 с.

10. Кувшинов Г.Е. Влияние морского ветрового волнения на глубоководный привязной объект / Г.Е. Кувшинов, Л.А. Наумов, К.В. Чупина. – Владивосток: Дальнаука, 2008. – 215 с.

Гончаров Валерий Иванович
Д-р техн. наук, проф. каф. интегрированных компьютерных систем управления (ИКСУ)
Томского политехнического университета
Тел.: +7-952-895-10-73.
Эл. почта: gvi@tpu.ru.

Нгуен Фу Данг
Аспирант каф. ИКСУ Томского политехнического университета
Тел.: +7-923-407-02-56.
Эл. почта: npdangdtys@yahoo.com.vn.

Goncharov V.I., Nguyen Ph.D.

The interpolation synthesis of automatic control systems' regulators based on zeros of the Chebyshev polynomials

The application of the real interpolation method (RIM) for solving problems of synthesis of automatic control systems' regulators of objects with distributed parameters is considered. The approach peculiarity is in creating a grid of interpolating nodes based on zeros of the Chebyshev polynomials of the first kind. The positive expectation for the decision accuracy improvement related to the unique property of these polynomials of least deviation from zero. The produced example of calculation showed that this way of synthesis, based on numerical methods, the procedure of the synthesis of the regulators without the stage of approximation and the use of the nodes distribution law, leads to quite simple computational scheme and guarantees the increased accuracy in the problem solution.

Keywords: objects with distributed parameters, synthesis of regulators, real interpolation method, Chebyshev polynomials.