УДК 621.391

В.В. Фисанов

О материальных параметрах и инвариантах изотропной киральной среды

Сопоставляются различные способы описания изотропной киральной среды на основе симметричных материальных уравнений. Обсуждаются инвариантные параметры среды, которые вводятся с использованием средних волновых чисел собственных волновых полей (полей Бельтрами) киральной среды.

Ключевые слова: изотропная киральная среда, материальные уравнения, диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, параметр киральности, электромагнитные поля Бельтрами, волновой импеданс, волновые числа, инварианты.

В середине 80-х годов XX в. резко повысился интерес к исследованию сложных электромагнитных сред. На начальном этапе внимание специалистов сосредоточилось на киральных и некоторых бианизотропных материалах с целью их потенциального использования на сверхвысоких частотах в антенно-фидерных устройствах, в радиолокации и других приложениях. В начале 2000-х годов началось и по настоящее время активно продолжается изучение метаматериалов – электромагнитных и оптических искусственных сред со значениями материальных параметров, обычно не встречающихся в природе и ранее не реализованных в эксперименте (включая отрицательные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей). Появление метаматериалов с обратными нормальными волнами и отрицательным преломлением стимулировало поиск новых необычных устройств наподобие плоской линзы Веселаго–Пендри и способствовало появлению трансформационной оптики – нового направления исследований в оптике и радиофизике [1]. Киральные материалы являются естественным подклассом метаматериалов и в настоящее время также интенсивно изучаются, принимая во внимание расширенный диапазон изменения материальных параметров.

Материальные уравнения, параметры и инварианты киральной среды. При описании электромагнитных волновых полей в материальных средах уравнения Максвелла должны рассматриваться совместно с материальными уравнениями – соотношениями, которые определяют зависимости между индукциями $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и напряженностями $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ электрического и магнитного полей. Взаимная изотропная киральная среда (другие названия: «биизотропная среда», «среда Пастера», «оптически активная среда») характеризуется в дополнение к диэлектрической и магнитной проницаемостям третьей материальной величиной – параметром киральности, который обеспечивает перекрёстную (магнитоэлектрическую) связь векторов электромагнитного поля. В макроскопической электродинамике киральных сред со слабой пространственной дисперсией традиционно применяются несколько систем симметричных материальных уравнений. Уравнения Кондона

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}-g\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\quad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}+g\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \tag{1}$$

симметричную форму которым придал Сильверман [2], для монохроматического поля с круговой частотой ω и временным фактором $\exp(-i\omega t)$ переходят в уравнения Теллегена [3]

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+i\kappa\mathbf{H},\quad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}-i\kappa\mathbf{E}. \tag{2}$$

Уравнения Друде–Борна–Фёдорова [4]

$$\mathbf{D}=\varepsilon(\mathbf{E}+\beta\nabla\times\mathbf{E}),\quad \mathbf{B}=\mu(\mathbf{H}+\beta\nabla\times\mathbf{H}) \tag{3}$$

явно указывают на пространственную дисперсию киральной среды. Дополненные однородными уравнениями Максвелла, они приобретают линейную форму относительно векторов поля наподобие уравнений (2), (4). Однако при наличии сторонних источников уравнения (3) должны быть модифицированы [5]. Уравнения Поста [6]

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+i\xi_c\mathbf{B},\quad \mathbf{H}=\mu^{-1}\mathbf{B}+i\xi_c\mathbf{E} \tag{4}$$

содержат в правых частях только силовые векторы. В формулах (1)–(4) символами ε и μ обозначены соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости, остальные греческие символы обозначают параметр магнитоэлектрической связи (параметр киральности) в соответствующей системе уравнений. Вследствие линейности материальных уравнений существуют достаточно простые соотношения взаимосвязи между материальными параметрами указанных систем, которые неоднократно рассматривались [7–11]. Всё же многообразие материальных параметров для описания одной и той же среды затрудняет сопоставление результатов исследований и приводит иногда к недоразумениям. Например, ошибочно указывалось на кажущуюся неэквивалентность представлений Поста и Друде–Борна–Федорова [12].

В эпоху метаматериалов вопрос о сопоставлении параметров киральных сред приобретает дополнительную актуальность в связи с новым взглядом на диапазон допустимых значений материальных параметров. К рассмотрению допускаются среды с одной или двумя отрицательными проницаемостями, среды с очень малыми или с очень большими по абсолютной величине проницаемостями [13] и даже среды со значениями $\varepsilon = 0$ и $\mu = 0$ («ничто» [14], «киральное ничто» [15]). В данной работе, как и ранее в [16], вводятся инвариантные параметры, имеющие универсальный характер. В дальнейшем будем единообразно обозначать тройку материальных параметров изотропной киральной среды (диэлектрическая проницаемость ε^l, магнитная проницаемость μ^l и параметр киральности α^l), добавляя верхний индекс l, который указывает на принадлежность к системе материальных уравнений Кондона–Теллегена ($l = T$), Поста ($l = P$) или Друде–Борна–Фёдорова ($l = F$). В соответствии с формулами (1)–(4) имеем для параметра киральности выражения: $\alpha^T = \kappa = \omega g$, $\alpha^P = \xi_c$, $\alpha^F = \beta$.

Декомпозиция электромагнитного поля на два поля круговой поляризации (называемых также «полями Бельтрами», «волновыми полями») является ключевым приёмом электродинамики киральных сред. Она вводит три основных волновых параметра: волновые числа левого (k_{c+}^l) и правого (k_{c-}^l) полей Бельтрами, а также волновой импеданс η_c^l. Например, применительно к уравнениям Друде–Борна–Фёдорова эта декомпозиция имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}_+ - i\eta_c^F \mathbf{Q}_-, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{Q}_- - i\left(\eta_c^F\right)^{-1} \mathbf{Q}_+, \tag{5}$$

где поля Бельтрами $\mathbf{Q}_\pm$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца $\nabla^2 \mathbf{Q}_\pm + \left(k_{c\pm}^F\right)^2 \mathbf{Q}_\pm = 0$. Эти параметры не изменяют свои значения при смене способа описания киральной среды, т.е. являются инвариантными по отношению ко всем вышеуказанным системам материальных уравнений.

Различные представления первого инварианта – волнового импеданса – в этих системах $\eta_c^T = \left(\mu^T / \varepsilon^T\right)^{1/2}$, $\eta_c^F = \left(\mu^F / \varepsilon^F\right)^{1/2}$, $\eta_c^P = \left(\mu^P / \varepsilon_c{}^P\right)^{1/2}$, где использовано соотношение ${\varepsilon_c}^P = \varepsilon^P + \mu^P \left(\alpha^P\right)^2$, являются эквивалентными, т.е. $\eta_c^T = \eta_c^P = \eta_c^F = \eta_c^l = \eta_c$.

Другие инварианты могут быть получены исходя из пары волновых чисел полей Бельтрами k_c^l. Воспользуемся следующими характерными свойствами волновых чисел полей Бельтрами. В системе Теллегена величина $k^T = \omega\left(\varepsilon^T \mu^T\right)^{1/2}$ является средним *арифметическим* волновым числом для k_{c+}^T и k_{c-}^T, в системе Друде–Борна–Фёдорова величина $k^F = \omega\left(\varepsilon^F \mu^F\right)^{1/2}$ является средним *гармоническим* волновым числом для k_{c+}^F и k_{c-}^F. В системе Поста величина $k^P = \omega\left(\varepsilon^P \mu^P\right)^{1/2}$ является средним *геометрическим* волновых чисел

$$k_{c\pm}^P = \mp\omega\mu^P\alpha^P + \left[\left(k^P\right)^2 + \left(\omega\mu^P\alpha^P\right)^2\right]^{1/2}$$

при условии, что обе проницаемости ε^P и μ^P имеют одинаковые знаки. Если проницаемости имеют разные знаки, то в этом случае вещественные значения волновых чисел ещё возможны [17], но они тоже имеют разные знаки. Средние волновые числа не зависят от параметра киральности соответствующей системы материальных уравнений, поэтому они могут быть выбраны в качестве удобного инварианта. Исключением является среднее геометрическое число, так как оно не существует, если в киральной среде реализуется смешанный режим с прямой и обратной волнами.

Если выбрать в качестве инварианта среднее арифметическое число (как сделано в [16]), то волновые числа следует представить в унифицированном виде

$$k_{c\pm} = k_{c\pm}^{l} = k_c^{l}\left(1 \pm f^{l}\right), \tag{6}$$

где только $k_c^T = k^T$ является среднеарифметическим инвариантом. Для остальных систем получаются инварианты $k_c^F = k^F\left[1-\left(k^F\alpha^F\right)^2\right]^{-1}$, $k_c^P = \omega\left(\varepsilon_c^P\mu^P\right)^{1/2}$, которые, в отличие от k^F и k^P, не являются средними величинами. Из (6) видно, что безразмерный параметр киральности f^l является третьим инвариантом в составе тройки инвариантов η_c^l, k^T, f^l. Этот параметр в системах материальных уравнений выражается различным образом: $f^T = \alpha^T\left(\varepsilon^T\mu^T\right)^{-1/2}$, $f^F = \alpha^F k^F$, $f^P = \alpha^P\eta_c^P$.

Обратимся к системе инвариантов, базирующейся на среднем гармоническом числе k^F. Волновые числа представим в виде

$$k_{c\pm} = k_{c\pm}^{l} = K_c^{l}\Big/\left(1 \mp F^{l}\right). \tag{7}$$

В формуле (7) инвариантами являются $K_c^F = K^F = k^F$ и F^l. Из сопоставления формул (6) и (7) сразу следует, что

$$F^l = f^l,\ K_c^l = k_c^l\left[1-\left(f^l\right)^2\right]. \tag{8}$$

Таким образом, тройку инвариантов на основе среднего гармонического волнового числа образуют параметры η_c^l, k^F, f^l. Ей соответствует тройка безразмерных инвариантов H_c, N_c, F^l, где $\mathrm{H}_c = \eta_c^l/\eta_0$, $N_c = k^F/k_0$ и η_0 – импеданс вакуума, $k_0 = \omega\left(\varepsilon_0\mu_0\right)^{1/2}$ – волновое число в вакууме, ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные. Материальные параметры запишутся через эту тройку инвариантов следующим образом:
диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon^F = \varepsilon_0\frac{N_c}{\mathrm{H}_c},\ \varepsilon^P = \varepsilon^F,\ \varepsilon^T = \varepsilon^F\Big/\left[1-\left(F^l\right)^2\right]; \tag{9}$$

магнитная проницаемость

$$\mu^F = \mu_0 N_c \mathrm{H}_c,\ \mu^T = \mu^P = \mu^F\Big/\left[1-\left(F^l\right)^2\right]; \tag{10}$$

параметр киральности

$$\alpha^F = F^l\big/\left(k_0 N_c\right),\ \alpha^T = F^l\mathrm{H}_c N_c\Big/\left[1-\left(F^l\right)^2\right],\ \alpha^P = F^l\big/\left(\eta_0\mathrm{H}_c\right). \tag{11}$$

Заключение. Для характеристики изотропной киральной среды могут быть использованы группы параметров, инвариантных относительно применяемых для описания среды материальных уравнений. Каждая группа состоит из трёх параметров и включает волновой импеданс среды, безразмерный параметр киральности и среднее арифметическое или среднее гармоническое волновое число. Материальные параметры однозначно выражаются через эти инварианты.

Литература

1. Кильдишев А.В. Трансформационная оптика и метаматериалы / А.В. Кильдишев, В.М. Шалаев // Успехи физических наук. – 2011. – Т. 181, № 1. – С. 59–70.

2. Silverman M.P. Reflection and refraction at the surface of a chiral medium: comparison of gyrotropic constitutive relations invariant or noninvariant under a duality transformation // J. Opt. Soc. Am. A. – 1986. –Vol. 3, № 6. – P. 830–837.

3. Tellegen D.B.F. The gyrator: a new electric network element // Philips Res. Rept. – 1948. – Vol. 3, № 2. – P. 81–101.

4. Фёдоров Ф.И. К теории оптической активности кристаллов. 1. Закон сохранения энергии и тензоры оптической активности // Оптика и спектроскопия. – 1959. – Т. 6, № 1. – С. 85–93.

5. Фисанов В.В. О применении систем материальных уравнений к задачам излучения электромагнитных волн в изотропной киральной среде // Радиотехника и электроника. – 2004. –Т. 49, № 4. – С. 454–457.

6. Post E.J. Formal Structure of Electromagnetics – General Covariance and Electromagnetics – Amsterdam: North-Holland, 1962. – 204 p.

7. Sihvola A.H. Bi-isotropic constitutive relations / A.H. Sihvola, I.V. Lindell // Microwave Opt. Technol. Lett. – 1991. –Vol. 4, № 8. – P. 295–297.

8. Фисанов В.В. Об электродинамических моделях киральной среды // Известия вузов. Физика. – 1991. – Т. 34, № 7. – С. 114–115.

9. Propagation in bi-isotropic media: effect of different formalisms on the propagation analysis / S. Ougier, I. Chenerie, A. Sihvola, A. Priou // Progress In Electromagnetics Research. – 1994. – Vol. 9. – P. 19–30.

10. Lekner J. Optical properties of isotropic chiral media // Pure Appl. Opt. – 1996. – Vol. 5, № 5. – P. 417–443.

11. Lakhtakia A. Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media / A. Lakhtakia, V.K. Varadan, V.V. Varadan. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 121 p.

12. Uçkun S. On the incompatibility of chirality parameter α and chirality admittance ξ of chiral media / S. Uçkun, T. Ege // IEEE AP-S International Symposium Proceedings. – 1999. – Vol. 3. – P. 1974–1977.

13. Сихвола А. Метаматериалы с экстремальными материальными параметрами / А. Сихвола, С.А. Третьяков, А. де Баас // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52, № 9. – С. 1066–1071.

14. Lakhtakia A. An electromagnetic trinity from «negative permittivity» and «negative permeability» // Int. J. Infrared Millim. Waves. – 1996. – Vol. 23, № 6. – P. 813–818.

15. Waves and energy in chiral nihility / S. Tretyakov, I. Nefedov, A. Sihvola, S. Maslovski, C. Simovski // J. Electromagn. Waves Applic. – 2003. – Vol. 17, № 5. – P. 695–706.

16. Фисанов В.В. Инварианты изотропной киральной среды // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52, № 9. – С. 1089–1091.

17. Sabah C. Left-handed chiral metamaterials // Cent. Eur. J. Phys. – 2008. – Vol. 6, №4. – P. 872–878.

Фисанов Василий Васильевич
Д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник Сибирского физикотехнического института при Национальном исследовательском Томском гос. университете (НИТГУ), профессор каф. радиофизики НИТГУ
Тел.: (382-2) 41-20-78
Эл. почта: fisanov@public.tsu.ru

Fisanov V.V.

On constitutive parameters and invariants of an isotropic chiral medium

Different tools of description for an isotropic chiral medium on the base of symmetrical constitutive relations are compared. Invariant parameters of the medium are introduced and discussed using mean wave numbers of the intrinsic wave fields (the Beltrami fields) of the chiral medium.

Keywords: isotropic chiral medium, constitutive relations, dielectric permittivity, magnetic permeability, chirality parameter, electromagnetic Beltrami fields, wave impedance, wave numbers, invariants.