

УДК УДК 621.371/372

Ю.П. Саломатов, А.А. Сенченко

## Расчет высотных множителей в задаче дифракции электромагнитной волны вокруг земной поверхности

Получено выражение для высотных множителей ряда нормальных волн в задаче дифракции электромагнитных волн вокруг Земли. Приведены результаты расчетов высотных множителей для различных типов подстилающих поверхностей и различных номеров ряда нормальных волн. Полученные результаты могут быть использованы в наземных радионавигационных системах, а также при проектировании систем радиосвязи и передачи информации.

**Ключевые слова:** высотный множитель, функция ослабления, функция Эйри, сферическая поверхность Земли, дифракция.

При определении электромагнитного поля вертикального излучателя, расположенного на поверхности Земли, используется так называемая функция ослабления. Для сферической модели Земли эта функция представляет собой ряд нормальных волн [1–4]:

$$V(x, y) = \sqrt{\pi x} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \sum_{S=1}^{\infty} \left[ \frac{\exp(ixt_S)}{t_S - q^2} \cdot \frac{W(t_S - y)}{W(t_S)} \right], \quad (1)$$

где  $x = \theta \sqrt[3]{\frac{ka}{2}}$ ;  $a$  – радиус Земли;  $\theta$  – угловое расстояние между излучателем и точкой наблюдения;  $q$  – параметр, зависящий от электрофизических характеристик Земли;  $k$  – волновое число свободного пространства;  $y = kh \left( \sqrt[3]{\frac{ka}{2}} \right)^{-1}$  – приведенная высота;  $h$  – высота точки наблюдения над поверхностью Земли вдоль ее радиуса;  $t_S$  – корни дифференциального уравнения полюсов [3]:

$$W'(t_S) - qW(t_S) = 0, \quad (2)$$

$W(z)$  – функция Эйри [5] комплексного аргумента  $z$ .

Выражение для функции ослабления  $V(x, y)$  записано для случая, когда излучатель расположен на поверхности Земли, а точка наблюдения может перемещаться по высоте, которая определяется параметром  $y$ . Поведение комплексной амплитуды каждой нормальной волны при изменении высоты описывает высотный множитель:

$$f_S(y) = \frac{W(t_S - y)}{W(t_S)}.$$

Используя дифференциальное уравнение Эйри [5], а также уравнение полюсов (2) для определения корней  $t_S$ , можно получить дифференциальное уравнение для высотного множителя  $S$ -й нормальной волны:

$$f_S''(y) = (t_S - y)f_S(y). \quad (3)$$

Решение уравнения (3) может быть также представлено в виде ряда Тейлора по степеням  $y$ . Многократное дифференцирование этого уравнения приводит к рекуррентной формуле для нахождения  $n$ -й производной высотного множителя, что позволяет записать разложение высотного множителя в степенной ряд, первые несколько членов которого будут иметь вид

$$f_S(y) = 1 - qy + \frac{t_S y^2}{2} - \frac{1 + qt_S}{2 \cdot 3} y^3 + \frac{2q + t_S^2}{4!} y^4 - \frac{4t_S + qt_S^2}{5!} y^5 + \dots \quad (4)$$

Первые три слагаемых ряда (4) совпадают с выражениями, приведенными в [2, 6], полученными для малых значений  $y$ .

Для членов ряда (6) рекуррентная формула будет иметь вид:

$$A_n = \frac{-A_{n-3} + t_S A_{n-2}}{n(n-1)}, \quad A_0 = 1, \quad A_1 = -q, \quad A_2 = \frac{t_S}{2}.$$

Совершенно очевидно, что поведение высотного множителя будет зависеть от номера  $S$  нормальной волны, а также и от электрофизических параметров подстилающей поверхности ( $q$ ), поскольку  $t_S$  зависит от  $q$ :

$$q = i \frac{\dot{\epsilon} - 1}{\dot{\epsilon}} \sqrt[3]{\frac{ka}{2}},$$

где  $\dot{\epsilon}$  – комплексная относительная диэлектрическая проницаемость поверхности Земли.

В таблице приведены значения корней уравнения полюсов  $t_S$  ( $S = 1, 2, \dots, 6$ ) для трех типов электрофизических параметров поверхности Земли ( $\epsilon, \sigma$ ) в коротковолновом диапазоне:  $n = 1$  – морская поверхность,  $n = 2$  – «средняя» Земля,  $n = 3$  – сухой песок. Соответствующие этим параметрам значения  $q$  также приведены в таблице. Значения корней  $t_S$  определялись при помощи численного решения уравнения полюсов (2). Приведенные в таблице значения  $q$  и  $t_S$  использовались при расчете соответствующих высотных множителей.

Для трех номеров ряда (1) нормальных волн – первого, третьего и шестого – результаты расчетов модуля и фазы высотных множителей нормальных волн функции ослабления представлены на рис. 1. Кривые на рисунке обозначены двумя цифрами, первая из которых соответствует типу подстилающей поверхности в соответствии с номерами столбцов таблицы, а вторая – номеру ( $S$ ) нормальной волны в соответствии с номерами строк таблицы. Графики на рисунках получены при помощи выражения (4).

**Корни уравнения полюсов для различных типов поверхностей**

$\epsilon, \sigma$	$\sigma = 5 \text{ См/м}, \epsilon = 80$	$\sigma = 0,005 \text{ См/м}, \epsilon = 13$	$\sigma = 0,0002 \text{ См/м}, \epsilon = 2$
$q$	$q_1 = 0,297e^{i0,787}$	$q_2 = 8,203e^{i0,937}$	$q_3 = 30,01e^{i1,37}$
1	0,788+i0,848	1,241+i1,925	1,176+i1,992
2	1,713+i2,791	2,116+i3,440	2,051+i3,508
3	2,470+i4,159	2,832+i4,679	2,767+i4,748
4	3,128+i5,325	3,465+i5,775	3,400+i5,845
5	3,725+i6,374	4,043+i6,777	3,979+i6,847
6	4,278+i7,342	4,582+i7,710	4,518+i7,781

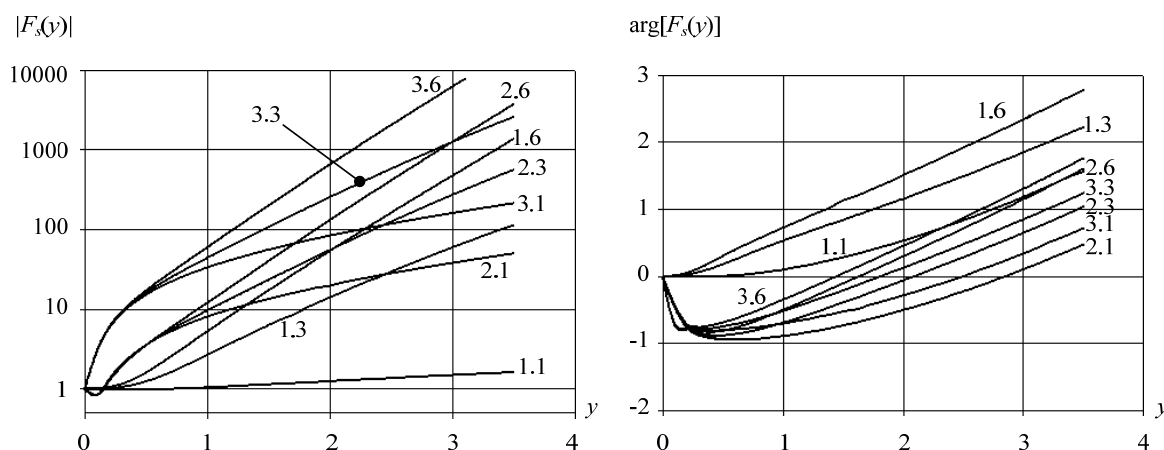


Рис. 1. Модуль ( $|F_S(y)|$ ) и фаза ( $\arg[F_S(y)]$ , радиан) высотных множителей от  $y$  для различных типов подстилающей поверхности и номера нормальной волны

Из рис. 1 видно, что поведение высотного множителя на небольшой высоте ( $y < 0,3 - 0,5$ ) полностью определяется характером подстилающей поверхности и не зависит от номера нормальной

волны. На больших высотах ( $y > 1,0$ ) поведение высотного множителя (увеличение модуля и приращения фазы) определяется номером нормальной волны и не зависит от параметров подстилающей поверхности.

На рис. 2 показано поведение фазы и модуля высотных множителей для нескольких номеров ряда нормальных волн функции ослабления для морской трассы ( $\epsilon = 80$ ,  $\sigma = 1$  См/м), покрытой льдом ( $\epsilon = 6$ ,  $\sigma = 1,1 \cdot 10^{-4}$  См/м) толщиной 2 м, на частоте 2,16 МГц ( $q = 4,497e^{i0,144}$ ,  $t_1 = 19,057 + i5,737$ ). Параметр  $q$  для двухслойной поверхности, каковой является лед на морской поверхности, рассчитывается в соответствии с выражениями, приведенными в [2]. Сравнивая эти рисунки с рис. 1, можно заметить в данном случае существенное отличие поведения первой нормальной волны от волн, распространяющихся над однородной по глубине поверхности. Дело в том, что первая нормальная волна в данном случае представляет собой так называемую поверхностную волну, которая возникает над двухслойной поверхностью, имеющей сильно индуктивный характер приведенного поверхностного импеданса [2].

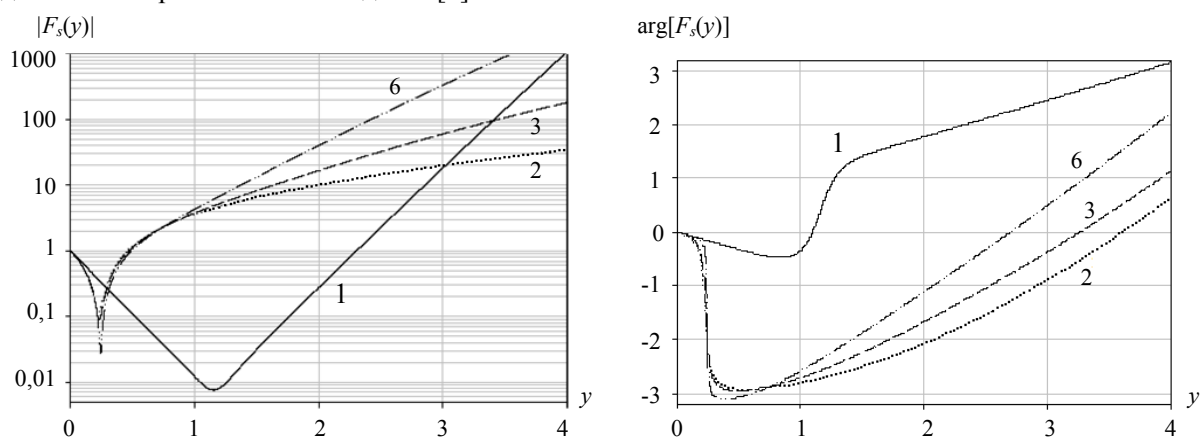


Рис. 2. Зависимость модуля ( $|F_s(y)|$ ) и фазы ( $\arg[F_s(y)]$ , радиан) высотного множителя для различных номеров ( $n$ ) нормальной волны от приведенной высоты  $y$  для морской трассы, покрытой льдом толщиной 2 м

Поведение фазы и модуля высотных множителей последующих номеров нормальных волн, как показывает сравнение кривых 3 и 6 на рис. 2 с соответствующими кривыми на рис. 1, существенно не отличается (особенно при  $y > 1,0$ ) от случая однородной по глубине поверхности.

Для иллюстрации процесса формирования особенности поверхностной волны на рис. 3 показано поведение фазы и модуля высотного множителя для первого номера ряда нормальных волн функции ослабления над морской трассой, покрытой льдом различной толщины от 0,5 до 2 м. Видно, как при увеличении толщины льда модуль высотного множителя постепенно приобретает характер экспоненциального уменьшения с высотой  $y$  поверхности, а фаза – скачкообразного изменения на  $\pi/2$  в области изменения поведения модуля.

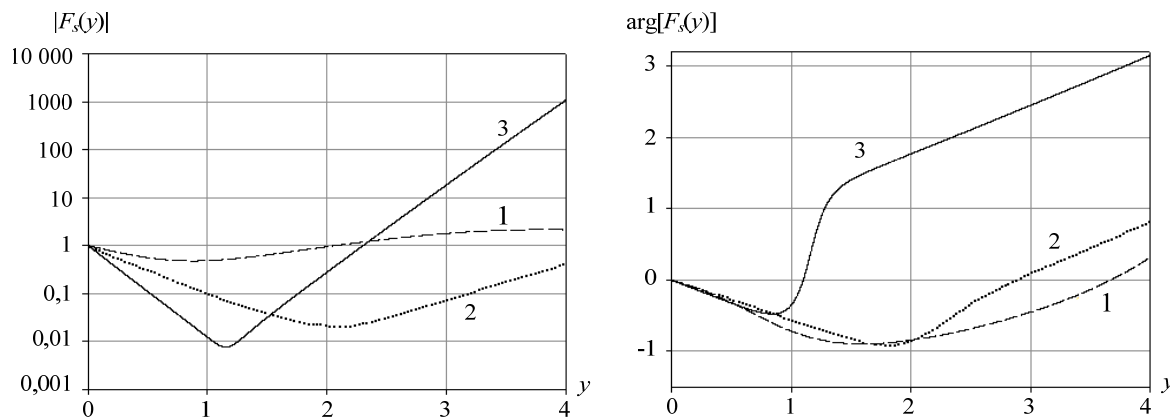


Рис. 3. Зависимость модуля ( $|F_s(y)|$ ) и фазы ( $\arg[F_s(y)]$ , радиан) высотного множителя первой нормальной волны от  $y$  для морской подстилающей поверхности, покрытой льдом толщиной  $d$  м ( $1 - d = 0,5$ ;  $2 - d = 1,0$ ;  $3 - d = 2,0$ )

Характер изменения функции ослабления  $V(x, y)$  в зависимости от высоты будет также зависеть от расстояния  $x$ . Это так, поскольку амплитуда и фаза каждой нормальной волны зависят как от корней  $t_s$ , так и от расстояния в соответствии с множителем  $\exp(ixt_s)$  в выражении (1). К тому же корни уравнения полюсов, как видно из таблицы, зависят от параметров подстилающей поверхности.

На рис. 4 показаны зависимости модулей функций ослабления, рассчитанные в соответствии с выражением (1), от приведенной высоты для различных расстояний от источника. Причем для каждого графика функция ослабления нормировалась относительно своего значения при  $y = 0$ . Из сравнения графиков видно существенное отличие поведения функции ослабления для расстояния 208 км. Это характерное поведение функции ослабления для ледовых трасс на некоторых расстояниях от источника было отмечено в [6, 7] и объясняется взаимодействием поверхностной волны, возникающей при наличии льда на поверхности моря, и остальных «обычных» нормальных мод. Различный характер поведения высотных множителей (см. рис. 2) заставляет предположить, что с изменением высоты изменится поведение функции ослабления. Причем существенных изменений следует ожидать при небольших приведенных высотах ( $y < 0,5$ ), а также при достаточно больших приведенных высотах ( $y > 3$ ).

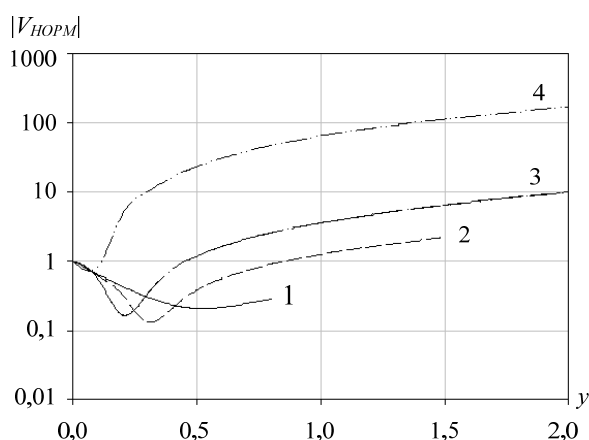


Рис. 4. Зависимость нормированного модуля функции ослабления от приведенной высоты для разных расстояний ( $R$ ) от излучателя. (1 –  $R = 100$ ; 2 –  $R = 180$ ; 3 –  $R > 350$ ; 4 – 208 км)

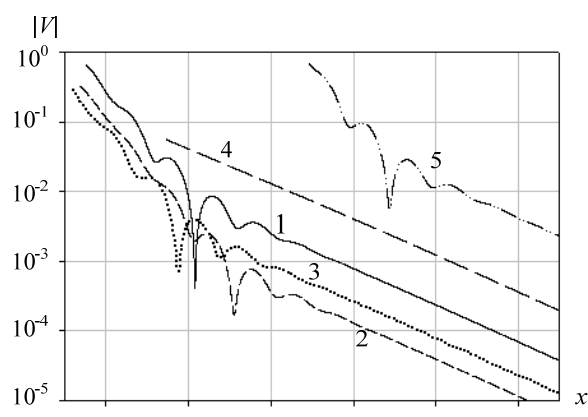


Рис. 5. Зависимость модуля функции ослабления от расстояния для различных приведенных высот (1 –  $y = 0$ ; 2 –  $y = 0,2$ ; 3 –  $y = 0,3$ ; 4 –  $y = 1,3$ ; 5 –  $y = 5,2$ )

Действительно, на рис. 5 показаны зависимости модулей функций ослабления, рассчитанные в соответствии с выражением (1), от расстояния до источника для различных приведенных высот. Особенность поведения высотного множителя на рис. 4 (кривая 4) соответствует минимуму функции ослабления на земной поверхности. Из анализа рис. 4 (кривая 4) и рис. 5 (кривая 1) видно, что на этом расстоянии по существу происходит перераспределение амплитуды волны по высоте, на поверхности она становится небольшой, а с высотой быстро увеличивается. На высотах, отличных от нуля, этот процесс происходит на других расстояниях, что подтверждается расчетами (рис. 5, кривые 2 и 3).

Причем, как видно из рис. 5, перемещение точки «провала» на графике функции ослабления несколько необычно – при уменьшении приведенной высоты она сначала с некоторого расстояния (кривая 3) перемещается на большее расстояние (кривая 2), а затем возвращается на меньшее (кривая 1) расстояние. Поведение функции ослабления до и после точки «провала» также различны. До этой точки происходит более быстрое уменьшение функции ослабления (примерно 15 дБ/100 км), чем после нее (около 5 дБ/100 км). Происходит это благодаря тому, что после минимума функции ослабления влияние поверхностной волны ослабевает и поведение полностью определяется обычными нормальными волнами, характер поведения функции ослабления при этом зависит от расстояния, как для обычной однослойной поверхности. Подобные изменения происходят и с фазовой структурой множителя ослабления.

Начиная с некоторых высот ( $y > 0,6$ ), функция ослабления ведет себя аналогично поведению над однослойной поверхностью (кривая 4 на рис. 5), здесь амплитуда поверхностной волны минимальна, как видно из рис. 2 (кривая 1). Затем на значительно большем расстоянии возникает второе

возмущение функции ослабления (кривая 5 на рис. 5). Здесь амплитуда поверхностной волны вновь становится большой, при этом характер поведения функции ослабления становится аналогичным небольшим высотам, до возмущения он определяется поверхностной волной, а после него – обычными нормальными волнами.

Таким образом, полученное выражение для высотных множителей в виде степенного ряда позволит выполнить расчеты напряженности электромагнитного поля в задаче дифракции электромагнитных волн вокруг Земли с целью выяснения области, существенной для распространения радиоволн. Приведенные результаты расчетов высотных множителей для нескольких характерных типов подстилающей поверхности показывают зависимость их поведения от типа подстилающей поверхности и номера нормальной волны. Показана возможность возникновения возмущений в поведении функции ослабления на некоторых высотах для сильноиндуктивных трасс распространения.

#### *Литература*

1. Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности / Е.Л. Фейнберг. – М.: Наука, 1999. – 496 с.
2. Макаров Г.И. Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью / Г.И. Макаров, В. В. Новиков, С.Т. Рыбачек. – М.: Наука, 1991. – 196 с.
3. Крылов Г.Н. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности (численные методы) / Г.Н. Крылов. – Л.: Энергия, 1968.
4. Wait J.R. Electromagnetic Waves in Stratified Media / J.R. Wait. – 2nd ed. – Oxford: Pergamon, 1962.
5. Справочник по специальным функциям / Пер. с англ. / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
6. Hill D.A. HF ground wave propagation over sea ice for a spherical Earth model [Электронный ресурс] / D.A. Hill, J.R. Wait // Antennas and Propagation, IEEE Trans. – 1981. – Vol. 29, № 3. – P. 525. Режим доступа: [http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs\\_all.jsp?arnumber=1142594](http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=1142594).
7. Гюннинен Э. М. Дифракция радиоволн вокруг земного шара, неоднородного в радиальном направлении / Э. М. Гюннинен, Г.И. Макаров // Проблемы теоретической физики. – Л.: ЛГУ, 1975. – Т. 2. – С. 141–154.

---

#### **Саломатов Юрий Петрович**

Канд. техн. наук, доцент, зав. каф. радиотехники  
Института инженерной физики и радиоэлектроники (ИИФирЭ) СФУ  
Тел.: 8-902-965-31-72  
Эл. почта: YSalomatov@sfu-kras.ru

#### **Сенченко Александр Андреевич**

Магистр, инженер НИЧ ИИФирЭ СФУ  
Тел.: 8-902-941-9167  
Эл. почта: alsenchenko@mail.ru

Salomatov Y.P., Senchenko A.A.

#### **Calculation of height-gain function in the problem of diffraction electromagnetic waves over the earth**

The expression for height-gain function is obtained in the problem of propagation electromagnetic waves over the Earth. The Taylor series formula is obtained for height-gain function. That formula is used for calculation of height-gain function for different type's surface of the Earth and different numbers term of modal series the attenuation function over an earth. Getting results may be used in ground based radio navigation systems and also for developing communication system.

**Keywords:** altitudinal multiplier, attenuation function, Airy function, spherical Earth surface, diffraction.