

УДК 621.317.7

А.А. Гельцер, В.Н. Ульянов

## Особенности применения chirp-z-преобразования в панорамном векторном анализаторе цепей при реализации опции измерений во временной области

Рассмотрен алгоритм обратного chirp-z-преобразования, позволяющий осуществлять расчет и интерполяцию импульсной характеристики из частотной характеристики комплексного коэффициента передачи.

**Ключевые слова:** векторный анализатор цепей, chirp-z-преобразование.

Панорамный векторный анализатор производит последовательное измерение комплексной передаточной функции линейной цепи. Измерения производятся путем перестройки частоты задающего генератора, сигнал которого подается на вход исследуемой цепи, а затем измеряется отклик на ее выходе. Если шаг перестройки частоты генератора остается постоянной величиной во всем исследуемом диапазоне частот, результатом серии таких измерений будет дискретная комплексная передаточная функция цепи.

Из теории цепей известно [4, 5], что комплексная передаточная функция линейной цепи связана парой преобразований Фурье с временными характеристиками – импульсной и переходной. Отсюда следует, что, измерив передаточную функцию цепи с помощью панорамного векторного анализатора, при соблюдении требований к фиксированному шагу по частоте, можно получить необходимые временные характеристики исследуемой цепи. При анализе временных характеристик цепи исследователю приходится анализировать их отдельные участки с помощью инструментов увеличения. Дискретный характер изучаемых характеристик приводит к тому, что при увеличении она аппроксимируется прямыми отрезками, соединенными между собой в измеренных точках, что резко снижает информативность полученных данных и затрудняет их анализ.

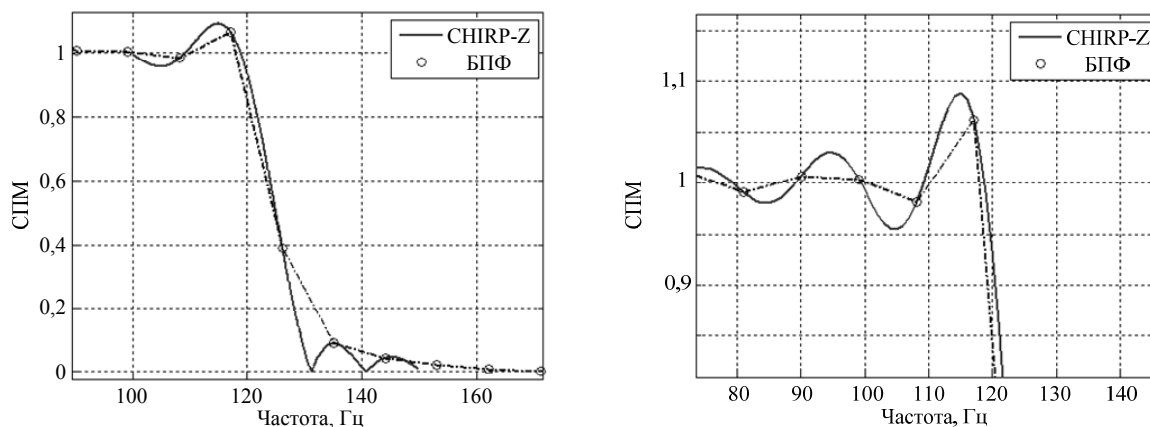
Из теории сигналов известно, что имея набор дискретных значений импульсной характеристики цепи, выбрав соответствующую длину преобразования Фурье, можно вычислить значение передаточной характеристики на любой частоте. Однако длина преобразования может оказаться слишком большой или неудобной для реализации быстрой формы преобразования Фурье (БПФ).

Задача вычисления значений спектра дискретного сигнала в произвольной полосе частот с произвольным шагом по частоте, при этом сохраняя быстродействие, близкое к классическому алгоритму БПФ, была впервые решена Л.Р. Рабинером в работе [1]. Предложенный алгоритм был назван chirp-z-преобразованием. Для иллюстрации работы этого алгоритма на рис. 1 изображен модуль спектральной плотности мощности (СПМ) произвольного дискретного сигнала, рассчитанной с помощью алгоритма БПФ. На том же графике построена вторая зависимость – СПМ этого же сигнала, построенная с помощью алгоритма chirp-z-преобразования. При этом шаг по частоте в chirp-z задан значительно более высоким, чем у результата БПФ, кроме того, расчет произведен в ограниченной полосе частот.

Как видно из рис. 1, результат, полученный с помощью chirp-z-преобразования, имеет более подробный и гладкий характер.

В исходном виде алгоритм chirp-z-преобразования предназначен для расчета частотных характеристик сигналов или цепей. Применимо к векторным анализаторам цепей представляет интерес обратная задача – обратное chirp-z-преобразование из частотной области во временную, сохраняя замечательные свойства исходного алгоритма. Следует заметить, что в общем случае chirp-z-преобразование необратимо, и под обратным преобразованием понимается только модифицированное chirp-z-преобразование для расчета фрагмента импульсной характеристики цепи во временной области. Оригинальная работа [1] не содержит решения данной задачи, поиск по литературе, посвященной вопросам цифровой обработки сигналов, также не дал решения этой задачи. Нам удалось найти лишь два источника [2, 3], в которых рассматривался данный вопрос. В работе [2], являющейся, по сути, информационным сообщением, приведено лишь конечное выражение, а в [3] рассмот-

рен алгоритм, имеющий ряд ограничений и поэтому здесь не рассматриваемый. В настоящей работе рассмотрим реализацию такого алгоритма и некоторые особенности его применения.



а – СПМ дискретного сигнала  
 б – увеличенный фрагмент  
 Рис. 1. СПМ дискретного сигнала, вычисленные с помощью алгоритмов БПФ и chirp-z

**Прямое chirp-z-преобразование.** Кратко опишем основные соотношения, входящие в алгоритм прямого chirp-z-преобразования (CZT – chirp-z transform). Пусть имеется последовательность  $x_n$ , содержащая отсчеты сигнала, где  $n=0,1,\dots,N-1$ . Согласно [1] спектральные отсчеты  $X_k$ , сигнала  $x_n$  можно вычислить, используя операцию z-преобразования по контуру единичной окружности (в z-плоскости):

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n z_k^{-n}, \quad k=0,1,\dots, M-1,$$

где  $M$  – произвольное целое число.

Полагая  $z_k = AW^{-k}$ , получим:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n A^{-n} W^{nk}, \quad (1)$$

где  $A$  и  $W$  – произвольные комплексные числа, определяемые как

$$A = A_0 e^{j2\pi\theta_0} \quad \text{и} \quad W = W_0 e^{j2\pi\phi_0}. \quad (2)$$

Значения  $A_0$  и  $W_0$  определяют форму контура в z-плоскости, на котором будут вычисляться значения  $X_k$ . В случае  $A_0 = W_0 = 1$  контур представляет собой окружность единичного радиуса. В этом случае значения  $X_k$  совпадают с результатами вычисления дискретного преобразования Фурье (*DFT*, для единообразия с оригинальными источниками будем придерживаться англоязычных сокращений). Для иллюстрации изложенных соотношений приведем рисунок из оригинальной работы [1], описывающей этот алгоритм (рис. 2).

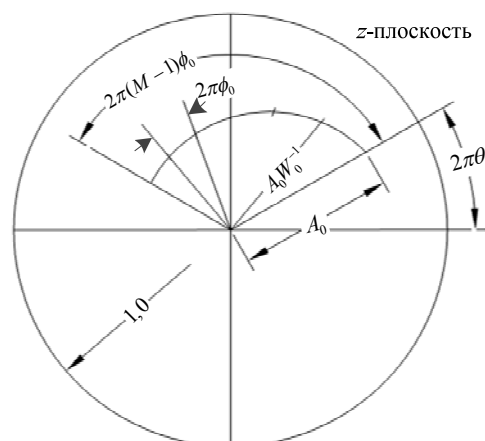


Рис. 2. К пояснению работы алгоритма CZT

Величины  $\theta_0$  и  $\phi_0$ , как это видно из рис. 2, определяют начальное положение рассматриваемого сектора на нормированной частотной оси на z-плоскости (от 0 до  $2\pi$ ) и шаг по частоте соответственно. Пример работы алгоритма chirp-z-преобразования в сравнении с работой алгоритма быстрого преобразования Фурье (*FFT*) приведен на рис. 1.

**Обратное chirp-z-преобразование.** Как уже говорилось выше, обратное chirp-z-преобразование (*ICZT*) является алгоритмом осуществляющим переход из частотной области во временную область. В отличие от алгоритма CZT, рассмотренного во многих работах, в том числе переведенных на русский язык, алгоритм обратного преобразования *ICZT* практически нигде не рассматривается. Из-за отсутствия источника, в котором бы детально рассматривался такой алгоритм, использовался алгоритм *ICZT*, основывающийся на дуальности преобразования Фурье, сохраняя логику оригинального алгоритма.

Пусть имеется оценка ПФ линейной цепи в виде последовательности  $X_n = FFT[g_n]$ ,  $n=0,1,\dots,N-1$ , являющейся коэффициентами ряда Фурье ( $g_n$  – импульсная характеристика цепи). По аналогии с обратным  $DFT$  получим алгоритм  $ICZT$ , изменив выражение для  $CZT$  (1):

$$g_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n A^n W^{nk}, \quad k=0,1,\dots, M-1. \quad (3)$$

Частота дискретизации  $f_d$  связана с интервалом дискретизации  $t_d$  как  $f_d = 1/t_d$ . Коэффициенты  $A$  и  $W$  равны

$$A = 1 \cdot \exp\left[-j2\pi \frac{f_d}{N} t_1\right] \quad \text{и} \quad W = 1 \cdot \exp\left[j2\pi \frac{f_d(t_2 - t_1)}{NM}\right], \quad (4)$$

где  $t_1$  – начальный момент времени рассматриваемого окна,  $t_2$  – конечный.

Знак « $\rightarrow$ » в показателе экспоненты коэффициента  $A$  нужен для изменения направления обхода контура в  $z$ -плоскости на противоположный, по сравнению с прямым преобразованием.

Было проведено моделирование алгоритма (3) для разных значений длины рассматриваемого окна и количества отсчетов в этих окнах. Как оказалось, алгоритм работает только в тех случаях, когда выполняется условие: отсчеты во временной области должны следовать с шагом  $\Delta t = t_d$ . При этом условии преобразование (3) работает как для произвольного окна, так и для всей реализации. При нарушении этого условия наблюдается искажение восстановленной характеристики. Описанные результаты изображены на рис. 3.

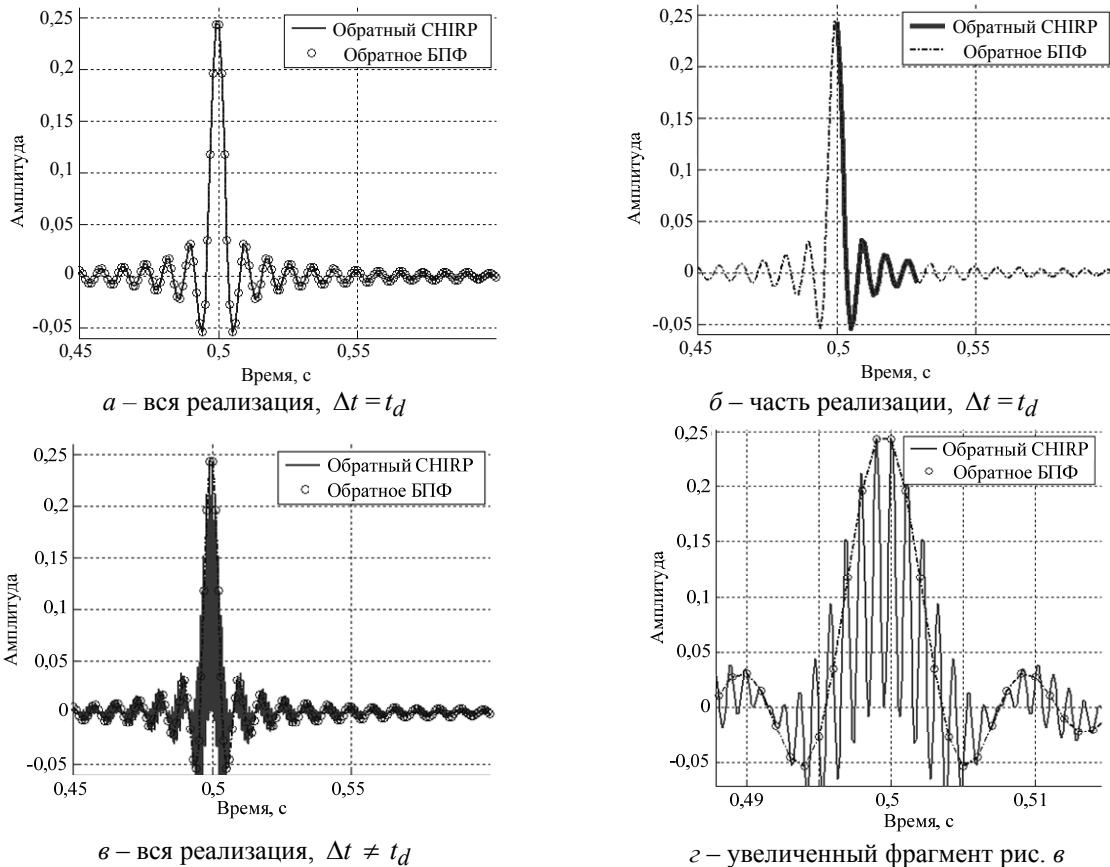


Рис. 3. Моделирование работы алгоритма  $ICZT$  по (3)

Ясно, что такая работа алгоритма  $ICZT$  является неприемлемой. Было найдено решение, устраняющее эффекты, изображенные на рис. 3, и позволяющее работать с произвольным шагом по времени  $\Delta t \neq t_d$ . Оно заключается в ограничении спектра наполовину. При этом выражение (3) приобретает вид

$$g_k = \operatorname{Re} \left( \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} X_n A^n W^{-nk} \right), \quad k=0,1,\dots, M-1, \quad (5)$$

где  $\text{Re}(\dots)$  – операция взятия действительной части комплексного числа, так как при исключении комплексно-сопряженной части результат по (5) будет содержать мнимую часть.

Выражение (5) примем за окончательный вариант алгоритма ICZT для случая, когда спектр содержит зеркальную комплексно-сопряженную часть.

Результаты моделирования алгоритма ICZT по формуле (5) приведены на рис. 4.

Как видно из рис. 4, алгоритм ICZT по формуле (5) сохраняет работоспособность при  $\Delta t \neq t_d$  и, следовательно, может применяться для оценки переходных характеристик во временной области.

Реализованный алгоритм обратного chirp-z-преобразования (ICZT) (5) позволяет осуществлять расчет и интерполяцию импульсной характеристики из частотной характеристики комплексного коэффициента передачи. Особенностью алгоритма является необходимость исключения из используемого спектра передаточной функции зеркальных частот (если они были введены).

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в соответствии с договором 13.G25.31.0011 от 07.09.2010 и договором 74/10 от 15.07.2010 г. в порядке реализации Постановления № 218 Правительства РФ.

#### Литература

1. Rabiner L. The chirp-z-transform algorithm / L. Rabiner, R. Shafer, C. Rader. – Audio and Electroacoustics, IEEE Transactions. – Jun 1969. – Vol. 17, № 2. P. 86–92.
2. Сайт компании CST [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.cst.com/Content/Documents/Events/UGM2007/08-Hirtenfelder.pdf>, свободный (дата обращения: 12.11.11). – Загл. с экрана.
3. Mersereau R.M. An algorithm for performing an inverse chirp-z-transform // IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. – Oct 1974. – Vol. 22, № 5. – P. 387–388.
4. Каратаева Н.А. Радиотехнические цепи и сигналы. Теория сигналов и линейные цепи: учеб. пособие. – Томск: ТУСУР, 2003. – 255 с.
5. Цифровая обработка сигналов / Алан В. Оппенгейм, Рональд В. Шафер; пер. с англ. В.А. Лексаченко, В.Г. Челпанов / под ред. С.Я. Шаца. – М.: Связь, 1979. – 416 с.

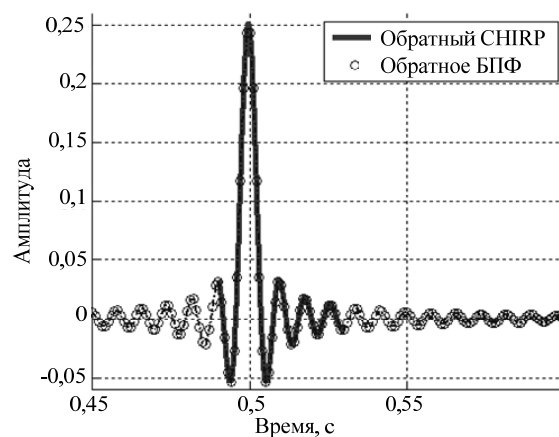


Рис. 4. Моделирование работы алгоритма ICZT по (5), часть реализации,  $\Delta t = 10 t_d$

#### Гельцер Андрей Александрович

Мл. науч. сотрудник НИИ РТС ТУСУРа

Тел.: (382-2) 41-38-89

Эл. почта: and@front.ru

#### Ульянов Владимир Николаевич

Канд. техн. наук, доцент, ст. науч. сотрудник НИИ СЭС ТУСУРа

Тел.: (382-2) 90-00-36

Эл. почта: ulw@micran.ru

Geltser A.A., Uljanov V.N.

#### Features of chirp-z-transform in a panoramic vector network analyzer in the implementation of option time domain

In the article we consider the algorithm of the inverse chirp-z-transform which allows to do the calculation and interpolation of the impulse response from the frequency response of the complex transmission coefficient.

**Keywords:** vector network analyzer, chirp-z-transform.