

УДК 514.85

Н.Р. Щербаков

Математическая модель планетарного передаточного механизма с эксцентриково-циклоидальным зацеплением

Построена математическая модель работы планетарной зубчатой передачи, предназначенной для приводов, требующих высоких передаточных отношений при небольших габаритах. Создана компьютерная программа, иллюстрирующая кинематически согласованное движение идеальных геометрических фигур – торцевых сечений работающего механизма – и позволяющая находить необходимые для конструирования числовые характеристики, а также позволяющая находить оптимальные режимы функционирования рассматриваемых систем.

Ключевые слова: математическое моделирование, планетарные редукторы, эксцентриково-циклоидальное зацепление.

Моделируемый передаточный механизм относится к зубчатым передачам вращения с планетарными колесами с эксцентриково-циклоидальным зацеплением [1] и предназначен для использования в приводах самого широкого назначения, требующих высоких передаточных отношений при небольших габаритах. Эксцентриково-циклоидальное зацепление – это зацепление колес, одно из которых имеет один зуб в форме кругового эксцентрика, а второе имеет зубья циклоидального профиля.

1. Описание механизма

На рисунке 1 изображён общий вид рассматриваемого планетарного механизма.

На рисунке 2 изображены два плоских сечения, перпендикулярных оси вращения ведущего вала. Центральное колесо выполнено составными из двух венцов 1 и 1а, которые представляют из себя эксцентричные окружности радиуса ρ , смещенные в противоположные от оси передачи стороны на эксцентриситет ε . Это колесо находится во внешнем зацеплении с шестью венцами 2–2а трёх составных сателлитов, причем два венца каждого сателлита повернуты друг относительно друга на половину углового шага. Каждый венец сателлита представляет собой эквидистанту эпитрохоиды (удлиненный эпициклоиды), т.е. кривую, удалённую по нормальям к эпитрохоиде на величину ρ . Оси сателлитов закреплены на водиле 4. Неподвижное колесо внутреннего зацепления выполнено также составным. Оно имеет две ступицы, соединённые вместе. Каждая из ступиц выполнена со своим венцом внутреннего зацепления 3 и 3а, которые также повернуты друг относительно друга на половину углового шага. Каждый из венцов 3 и 3а имеет форму огибающей семейства циклоидальных кривых.

Это семейство образуется венцами сателлитов при работающем механизме. Точки контакта сателлитов с центральными колесами – 5 и 6.

Таким образом, передача представляет собой модуль из трех соосных и вращательно подвижных друг относительно друга звеньев: вала 1–1а, водила 4 и колеса 3–3а. Соединяя одно из них с валом двигателя, другое – с ведомым валом, а третье – с неподвижным корпусом, можно получить передачи с разными передаточными отношениями.

2. Математическая модель работы механизма

Достаточно провести рассуждения для плоского сечения, изображенного на рисунке 2а, так как кривые второго сечения (рис. 2б) получаются из кривых первого сечения поворотом на известные углы.



Рис. 1. Общий вид планетарного механизма

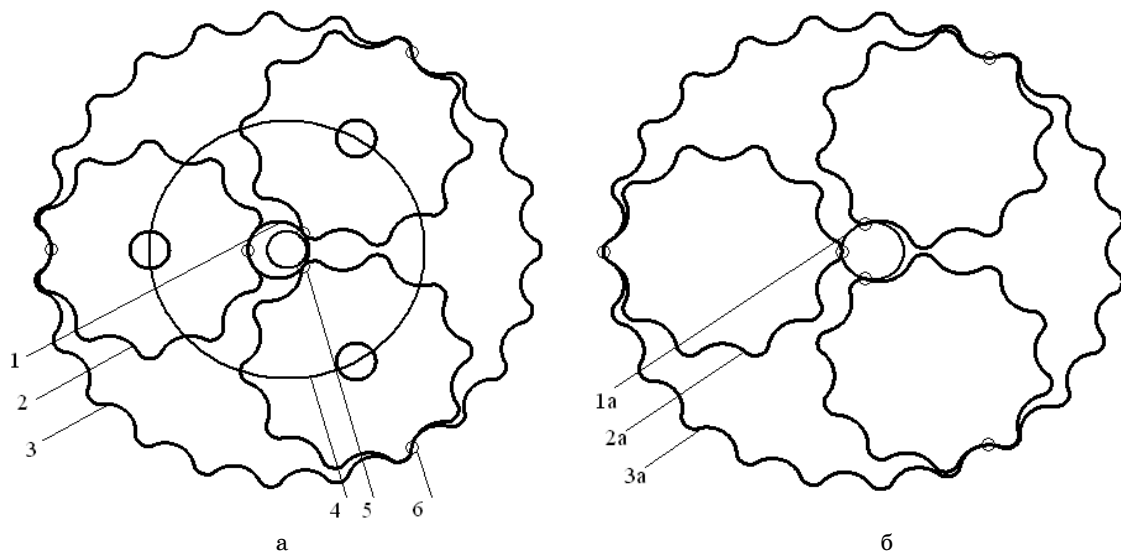


Рис. 2. Сечения, первой (а) и второй (б) ступеней, перпендикулярные оси вращения

Уравнения кривых на рисунке 2а будем получать, считая, что начало системы координат расположено на оси ведущего вала 1. Параметрические уравнения эпитрохоиды запишем в виде:

$$\begin{cases} x(\tau) = -\varepsilon \cos \tau + \frac{D}{2} \cos \frac{\tau}{n}, \\ y(\tau) = -\varepsilon \sin \tau + \frac{D}{2} \sin \frac{\tau}{n}, \end{cases}$$

где D – делительный диаметр, т.е. диаметр окружности, проходящей через точки перегиба профиля сателлита, n – число на единицу большее количества циклов венца сателлита. Параметрические уравнения эквидистанты эпитрохоиды с центром в начале координат, удалённой по нормальям к эпитрохоиде на радиус ρ окружности торцевого сечения центрального колеса внешнего зацепления, имеют вид:

$$\begin{cases} X(\tau) = x(\tau) + \rho n_1(\tau), \\ Y(\tau) = y(\tau) + \rho n_2(\tau), \end{cases}$$

где $n_1(\tau)$, $n_2(\tau)$ – координаты единичного вектора нормали в точке эпитрохоиды. Обозначим через $Q(\Delta)$ матрицу поворота радиус-вектора точки на угол Δ относительно оси OX :

$$Q(\Delta) = \begin{pmatrix} \cos \Delta & -\sin \Delta \\ \sin \Delta & \cos \Delta \end{pmatrix}.$$

Для обеспечения кинематически согласованного движения деталей механизма при повороте ведущего вала на угол δ каждый сателлит должен повернуться на угол $\frac{\delta}{z_3 + 1}$ вокруг оси

ведущего вала и на угол $\frac{-\delta z_3}{(z_3 + 1)(n - 1)}$ вокруг своего центра (z_3 – число зубьев колеса внутреннего зацепления 3–3а).

Тогда радиус-вектор точки венца левого сателлита на рисунке 2а при повороте ведущего вала на угол δ будет иметь координаты, записанные в виде матрицы-столбца:

$$e(\tau, \delta) = Q\left(\frac{\delta}{z_3 + 1}\right) \left[Q\left(\frac{-\delta z_3}{(z_3 + 1)(n - 1)}\right) \begin{pmatrix} X(\tau) \\ Y(\tau) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{D}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (1)$$

Венец неподвижного колеса внутреннего зацепления 3 должен иметь форму огибающей семейства кривых (1), т.е. кривой, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой семейства. Для нахождения этой огибающей поступаем обычным образом: приравниваем нулю определитель из частных производных координат вектор-функции (1) по параметру δ семейства и по параметру кривой τ и получаем связь между этими параметрами в виде тригонометрического уравнения

$$A(\tau) \cos \delta + B(\tau) \sin \delta = C(\tau), \quad (2)$$

где $A(\tau), B(\tau), C(\tau)$ – достаточно сложные тригонометрические выражения – функции от τ . Функциональная зависимость δ от τ находится из (2) с использованием символьного процессора пакета MathCad. Подставляя затем $\delta(\tau)$ в (1), получаем дискриминантную кривую, содержащую кроме точек огибающей ещё и особые точки кривых семейства. Поскольку кривая – периодическая, то достаточно из этого множества точек выбрать точки одного периода и поворотами относительно начала координат получить массив всех точек огибающей. Этот процесс осуществляется с помощью специальной подпрограммы.

3. Нахождение точек контакта и векторов нормалей

Уравнения венца i -го сателлита на рисунке 2а ($i = 0, 1, 2$) получаются из семейства (1) при соответствующем значении δ , которое легко определяется из условия равенства углов между радиус-векторами центров осей соседних сателлитов:

$$\delta s(i, \delta) = \delta + \beta_i(z_3 + 1), \quad \beta_i = i \cdot 2\pi/3.$$

Исходя из кинематической согласованности движения идеальных кривых, нетрудно установить значение параметра π на эквидистанте эпитрохоиды 2 ($i = 0$), при котором получается точка контакта колеса внешнего зацепления с сателлитом для каждого угла поворота ведущего вала (т.е. точка касания кривых 1 и 2 на рисунке 2а):

$$\tau k(\delta) = \delta \left(1 - \frac{1}{z_3 + 1} + \frac{z_3}{(z_3 + 1)(n - 1)} \right).$$

Тогда точки контакта венца i -го сателлита получатся из (1), если вместо τ подставить $\tau k(\delta s(i, \delta))$.

Для сателлитов «второй ступени» с номерами $j = 3, 4, 5$ (рис. 2б) нужно повернуть вектор-функцию (1) на угол $\pi/(n-1)$ и подставить вместо τ

$$\tau k(\delta s(j - 3, \delta)) - \frac{\pi n}{n - 1}.$$

Зная координаты всех точек контакта, можно определить для каждого угла поворота ведущего вала δ «рабочие» венцы сателлитов, т.е. те, которые испытывают реальную силовую нагрузку в контакте с обоими центральными колесами. Это делается с помощью специальной подпрограммы. Из шести венцов сателлитов в любой момент времени нагрузку имеют только три, поэтому далее для обозначения радиус-векторов точек контакта и векторов касательных и нормалей в этих точках мы будем использовать индекс $i = 0, 1, 2$.

Обозначим координаты радиус-вектора точки контакта рабочих сателлитов с центральными колёсами через $\rho_g(i, \delta)$, а радиус-вектор общей нормали к кривым 1 и 2 – через $n_g(i, \delta)$. Радиус-вектор касательной в этой точке контакта обозначим через $t_g(i, \delta)$.

Точка контакта сателлита 2 с венцом колеса внутреннего зацепления 3 находится с помощью специальной подпрограммы среди близких точек этих кривых, по условию параллельности касательных к этим кривым. Радиус-векторы этих точек обозначим через $\rho_s(i, \delta)$. Другая подпрограмма позволяет определять значение параметра на огибающей, дающей точку контакта. Наконец, с помощью процедуры символьного дифференцирования находят вектора касательных $t_s(i, \delta)$ и нормалей $n_s(i, \delta)$ в этих точках контакта.

4. Расчет усилий в точках контакта и определение потерь мощности на трение

Формула для расчета усилий в точках контакта с венцом колеса внутреннего зацепления при угле поворота ведущего вала δ имеет вид:

$$F_g(i, \delta) = \frac{M \sin(\gamma(i, \delta))}{\sum_{i=1}^n |\rho_g(i, \delta)| \sin^2(\gamma(i, \delta))},$$

где M – входной момент на генераторе, $\gamma(i, \delta)$ – угол между радиус-вектором точки контакта $\rho_s(i, \delta)$ и общей нормалью к касающимся кривым. На рисунке 3 показаны величины усилий F_g в точках контакта спутника с генератором при одном полном повороте ведущего вала. При углах, когда усилия отсутствуют – спутник не работает.

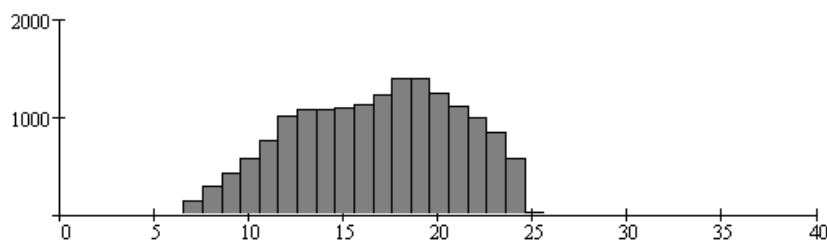


Рис. 3. По вертикальной оси – величины усилий F_g в $\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$, по горизонтальной – $\delta/10$ (углы поворота ведущего вала в градусах)

Теорема о моменте количества движения для относительного движения около центра масс записывается следующим образом [3]:

$$\frac{d\mathbf{K}_c}{dt} = \mathbf{L}_c^e,$$

где \mathbf{K}_c – момент количества движения, определенный относительно центра масс, \mathbf{L}_c^e – момент внешних сил, взятый относительно того же центра.

Для абсолютно твердого тела имеем:

$$\mathbf{K}_c = J_c \boldsymbol{\omega}_c.$$

Здесь J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно вектору мгновенной угловой скорости.

Так как абсолютная величина вектора угловой скорости спутника $\boldsymbol{\omega}_c$ остается постоянной во все время движения и со временем он перемещается лишь параллельно самому себе, то есть в классе свободных векторов он является одним и тем же, то

$$\frac{d\mathbf{K}_c}{dt} = J_c \frac{d\boldsymbol{\omega}_c}{dt} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Поэтому выражение теоремы о моменте количества движения в данном случае примет вид:

$$\mathbf{L}_c^e = \mathbf{0}.$$

Расписывая (3), получим:

$$(\rho_g(i, \delta) - \rho_0(i, \delta)) \times \mathbf{F}_g(i, \delta) + (\rho_s(i, \delta) - \rho_0(i, \delta)) \mathbf{F}_s(i, \delta) = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Здесь $\rho_0(i, \delta)$ – радиус-вектор центра i -го спутника, $\mathbf{F}_g(i, \delta) = F_g(i, \delta) \mathbf{n}_g(i, \delta)$, $\mathbf{F}_s(i, \delta) = F_s(i, \delta) \mathbf{n}_s(i, \delta)$ – вектора усилий в соответствующих точках. Используя (4), мы находим $F_s(i, \delta)$. Тогда выходной момент находится по формуле:

$$M_{\text{вых}} = \sum_{i=1}^3 |\rho_0(i, \delta) \times (\mathbf{F}_g(i, \delta) + \mathbf{F}_s(i, \delta))|.$$

Следуя принципу Лагранжа, при статическом нагружении системы будет выполняться следующее равенство:

$$M\omega_1 = M_{\text{вых}}\omega_2, \quad (5)$$

где ω_1 , ω_2 – угловые скорости соответственно входного вала и кольца, соединяющего центры сателлитов. При наличии же движения в системе соотношение (5) обобщается формальным выражением принципа Даламбера–Лагранжа следующего вида:

$$M\omega_1 = M_{\text{вых}}\omega_2 - Q_{mp}.$$

Здесь Q_{mp} – потери входной мощности на трение. При этом величина Q_{mp} определяется выражением:

$$Q_{mp} = k \sum_{i=1}^3 [F_g(i, \delta)(\Delta V_g(i, \delta), t_g(i, \delta)) + F_s(i, \delta)(V_s(i, \delta), t_s(i, \delta))].$$

Здесь

$$\Delta V_g(i, \delta) = \rho_g(i, \delta) \times \omega_1 - [\rho_0(i, \delta) \times \omega_2 + (\rho_g(i, \delta) - \rho_0(i, \delta)) \times \omega_c],$$

$$V_s(i, \delta) = \rho_0(i, \delta) \times \omega_2 + [(\rho_s(i, \delta) - \rho_0(i, \delta)) \times \omega_c],$$

а k – коэффициент трения.

Заключение

Построена математическая модель работы планетарной зубчатой передачи, предназначенной для приводов, требующих высоких передаточных отношений при небольших габаритах. Создана компьютерная программа, позволяющая находить необходимые для конструирования числовые характеристики, а также находить оптимальные режимы функционирования рассматриваемых систем.

Математическая и компьютерная модели использовались при конструировании разработки, на которую получен патент РФ [4].

Литература

1. Пат. 2 338 105 РФ, МПК⁵¹ F16H 55/08. Зацепление колес с криволинейными зубьями (варианты) и планетарная передача на его основе / В.В. Становской, С.М. Казакиявичюс, Т.А. Ремнёва, В.М. Кузнецов. – №2007 125 891/11 ; заявлено 09.07.2007 ; опубликовано 10.11.2008, Бюл. №31.
2. Шанников В.М. Планетарные редукторы с внецентроидным зацеплением. – М.-Л. : ГНТИМЛ, 1948. – 172 с.
3. Лойцянский Л.Г., Лурье А.Н. Курс теоретической механики. – М. : ГИТТЛ, 1955. – Т.2. – 379 с.
4. Пат. 2 345 257 РФ, МПК⁵¹ F16H 1/34. Планетарная зубчатая передача / В.В. Становской, С.М. Казакиявичюс, Т.А. Ремнёва, В.М. Кузнецов. – №2007 134 617/11 ; заявлено 31.08.2007 ; опубликовано 27.01.2009, Бюл. №32.

Щербаков Николай Романович

Канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой геометрии механико-математического факультета ТГУ

Тел.: (3822) 53-22-13

Эл. почта: nrs@math.tsu.ru

N.R. Shcherbakov

The mathematical simulation of planetary tooth gear operation with eccentric cycloidal engagement

The mathematical model of planetary tooth gear operation for drives requiring high reduction ratio under small clearance had been constructed. The computer program illustrating the kinematic cooperative motion of ideal geometrical shapes had been developed. This program allows to determine numerical characteristics necessary for engineering and it also allows to retrieve the best performance of the considered systems.

Keywords: mathematical model, planetary reduction, cycloid eccentric gearing.