УДК 512.1-3

М.С. Афанасьева, А.Н. Колесов

Обоснование структуры квадрата целого числа. Следствия, вытекающие из рассмотрения структуры, практические рекомендации

Показана и обоснована структура квадрата целого числа, отмечены свойства структуры целочисленного квадрата. Указаны пути нахождения приближенного значения корня из произвольного числа без применения вычислительной техники. Показано, что в худших случаях (редких) относительная погрешность не превышает десяти процентов, зачастую на порядки лучше. Намечены задачи на продолжение исследования и выявления путей точного вычисления целочисленной части квадратного корня, базирующихся на полученных результатах.

Ключевые слова: целое число, корень квадратный, точный квадрат числа, приближение квадратного корня, относительная погрешность.

1. Исходные предпосылки и соглашения

Проблема снижения временных и ресурсных затрат при целочисленных вычислениях с числами произвольной разрядности при требовании абсолютной точности актуальна. Работа посвящена поиску потенциально перспективных путей вычисления, опирающихся на неосознанные ещё свойства числовых выражений и операций с ними. Статье предшествуют работы авторов [1, 3, 4] и др.

Статья дает анализ и доказательство материала тезисов доклада [1], выявляет перспективы практического использования результатов анализа. Разделы 1 и 2 практически целиком посвящены рассмотрению структуры точного квадрата целого числа B. Раздел 3 излагает материал, связанный с применением результатов раздела 2 на случай произвольного целого числа.

Ниже, если не оговорено другое, под числом будем понимать натуральное число в десятичной системе счисления, под корнем – корень квадратный из такого числа, под степенью числа – квадрат числа (квадрат).

Известная формула квадрата суммы N слагаемых [2] в применении к числу (основанию) B из N цифр b_i, записанная в виде

$$B^2=\left(\sum_{i=1}^{N} b_i\cdot 10^{i-1}\right)^2=\sum_{i=1}^{N}\left(b_i\cdot 10^{i-1}\right)^2+\sum_{i,j=1}^{N}(2\cdot(b_i\cdot 10^{i-1})\cdot(b_j\cdot 10^{j-1})),\, i\neq j. \quad (1)$$

даёт конечный результат возведения числа B в степень.

Непосредственно из (1) увидеть структуру квадрата числа B сложно. Излагаемый ниже материал доказывает существование определенной структуры квадрата, даёт некоторые вытекающие из неё следствия, указывает на возможные применения для повышения эффективности вычислений.

В статье цифра нулевого разряда имеет номер первый. Этот акцент важен для исключения путаницы в последующем.

2. Анализ процесса образования квадрата числа, обоснование структуры точного квадрата, следствия

Ниже элементарными средствами обоснована структура квадрата.

Найденная структура квадрата представлена таблицами 1 и 2, получена по результатам анализа окончаний чисел, квадратов по подозрению [3, 4].

В таблице 1 сокращение «инд. стр.» означает: «индивидуальная строка»; смысл латинских символов соответствует смыслу символов в формуле (1). Инд. стр. №1 на рисунке совпадает с «общей» строкой, так как содержит только квадрат первой цифры. В «общей» строке располагаются только квадраты цифр основания. Объединенные ячейки в «индивидуальных» строках таблиц указывают интервалы возможного расположения цифр этих строк.

Длины строк меняются за счёт возникновения переполнений в разрядах $\Delta_{\text{произв.}}$, возникающих при выполнении произведений (см. табл. 1).

Анализ окончаний квадратов в источниках [3, 4] базировался на рассмотрении элементарной формулы разложения квадрата суммы двух слагаемых

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2. \qquad (2)$$

Формулу (2), принимая во внимание выражение для *окончательного* квадрата N-значного *десятичного* числа (1) и обозначения в нём, будем использовать и при анализе структуры *текущего квадрата*, т.е. квадрата с постепенным увеличением количества цифр в основании.

Применительно к числу с нарастанием максимальной разрядности i перепишем (2) в виде (с учетом обозначений в (1)):

$$\left(b_i\cdot 10^{i-1}+b\right)^2 = \left(b_i\cdot 10^{i-1}\right)^2 + 2\cdot\left(b_i\cdot 10^{i-1}\right)\cdot b + b^2, \qquad (3)$$

где $b=\sum\limits_{j=1}^{i-1}(b_j\cdot 10^{j-1})$ (b представлено ($i-1$) младшими цифрами основания).

Сумма второго и третьего слагаемых в (3) справа даёт содержание i-й индивидуальной строки, сложенной с квадратом предшествующего основания.

Из (3) и таблиц 1, 2 (доказательство верности таблиц дано пункте 2.10 этого раздела на основе рассмотрения вопроса в целом) видно следующее.

2.1. Цифры первого слагаемого в правой части могут располагаться только в ($2\cdot i-1$)-м и ($2\cdot i$)-м разрядах (квадрат цифры занимает не более двух разрядов и располагается сразу после ($2\cdot i-2$)-го разряда, до которого и в котором у первого слагаемого находятся нули).

Таблица 1

Структура квадрата натурального числа

Разряды основания	5		4		3		2		1	
Цифры основания	b_5		b_4		b_3		b_2		b_1	
Номера пар разрядов квадратов b_i^2	5		4		3		2		1	
Разряды цифр в квадрате B^2 и инд. стр.		9	8	7	6	5	4	3	2	1
Квадраты цифр основания («общая» строка)	b_5^2		b_4^2		b_3^2		b_2^2		b_1^2 Инд. стр. №1	
Инд. стр. №2							$2\ b_5\ *(b_1)$			
Инд. стр. №3					$2\ b_3\ *(b_2\cdot b_1)$					
Инд. стр. №4			$2\ b_4\ *(b_3\cdot b_2\cdot b_1)$							
Инд. стр. №5	$2\ b_5\ *(b_4\cdot b_3\cdot b_2\cdot b_1)$									
и т.д.	«Головная» часть – в таблице 2									

Таблица 2

Головная часть структуры: состав трёх старших пар разрядов и двух последних индивидуальных строк структуры из таблицы 1

Абсолютные разряды	$(2{\cdot}N)$	$(2{\cdot}N-1)$	$(2{\cdot}N-2)$	$(2{\cdot}N-3)$	$(2{\cdot}N-4)$
Последние пары разрядов с квадратами цифр	b_N^2		$b_{(N-1)}^2$		$b_{(N-2)}^2$
Предпоследняя индивидуальная строка	Пусто		$2{\cdot}10{\cdot}b_{(N-1)}{\cdot}b_{(N-2)}$		Часть стр.
Структура последней индивидуальной строки	$2{\cdot}10{\cdot}b_N{\cdot}b_{(N-1)}$			Часть посл. индивидуальной строки	
Максимальная добавка в старшей паре разрядов	$2{\cdot}b_N$		Содержимое части предшествующих разрядов полного квадрата числа		

2.2. Аналогичный подход к третьему слагаемому из (3) позволяет заключить, что его цифры не выйдут за пределы $(2 \cdot i - 2)$-го разряда.

2.3. Максимальное значение второго слагаемого в (3), отображающего максимальную величину i-й индивидуальной строки (инд. стр. в таблице 1), ограничено сверху величиной, получающейся при данном b_i представлением числа b в виде набора цифр из $(i - 1)$-й девяток. Заменяя число b ближайшей большей степенью десяти (т.е. 10^{i-1}), найдём, что второе слагаемое в (3) *не превзойдет величины* $2{\cdot}(b_i{\cdot}10^{(2i-2)})$ и не выйдет в большую сторону за пределы $(2{\cdot}i)$-го разряда (произведение $(2{\cdot}b_i)$ состоит не более, чем из двух цифр). То есть максимальное значение второго слагаемого в (3) равно $(2{\cdot}b_i - 1){\cdot}10^{(2i-2)}$.

2.4. Из изложенного анализа (3) и таблиц 1, 2 следует, что при рассмотрении квадрата числа нужно всегда исходить из чётного числа его разрядов, предваряя старший разряд фактического квадрата с нечётным числом разрядов значащих цифр нулём в старшем чётном разряде. Такой подход позволяет вести анализ всех фактических квадратов целых чисел с единых позиций.

Отсюда следует, что номер старшего разряда основания N при четном числе цифр N_Σ у B равен $N = (N_\Sigma/2)$; при нечётном числе цифр у B – $N = ((N_\Sigma + 1)/2)$.

2.5. Из рассмотренного следует, что содержимое двух старших разрядов квадрата числа (то есть старшей пары разрядов, учитывая возможный нуль в старшем чётном разряде) определяется суммой квадрата старшей цифры текущего основания, числа, образованного старшими цифрами произведения $2{\cdot}(b_i{\cdot}10^{i-1}){\cdot}b$, попадающими в пару старших разрядов произведения (3), и возможного переполнения при суммировании строк структуры $\Delta_{\text{сум.возм.}}$.

2.6. Обобщая изложенное в пунктах 2.1, 2.3, 2.5, можно сказать, что максимальное число в старшей паре разрядов квадрата образуется суммой

$$S_{\text{посл.пары}} = [b_i^2 + (2{\cdot}b_i - 1)] + \Delta_{\text{сум.возм.}}, \tag{3а}$$

меньшей, чем $(b_i + 1)^2 = b_i^2 + 2{\cdot}b_i + 1$ (множители степени 10 опущены). Максимальное значение переполнения за счёт суммирования *двух* последних строк структуры (попадающее в $(N - 1)$-й разряд) $\Delta_{\text{сум.возм.}} = 1$.

2.7. Из пункта 2.6 следует: корень из содержимого пары самых старших разрядов точного целочисленного квадрата (с учётом возможного нуля в старшем разряде (см. пункт 2.4)) является старшей цифрой основания.

2.8. Головные части отдельных индивидуальных строк не выходят за границы разрядов, в которых располагаются цифры квадрата очередной старшей цифры основания b_i. Цифры удвоенного произведения старшей цифры текущего основания b_i на старшую цифру предшествующего основания располагаются, начиная с разряда $(2 \cdot i - 2)$ в сторону нарастания номеров разряда (так как $[2 \cdot (b_i{\cdot}10^{(i-1)}){\cdot}(b_i{\cdot}10^{(i-2)})] = 2 \cdot (b_i{\cdot}b_{i-1} \cdot 10^{(2i-3)})$. Т.о. длины части индивидуальных строк до начала расположения упомянутого произведения нарастают на один разряд при переходе от предшествующей строки к очередной.

2.9. Младшая цифра i-й индивидуальной строки равна младшей цифре произведения $(2 \cdot b_i{\cdot}b_1)$ и находится в $(i - 1)$-м разряде (b_i – цифры).

2.10. Из соотношения (3) следует простейший способ доказательства правильности структуры квадрата, представляемой таблицами 1 и 2.

При наличии квадратов двух целых чисел *произвольной одинаковой разрядности*, полученных для оснований, разнящихся только самыми старшими цифрами $b_i > b_i^*$, определение *точного* основания чисел может быть выполнено следующим образом (b_i и b_i^* определяются согласно пункту 2.7).

Находится положительная разность δ соотношений (3) для этих чисел

$$\delta = b_i^2 - (b_i^*)^2 - 2{\cdot}(b_i - b_i^*){\cdot}b,$$

δ делится на разность $(b_i - b_i^*)$, из полученного частного вычитается $(b_i + b_i^*)$ (удаление члена, связанного квадратами оснований), при делении последнего результат на 2, получается b в чистом виде. Дописывая перед b цифры b_i или b_i^*, получаем основания соответствующих исходных квадратов (нам известные, в данном случае – для проверки).

Выполнение только что описанных операций для конкретного числа не предполагает наличия вычислительной техники, но требует внимательности к расположению операндов на «шкале разрядов».

2.11. Из структуры квадрата видно, что при наличии уединённой последней индивидуальной строки основание квадрата находится делением этой строки на удвоенную старшую цифру основания ($2 \cdot b_N$).

Отсюда видна возможность определения приближения корня посредством вычитания квадрата старшей цифры основания (с учётом расположения на «шкале разрядов») с последующим делением разности на ($2 \cdot b_N$) до ($N-1$)-го разряда (смотри пункт 2.9) **включительно** (определение приближения целочисленной части корня).

При $\Delta_{\text{сум.возм.}} = 0$ (см. 2.5, 2.6) **приближение будет всегда с избытком.**

Отличительной чертой приближения целочисленного квадрата является определённое соотношение всех цифр приближения с цифрами анализируемого числа B **(в разделе 2 –** B **– точный квадрат).**

2.12. Аналогично пунктам 2.6 и 2.7 возможно определение цифры основания, предшествующей старшей цифре основания. Покажем это.

Представим основание из N цифр в виде $b_c \cdot 10^{N-2} + 0.b \cdot 10^{N-2}$, где $b_c = b_N \cdot 10 + b_{N-1}$ – двузначное число, состоящее из двух старших цифр основания, а b – целое число из ($N-2$) цифр, предшествующих b_{N-1}, целиком помещённого в дробную часть десятичной дроби. Найдём квадрат так составленного основания

$$(b_c \cdot 10^{N-2} + 0.b \cdot 10^{N-2})^2 = b_c^{\,2} \cdot 10^{2 \cdot N-4} + 2 \cdot b_c \cdot 10^{N-2} \cdot 0.b \cdot 10^{N-2} + (0.b \cdot 10^{N-2})^2 =$$
$$= b_c^{\,2} \cdot 10^{2 \cdot N-4} + 2 \cdot b_c \cdot 0.b \cdot 10^{2 \cdot N-2} + ((b_{N-2},\ b_{N-3}\ b_{N-4}\ \textit{и т.д.}) \cdot 10^{N-3})^2. \quad (4)$$

В последнем слагаемом в правой части (4) b_{N-2} является старшей цифрой числа b, а цифры символической записи ($b_{N-3}\ b_{N-4}$ *и т.д.*) означают младшие цифры этого числа, попадающие в дробную часть сразу после запятой, отделяющей её от b_{N-2}.

Число ($2 \cdot b_c \cdot 0.b$) < $2 \cdot b_c$, а цифры последнего слагаемого в правой части последнего равенства, согласно (3а), не выйдут за пределы ($2 \cdot N-4$)-го разряда. Отсюда следует, что b_c – максимальный корень, содержащийся в числе, находящемся в четырёх старших разрядах. исходного квадрата. Избыток над $(b_c)^2$ в точном квадрате не превышает $2 \cdot b_c$. Меньшим, чем b_c, корень из числа, образованного четырьмя старшими цифрами точного квадрата (дополненного при необходимости нулём), не может быть, так как это противоречит утверждению (3а), адаптированному к рассматриваемой ситуации.

Таким образом, получаем усиление утверждения по пункту 2.7.

Максимальный корень из числа в двух последних парах точного квадрата (при организации чётного числа разрядов – см. пункт 2.4) даёт точное значение для двух старших цифр основания.

Вычитание квадратов этих цифр (соответственно их расположению в структуре квадрата) позволяет в большинстве случаев (при $\Delta_{\text{сум.возм.}} = 0$) повысить точность определения приближенного значения корня из точного квадрата. Случаи при $\Delta_{\text{сум.возм.}} = 1$ рассматриваются в пункте 2.14.

Соотношение (4) легко распространяется на головную часть квадрата B, содержащего чётное число разрядов (целое число пар) При этом открывается возможность улучшения приближения корня (в соответствии со структурой).

Отметим, что по изложенному здесь материалу соотношение (2) также обладает всеми свойствами структуры квадрата.

2.13. Из процедуры определения приближенного корня по пункту 2.11 (при $\Delta_{\text{сум.возм.}} = 0$) следует, что разрядность этого корня одинакова с разрядностью точного значения неизвестного нам корня при одинаковых цифрах в двух старших разрядах (реализация пункта 2.12). **Отсюда следует, что отношение этих чисел заведомо будет отличаться от единицы менее, чем на 10% !**

Замечание. При использовании ЭВМ и реализации содержания последних абзацев пункта 2.12 точность приближения можно многократно повысить.

2.14. Случай $\Delta_{\text{сум.возм.}} = 1$ соответствует ситуации, возникающей при возведении во вторую степень числа (основания $a_{\text{осн}}$), составленного из цифр

$$a_{\text{осн}} = b_N\, 9\, b_{N-2}\, b_{N-3} \,..b_{N-k} \,..b_1 \; (1 \le k \le N-2). \quad (5)$$

При этом разность между содержимым старшей пары и $b_N^{\ 2}$ будет нацело делиться на $2{\cdot}b_N$ и оценка приближения по алгоритму пункта 2.11 оказывается невозможной. Очевидный выход из этой ситуации – вычитание единицы из младшего разряда старшей пары, как появившейся в результате переполнения при суммировании предпоследней и последней строк. При этом, в отличие от остальных ситуаций (смотри пункт 2.11), приближение корня будет со стороны меньших значений. Такая ситуация будет возникать всегда при подходе к смене цифры старшего основания b_N на $(b_N + 1)$.

Таким образом, если разность содержимого последней пары и квадрата старшей цифры основания $b_N^{\ 2}$ (всегда находимых) делится нацело на $2{\cdot}b_N$, то вычитая единицу из переполнения последней пары и деля полученное таким образом «усечённое» значение B на $2{\cdot}b_N$ по правилу из 2.11, получим приближение к корню снизу.

Замечание. Если при следовании пункту 2.14 в полученном приближении заменить предпоследнюю цифру приближенного значения основания на предпоследнюю точную цифру основания, находимую согласно пункту 2.12, то гарантия нахождения так полученного приближения в пределах 10%-й ошибки сохранится, но знак приближения станет неопределённым.

Проверка реальной ситуации выполняется путём сравнения B с квадратом найденного приближения.

Таким образом, полнота охвата приближения корня по отношению ко всем числам, являющимися точными квадратами, – достигнута.

3. Распространение результатов исследования точного квадрата на случай произвольного целого испытуемого числа $B_{\text{исп.}}$

Произвольное число $B_{\text{исп.}}$ находится в пределах

$$a_{\text{осн}} \le B_{\text{исп.}} \le (a_{\text{осн}}^{\ 2} + 2{\cdot}a_{\text{осн}}), \quad (6)$$

где $a_{\text{осн}}$ – основание наибольшего целочисленного квадрата в $B_{\text{исп.}}$.

Если $a_{\text{осн}}$ – N-разрядное основание, то число $(2{\cdot}a_{\text{осн}})$ не выходит за пределы $(N + 1)$-го разряда. Таким образом, переход от основания $a_{\text{осн}}$ в $B_{\text{исп.}}$ к основанию $(a_{\text{осн}} + 1)$ может произойти только за счёт появления переполнений в разрядах $B_{\text{исп.}}$ при наращивании его на очередную единицу. Проследим процесс определения приближения при $B_{\text{исп.}}$, изменяющемуся в пределах из (6).

Пока переполнение («скользящая единица») не дошло до старшей пары цифр в $a_{\text{осн}}^{\ 2}$, процедура определения приближения корня из $B_{\text{исп.}}$ ни чем не будет отличаться от процедуры из пункта 2.11, найденной в предположении принадлежности $B_{\text{исп.}}$ к точному квадрату. Далее нужно ориентироваться на процедуру определения приближения по пункту 2.14.

Отличительной чертой этого процесса будет неизменность результата приближения для групп чисел $B_{\text{исп.}}$, у которых переполнения при наращивании разряда единиц у $B_{\text{исп.}}$ не достигают $(N - 1)$-го разряда (цифры меняются только в «зоне ответственности за дробную часть приближения», нам не нужную при определении целочисленной части корня,– см. пункт 2.9 раздела 2).

Таких чисел при фиксированном значении $a_{\text{осн}}$, очевидно, будет $(1{\cdot}10^{N-1}-(b_{N-1}\, b_{N-2}\, b_{N-2} \,..b_1))$, где $(b_{N-1}\, b_{N-2}\, b_{N-2} \,..b_1)$ – число, образуемое цифрами b_i младших разрядов $B_{\text{исп.}}$. Им будут соответствовать различные целочисленные остатки извлечения корня из разных $B_{\text{исп.}}$, удовлетворяющих (6).

Если цифра b_{N-1} в $B_{\text{исп.}}$ равна 8, то попадание единицы переполнения в $(N - 1)$-й разряд наращиваемого $B_{\text{исп.}}$ ещё не изменит приближения корня.

При дальнейшем наращивании числа $B_{\text{исп.}}$ на единицу и достижении $(N - 1)$-го разряда возникнет новое приближение целочисленной части корня из нового $B_{\text{исп.}}$ и ситуация предыдущих двух абзацев повторится.

Т.о., исходных приближений в случае произвольного числа $B_{исп.}$ может быть много. Точности приближений будут лежать в пределах, оцененных в 2.13. В этих условиях разброс исходного приближения не существенен для последующих уточнений целочисленного корня из $B_{исп.}$ детализация которых из ограничения на объём данной статьи отнесена в следующую статью.

Если добавок к $a_{осн}{}^2$ превысит $(2{\cdot}a_{осн})$ на единицу, то это уже будет означать переход к новому квадрату максимального целочисленного основания в $B_{исп.}$ – к $(a_{осн}+1)^2$ и т.д.

Изложенное в настоящем разделе рассмотрение случаев произвольного $B_{исп.}$ позволяет сделать вывод о приемлемости методики для определения целочисленного приближения корня из любого целого $B_{исп.}$.

4. Порядок вычисления приближенного корня из числа $B_{исп.}$

4.1. Определяем число и чётность разрядов *в исходном* $B_{исп.}$ ($(2{\cdot}N)$ или $(2{\cdot}N+1)$ (см. пункт 2.4)), находим номер N старшего разряда основания.

4.2. Определяем разряд начала последней индивидуальной строки и его содержимое (делением $B_{исп.}$ на $10^{(N-1)}$, см. пункт 2.9).

4.3. Из двух старших пар находим старшую и предпоследнюю цифры основания b_N и b_{N-1} (пункт 2.12).

4.4. По пункту 2.14 определяем вариант испытуемого числа $B_{исп.}$ и порядок дальнейших действий (либо по алгоритму из 2.11 сразу, либо после выполнения алгоритма из пункта 2.14).

4.5. При применимости алгоритма из пункта 2.11 вычитаем $b_N{}^2$ из старшей пары цифр $B_{исп.}$, и $b_{(N-1)}{}^2$ из предпоследней пары цифр испытуемого числа $B_{исп.}$, делим полученную разность $\delta = B_{исп.} - b_N{}^2{\cdot}10^{(2N-2)} - b_{(N-1)}{}^2{\cdot}10^{(2N-4)}$ на $2{\cdot}b_N$ (по процедуре из пункта 2.11), дописываем перед найденным числом величину b_N и получаем первое приближение корня, отбрасывая дробную часть, как диктует задача приближения (в данном случае – сверху).

4.6. При неприменимости алгоритма из 2.11 отнимаем цифру «1» от цифры младшего разряда в старшей паре разрядов (см. пункт 2.14), удаляем квадрат старшей цифры основания и делим полученное на $(2{\cdot}b_N)$. При этом получаем приближение снизу. Следуя замечанию к пункту 2.14, находим второе (гарантированное по точности) приближение корня. Но в этом случае уже без гарантии расположения приближения корня относительно неизвестного точного значения корня.

Пример для 11-разрядного числа $B_{исп.}$ = 5 74 38 19 62 07. По 4.1 $N = 6$.

По 4.2 в разряде с номером старшей цифры основания N (где должна располагаться первая цифра произведения $2{\cdot}b_N{\cdot}b_1$ – см. пункт 2.9) находится цифра «1» (последняя цифра в части числа, подлежащего делению на $(2{\cdot}b_N)$) По 4.3 находим $b_N = 2$ и $b_{(N-1)} = 3$. По 4.4 определяем применимость алгоритма нахождения приближения Для данного $B_{исп.}$ пригоден алгоритм по пункту 2.12.

По 4.5 находим разность δ = 165 381,96207. Делим δ на $(2{\cdot}b_N) = 4$, получая приближение основания без старшей цифры 41690,49051. Берём только часть найденного числа, дописываем цифру 2 перед ним ($b_N = 2$) и получаем приближение квадрата (найденного без привлечения ЭВМ и целую калькулятора) в виде $(\sqrt[2]{B_{исп.}})_{\approx} \approx 241\,690{,}49051$. По инженерному калькулятору $\sqrt[2]{B_{исп.}} = 239662{,}672$. Относительная ошибка (с завышением величины найденного приближения основания на первом этапе приближения) $\varepsilon = \left(\sqrt[2]{B_{исп.}}\right)_{\approx} / \left(\sqrt[2]{B_{исп.}}\right) \approx 1{,}00846$ – менее 1%, что вполне приемлемо для решения многих практических вопросов.

5. Заключение

При исследовании структуры корня получено следующее.

5.1. Выявлена и обоснована структура квадрата целого числа («спрятанная» в (1)), проведено её первоначальное исследование, по результатам которого даны практические рекомендации по вычислению приближенного значения корня квадратного из произвольного целого числа.

5.2. На основе сведений о структуре квадрата целого числа показано, что первое и самое грубое приближение корня квадратного содержит определённый набор (по порядку следования и величинам) всех цифр основания, соответствующего данному испытуемому числу $B_{\text{исп.}}$ (пункт 2.1 и раздел 3).

5.3. Уточнены действия по нахождению приближенных значений квадратных корней «вручную» (без ЭВМ и калькулятора), дана оценка точности первого приближения, не превышающего 10%-й ошибки (пункты 2.1, 2.9, 2.11–2.14).

5.4. Из материала статьи следует, что при использовании ЭВМ и наличии модулей алгебраического суммирования и умножения произвольных целых чисел, представляемых массивами цифр, модуля поразрядного сравнения цифр в массивах и модуля деления так представляемых чисел на однозначные или двузначные числа не более $2{\cdot}b_{N\,\text{макс}} = 18$; ($b_{N\,\text{макс}} = 9$), возможна автоматизация вычисления приближенного корня из чисел произвольной разрядности. Набор цифр приближения принадлежит данному испытуемому числу $B_{\text{исп.}}$.

5.5. Выявлены пути уточнения приближении корней – для продолжения работы на основе представлений о структуре квадрата целого числа.

Литература

1. Афанасьева М.С. Структура квадрата натурального числа. Свойства. Следствия / М.С. Афанасьева, А.Н. Колесов // Научная сессия ТУСУР – 2008 : материалы докладов Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Томск, 5–8 мая, 2008 г. – В 5 ч. Ч. 3. – Томск : В-Спектр, 2008. – С. 85–89.

2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 431 с.

3. Афанасьева М.С. Анализ натурального числа на принадлежность его к квадрату целого числа / М.С. Афанасьева, А.Н. Колесов // Научная сессия ТУСУР – 2007 : материалы докладов Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, г. Томск, 3–7 мая, 2007 г. – В 5 ч. Ч. 2. – Томск : В-Спектр, 2007. – С. 106–108.

4. Афанасьева М.С. Синтез окончания основания квадрата целого числа / М.С. Афанасьева, А.Н. Колесов // Студенческий сборник статей ТУСУР – 2007. Первый ежегодный сборник статей по результатам научно-исследовательской деятельности студентов по приоритетным направлениям развития научных исследований ТУСУР. – В 2 ч. Ч. 2. – Томск : В-Спектр, 2007. – С. 6–11.

Афанасьева Марина Сергеевна
Студентка группы 1В5 РТФ ТУСУРа
Телефон: 8-923-401-08-15
E-mail: LIRANET88@mail.ru

Колесов Альберт Николаевич
Канд. техн. наук, доцент кафедры средств радиосвязи ТУСУРа
Телефоны: (382-2) 413709, (382-2) 427859
E-mail: mrc@main.tusur.ru

Afanasieva M.S., Kolesov A.N.

Structure of a digital number square. The way to use this structure and practical recommendations

It is shown and proved the structure of a digital number square, pointed out properties of this square. There are shown ways of a number square root approximate value calculation without using a computer. It is shown that in the worst cases (rather rare) the relative error is less than ten percents. Usually much less. There are shown ways of the digital part of a number square root calculation, based on the performed investigation and also the possible continuation of the research.

Keywords: integer number, square root, approximation of square root, relative error.