УДК 681.51

А.Т. Когут, А.А. Лаврухин

Двухступенчатый алгоритм траекторного управления нелинейным многомерным объектом

Рассматриваются приближенные алгоритмы управления объектами, построенные на линейных моделях с учетом производных первого и второго порядков. Предлагается двухступенчатая процедура, когда основным является алгоритм первого порядка, а переход на второй – только в случае его эффективности. Получены аналитические выражения, оценивающие необходимость такого переключения. Путем имитационного моделирования доказана их достоверность и подтверждена работоспособность алгоритма.

Ключевые слова: объект, система, алгоритм, производная, переключение.

Разработка вопросов проектирования и создания систем управления многомерными нелинейными динамическими объектами остается по-прежнему актуальной [1] и особенно – в траекторных задачах, когда требуется изменять состояние объекта в соответствии с желаемым законом или траекторией движения [2]. Сведение к методу обратных задач динамики требует существования и аналитического определения обратных функций [2, 3], поэтому предлагается применение приближенных алгоритмов функционирования многомерных регуляторов, основанных на линеаризации с учетом как первых [3, 4], так и вторых производных [4].

Пусть многомерный нелинейный объект описывается разностным уравнением

$$x_{k+1} = Ax_k + f(u_k);\ x_{(0)} = x_0, \tag{1}$$

где $x = \{x_{(i)}\} \in R^n$ – вектор переменных состояния; x_0 – начальные значения координат объекта; $u = \{u_{(i)}\} \in R^m$ – вектор управляющих воздействий; $A = \{a_{(ij)}\} \in R^{n\times n}$ – системная матрица линейной части; $f(\cdot)$ – известная нелинейная n-мерная вектор-функция, для которой $f(u) \in C^2$, т.е. существуют ее первая и вторая частные производные по u.

В системах траекторного управления должно выполняться условие

$$x_{k+1} = g_{k+1}, \tag{2}$$

где $g = \{g_{(i)}\} \in R^n$ – вектор заданных значений координат объекта или желаемая траектория движения [2].

После подстановки требования (2) в модель объекта (1) получим выражение

$$g_{k+1} = Ax_k + f(u_k), \tag{3}$$

которое при наблюдаемом векторе x_k и заданном g_{k+1} является нелинейным уравнением относительно u_k.

Формулу для управляющего воздействия в k-й момент времени можно получить в явном виде, если применить методику линеаризации [3, 4]. Заменим $f(u_k)$ рядом Тейлора в окрестности точки u_{k-1} по степеням

$$\delta u_k = u_k - u_{k-1}, \tag{4}$$

тогда вместо (3) запишем

$$g_{k+1} = A\,x_k + f_{k-1} + f'_{k-1}\,\delta u_k + o(\delta u_k^2). \tag{5}$$

Здесь $\delta u_k \in R^m$ – вектор разности управлений, а $\delta u_k^2 = \delta u_k \otimes \delta u_k$, где $\otimes$ – символ кронекеровского произведения матриц [1, 4, 5] и $\delta u_k^2 \in R^{m^2}$. Также использованы следующие обозначения:

$$f_{k-1} = f(u_{k-1}) \text{ и } f'_{k-1} = f'(u_{k-1}),$$

где $f'(u_{k-1}) \in R^{n\times m}$ – матрица Якоби вида

$$f'(u_{k-1}) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial u_1 & \partial f_1/\partial u_2 & \dots & \partial f_1/\partial u_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial f_n/\partial u_1 & \partial f_n/\partial u_2 & \dots & \partial f_n/\partial u_m \end{bmatrix}.$$

Допустим, что в уравнении (5) при $\delta u_k \to 0$ можно пренебречь слагаемым $o(\delta u_k^{\ 2})$, тогда из него следует, что

$$\delta u_k = [f'_{k-1}]^+ \cdot [g_{k+1} - Ax_k + f_{k-1}], \qquad (6)$$

где $[\cdot]^+$ – операция псевдообращения матриц [3].

Алгоритм управления первого порядка, при использовании для вектора разности δu_k формулы (4), будет иметь вид

$$u_k^{(1)} = u_{k-1} + [f'_{k-1}]^+ \cdot [g_{k+1} - Ax_k - f_{k-1}],\ u_{(0)}^{(1)} = u_0. \qquad (7)$$

Синтез многомерных регуляторов, в которых рекуррентные процедуры формирования u_k содержат частные производные второго порядка, можно осуществить с помощью методики полиномиальной аппроксимации [4]. Вместо выражения (3) записывается

$$g_{k+1} = Ax_k + f_{k-1} + [f'_{k-1} + 0{,}5\, f''_{k-1}(\delta_k \otimes I_m)]\,\Delta u_k + o(\Delta u_k^{\ 2}). \qquad (8)$$

Здесь вектор разности управлений $\Delta u_k \in R^m$ определяется аналогично формуле (4) и $\Delta u_k^{\ 2} = \Delta u_k \otimes \Delta u_k$, где $\Delta u_k^2 \in R^{m^2}$. Под f''_{k-1} понимается $f''(u_{k-1})$, где $f''(u_{k-1}) \in R^{n\times m^2}$ – матрица вида

$$f''(u_{k-1}) = \begin{bmatrix} \partial^2 f_1/\partial u_1\partial u_1 & \dots & \partial^2 f_1/\partial u_2\partial u_1 & \dots & \partial^2 f_1/\partial u_m\partial u_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial^2 f_n/\partial u_1\partial u_1 & \dots & \partial^2 f_n/\partial u_2\partial u_1 & \dots & \partial^2 f_n/\partial u_m\partial u_m \end{bmatrix}.$$

Полагая $\Delta u_k \to 0$, из уравнения (8) можно получить формулу для разности управлений

$$\Delta u_k = [f'_{k-1} + 0{,}5\, f''_{k-1}(\delta_k \otimes I_m)]^+ \cdot [g_{k+1} - Ax_k - f_{k-1}] \qquad (9)$$

и алгоритм второго порядка

$$u_k^{\ 2} = u_{k-1} + [f'_{k-1} + 0{,}5\, f''_{k-1}(\delta_k \otimes I_m)]^+ \cdot [g_{k+1} - Ax_k - f_{k-1}],\ u_{(0)}^{(2)} = u_0. \qquad (10)$$

В выражениях (8)–(10) рекомендуется [4] вместо $\delta_k \in R^m$ использовать вектор δu_k, определяемый формулой (6), а для реализации на k-м шаге алгоритма (10) использовать двухступенчатую процедуру. На первой ступени вычисляются $u_k^{(1)}$ и δu_k, соответственно по формулам (7) и (6), а затем уточняется управляющее воздействие $u_k^{(2)}$ по алгоритму (10), которое и подается на вход объекта управления.

Проведенные экспериментальные исследования систем траекторного управления, в регуляторах которых были реализованы приближенные алгоритмы (7) и (10), показали [4], что в пределах областей устойчивости эффективность алгоритмов второго порядка сказывается в основном на первых шагах переходных процессов, а в дальнейшем $u_k^{(2)} \approx u_k^{(1)}$.

Основной задачей данной работы является получение приближенных выражений, позволяющих уже на первой ступени оценивать необходимость уточнения управляющего воздействия по формуле (10), а при ее отсутствии использовать $u_k = u_k^{(1)}$. Введем вектор $v_k \in R^m$ вида

$$v_k = u_k^{(1)} - u_k^{(2)} \qquad (11)$$

и представим через разности управлений δu_k и Δu_k следующим образом:

$$v_k = \delta u_k - \Delta u_k. \qquad (12)$$

Здесь Δu_k определяется по формуле (9), а δu_k – по выражению (6). Из последнего следует, что

$$[g_{k+1} - Ax_k - f_{k-1}] = f'_{k-1}\,\delta u_k,$$

тогда для вектора Δu_k в соответствии с (9) справедливо:

$$\Delta u_k = [f'_{k-1} + 0{,}5\, f''_{k-1}\,(\delta u_k \otimes I_m)]^+ f'_{k-1}\,\delta u_k. \tag{13}$$

Полученная формула (13) показывает, что Δu_k является некоторой функцией от δu_k. Представим ее в виде степенного ряда:

$$\Delta u_k = P\delta u_k + Q\delta u_k^{\,2} + o(\delta u_k^{\,2}). \tag{14}$$

Здесь матрицы $P \in R^{m\times m}$ и $Q \in R^{m\times m2}$ подлежат определению. Заметим, что выражения (14) и (13) получены для Δu_k, поэтому

$$P\delta u_k + Q\delta u_k^{\,2} + o(\delta u_k^{\,2}) = [f'_{k-1} + 0{,}5\, f''_{k-1}\,(\delta u_k \otimes I_m)]^+ f'_{k-1}\,\delta u_k \tag{15}$$

или

$$[f'_{k-1} + 0{,}5\, f''_{k-1}\,(\delta u_k \otimes I_m)] \cdot [P\delta u_k + Q\delta u_k^{\,2} + o(\delta u_k^{\,2})] = f'_{k-1}\delta u_k. \tag{16}$$

Приравняем слагаемые при одинаковых степенях δu_k и запишем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} f'_{k-1} P\,\delta u_k = f'_{k-1}\delta u_k; \\ 0{,}5 f''_{k-1}(\delta u_k \otimes I_m)\, P\,\delta u_k + f'_{k-1} Q\,\delta u_k^2 = 0, \end{cases}$$

решением которой являются матрицы

$$P = I_m \text{ и } Q = -0{,}5[f'_{k-1}]^+ f''_{k-1}.$$

После подстановки P и Q в формулу (14) получим

$$\Delta u_k = \delta u_k - 0{,}5[f'_{k-1}]^+ f''_{k-1}\,\delta u_k^{\,2} + o(\delta u_k^{\,2}). \tag{17}$$

Тогда разность управлений v_k определяется следующим выражением:

$$v_k = 0{,}5[f'_{k-1}]^+ f''_{k-1}\,\delta u_k^{\,2} + o(\delta u_k^{\,2}). \tag{18}$$

При достаточно малых $\delta u_k \to 0$ можно записать оценку

$$\bar{v}_k = 0{,}5[f'_{k-1}]^+ f''_{k-1}\delta u_k^2. \tag{19}$$

Полученная формула (19) содержит матрицу f''_{k-1}, элементы которой необходимо вычислять в методе второго порядка.

Оценку вектора v_k, использующую только информацию на первой ступени, можно получить на основе аналитических выражений для точности процессов управления в системе с алгоритмом первого порядка. В этом случае ошибка определяется как разность [6]

$$e_{k+1}^{\,(1)} = g_{k+1} - x_{k+1}. \tag{20}$$

Здесь x_{k+1} – наблюдаемая координата или выходной сигнал объекта (1) при вычислении управления $u_k = u_k^{(1)}$ по формуле (7), поэтому для вектора x_{k+1} запишется

$$x_{k+1} = Ax_k + f_{k-1} + f'_{k-1}\,\delta u_k + 0{,}5\, f''_{k-1}\delta u_k^{\,2} + o(\delta u_k^{\,2}), \tag{21}$$

где δu_k определяется выражением (6).

После подстановки в уравнение (21) вместо только δu_k соотношения (6) и ряда преобразований, получим

$$x_{k+1} = g_{k+1} + 0{,}5\, f''_{k-1}\delta u_k^{\,2} + o(\delta u_k^{\,2}), \tag{22}$$

тогда при $\delta u_k \to 0$ ошибка $e_{k+1}^{(1)}$ имеет вид

$$e_{k+1}^{(1)} = -0{,}5 f''_{k-1}\delta u_k^2. \tag{23}$$

Сравнение формул (19) и (23) позволяет записать, что

$$\tilde{v}_k = 0{,}5[f'_{k-1}]^+ e_{k+1}^{(1)}. \tag{24}$$

Аналитическое выражение (24) для вектора разности управлений $u_k^{(1)}$ и $u_k^{(2)}$ зависит только от информации, имеющейся у алгоритма первого порядка. Оценка $\tilde{v}_k$ получена на основе двух приближенных равенств, поэтому ее близость к истинному значению v_k должна быть ниже, чем у соответствующей оценки $\bar{v}_k$, определяемой формулой (19).

Предлагаемый алгоритм на первой ступени вычисляет $u_k^{(1)}$, δu_k, $\tilde{v}_k$ и осуществляет переход к уточнению управляющего воздействия $u_k^{(2)}$, если для нормы вектора $\bar{v}_k$ выполняется неравенство

$$\left\|\tilde{v}_k\right\| > \alpha \left\| u_k^{(1)} \right\|, \tag{25}$$

где $\alpha \in R$ – величина допустимой ошибки.

Проверка достоверности полученных аналитических выражений (19), (24) для оценок $\bar{v}_k$ и $\tilde{v}_k$ соответственно и работоспособность предлагаемого двухступенчатого алгоритма формирования управляющих воздействий u_k рассматривались на примере объекта

$$x_{k+1} = a x_k + \mathrm{th}(\beta u_k), \quad x_{(0)} = x_0. \tag{26}$$

При моделировании выбирались $\beta = 1$ и $x_0 = 0$, а значения параметров линейной части a и начальные условия для u_0 в алгоритмах (7) и (10) изменялись. Отметим, что для объекта (26) существует аналитическое решение обратной задачи динамики:

$$u_k = \beta^{-1} \operatorname{arcth}(g_{k+1} - a x_k),\ u_{(0)} = 0. \tag{27}$$

Требуемая траектория задавалась в виде единичного скачка, т.е. $g_{k+1} = 1$. В линейных регуляторах были реализованы алгоритмы (7) и (10) первого и второго порядков соответственно, а также двухступенчатая процедура, использующая на каждом шаге проверку неравенства (25) и осуществляющая при необходимости переключение управления.

Достоверность аналитических выражений (19) и (24) для оценок $\bar{v}_k$ и $\tilde{v}_k$ проверялась при моделировании систем с алгоритмом второго порядка. Значения ошибок $e_{k+1}^{(2)}$, истинные значения v_k и их оценки $\tilde{v}_k$ и $\bar{v}_k$ при $a = 1{,}2$ и начальном отклонении управления $u_0 = -0{,}2$ приведены в таблице 1. Как и следовало ожидать, точность вычислений по формуле (19) достаточно высока, и при $k > 3$ значения $\bar{v}_k$ практически совпадают с v_k.

Таблица 1

Численные значения ошибки $e_{k+1}^{(2)}$, разности управлений v_k и ее оценок $\bar{v}_k$ и $\tilde{v}_k$

K	$e_{k+1}^{(2)}$	v_k	$\bar{v}_k$	$\tilde{v}_k$
1	0,336	0,246	0,306	0,350
2	0,0579	0,292	0,451	0,104
3	0,0450	0,074	0,085	0,048
4	$9{,}46 \cdot 10^{-6}$	$2{,}17 \cdot 10^{-4}$	$2{,}15 \cdot 10^{-4}$	$9{,}96 \cdot 10^{-6}$
5	$5{,}88 \cdot 10^{-5}$	$8{,}31 \cdot 10^{-4}$	$8{,}44 \cdot 10^{-4}$	$6{,}28 \cdot 10^{-5}$
6	$1{,}01 \cdot 10^{-12}$	$4{,}29 \cdot 10^{-9}$	$4{,}29 \cdot 10^{-9}$	$1{,}05 \cdot 10^{-12}$

Оценки $\tilde{v}_k$ не так близки к v_k, но их можно использовать в выражении (25) при выборе алгоритма управления. Как видно из данных таблицы, во время переходного процесса, пока ошибки $e_{k+1}^{(2)}$ большие, оценки $\tilde{v}_k$ имеют тот же порядок, что и v_k, поэтому необходимо правильно выбрать коэффициент α. Экспериментально установлено, что в двухступенчатом алгоритме при $\alpha = 0{,}01$ переход к методу второго порядка осуществляется только в тех случаях, если ошибка e_{k+1} превышает 1%.

Примеры переходных процессов в системах, соответствующих разным алгоритмам управления, показаны на рисунке 1, где цифрами «1» и «2» над графиками указано, какой метод выбирается в двухступенчатом алгоритме на k-м шаге. Типичный для устойчивой системы управления объектом (26) случай приведен на рисунке 1 (*а*) при значении параметра $a = 0{,}9$. Когда система находится вблизи границы устойчивости (например, для $a = 1{,}1$), алгоритм первого порядка приводит к колебательным процессам, как это показано на рисунке 1 (*б*). Метод второго порядка исключает колебательность, но появляется перерегулирование, и это также происходило в большинстве случаев. Результаты моделирования показали, что уточнение управляющего воздействия по формуле (10) требуется лишь на первых трех шагах.

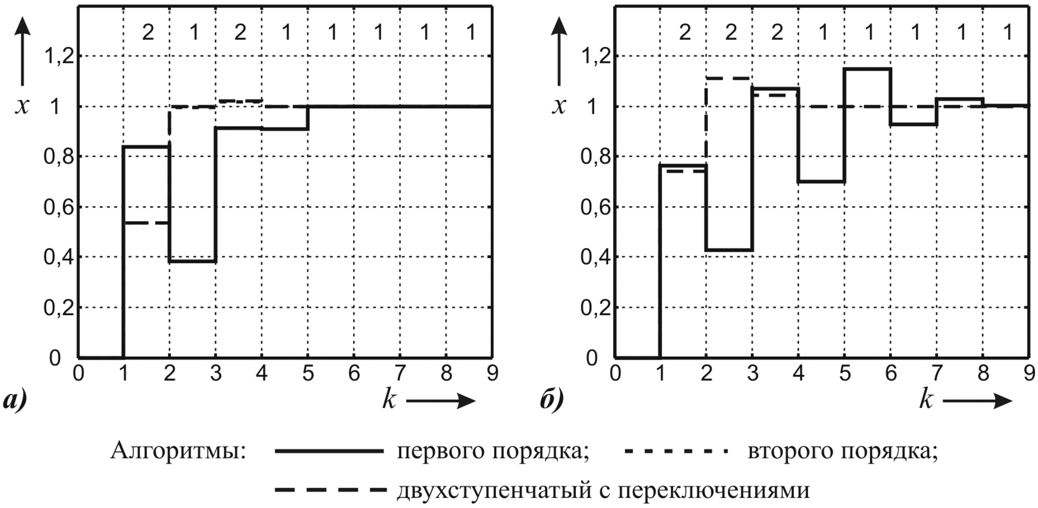

Рис. 1. Переходные процессы для объектов с различными параметрами линейной части

Одним из основных показателей качества процессов управления в замкнутых системах является время регулирования $t_{\text{рег}}$ [6]. При аналитическом решении обратной задачи динамики (27) управление объектом (26) для любого u_0, принадлежащего области существования функции arcth(·), происходит за один шаг, но, как видно из рисунка 1, это нарушается, если в регуляторах реализуются приближенные методы.

Зависимости времени регулирования $t_{\text{рег}}$ от начального значения управляющего воздействия u_0 при постоянном коэффициенте линейной части $a = 0,6$ показаны на рисунке 2а, а от параметра a при $u_0 = -0,1$ – на рисунке 2б (под $t_{\text{рег}}$ понимается время вхождения выходной координаты объекта в 1%-ю трубку [6]).

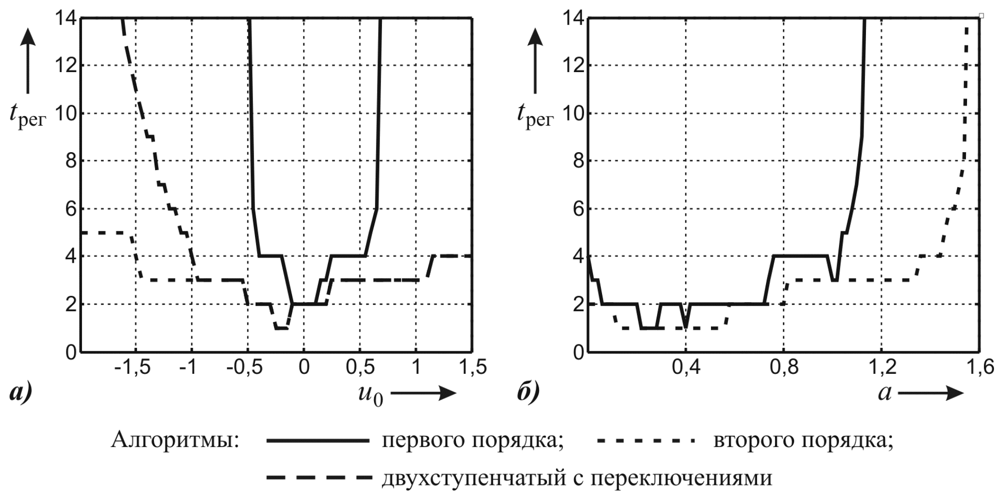

Рис. 2. Зависимости времени регулирования от параметров системы управления при реализации в ней различных алгоритмов

Анализ экспериментальной информации показывает, что алгоритм второго порядка обеспечивает более широкую область устойчивости систем и позволяет осуществить регулирование за меньшее число шагов. Двухступенчатый алгоритм с переключениями управления имеет такое же время регулирования, как и у метода второго порядка, но с меньшими вычислительными затратами.

Результаты проведенных исследований подтвердили работоспособность предлагаемого алгоритма формирования управляющих воздействий, когда на первой ступени при реализации приближенного метода первого порядка оценивается необходимость перехода к вычислению элементов матриц частных производных второго порядка и их псевдообращений. В противном случае на объект подается управление от регулятора первого порядка. Осуществлена проверка достоверности аналитических выражений, рекомендованных для использования при переключении алгоритмов управления.

Литература

1. Ловчаков В.И. Метод аналитического конструирования квазиоптимальных систем управления с полиномиальными нелинейностями // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №6. – С. 51–66.

2. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб. : Наука, 2000.

3. Рубан А.И. Адаптивное управление с идентификацией. – Томск : Изд-во Томского университета, 1983. – 170 с.

4. Когут А.Т. Полиномиальная аппроксимация в некоторых задачах оптимизации и управления. – Омск : Омский гос. ун-т путей сообщения, 2003. – 243 с.

5. Аверина А.Д., Модяев А.Д. Исследование нелинейных систем управления на основе применения дискретных моделей / под ред. Ю.И. Топчеева. Дискретные нелинейные системы. – М. : Машиностроение, 1982. – С. 183–206.

6. Кориков А.М. Основы теории управления. – Томск : Изд-во НТЛ, 2002. – 392 с.

Когут Алексей Тарасович
Канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой «Радиотехнические и управляющие системы»
Омского государственного университета путей сообщения
Тел.: (3812) 30-38-25 (дом.); (3812) 31-16-72 (раб.)

Лаврухин Андрей Александрович
Канд. техн. наук, ст. преподаватель кафедры «Радиотехнические и управляющие системы»
Омского государственного университета путей сообщения
Тел.: 8 (903) 982-78-48 (сот.); (3812) 31-16-72 (раб.)
E-mail: LavruhinAA@gmail.com

A.T. Kogut, A.A. Lavrukhin

Two-stage algorithm for path control of nonlinear multivariate object

The article is devoted to the approximate algorithms for control, which based on linear models of objects and considered its first and second derivatives. The two-stage procedure was proposed. In this procedure the first order algorithm is main, and the second order algorithm used if it increases the efficiency of the system. The analytic expressions for estimation of necessity such switching has been obtained. Simulation proved its reliability and verified capacity of algorithm.

Keywords: object, system, algorithm, derivative, switching.