

УДК 514.85

А.М. Бубенчиков, Н.Р. Щербаков

Математическое моделирование работы эксцентриковой передачи с промежуточными телами качения и самоторможением

Построена математическая модель движения деталей принципиально нового планетарного редуктора с промежуточными телами качения, обладающего эффектом самоторможения при высоком КПД прямого хода. Приведены результаты компьютерного моделирования и расчетов КПД прямого и обратного хода такого редуктора. Показано, что при определенных условиях редуктор имеет надежно гарантированный режим самоторможения.

Ключевые слова: математическое моделирование, редуктор, самоторможение.

Самотормозящие передачи – это механизмы, совмещающие функции передачи движения и автоматического торможения привода после выключения двигателя [1, 2]. Эти механизмы используют в машинах, в которых по тем или иным причинам обратный поток мощности недопустим. Разработанные конструкторами ЗАО «Технология маркет» (г. Томск) передачи [3–5] являются достаточно новыми и в настоящее время интенсивно разрабатываются в связи с тем, что они обладают рядом преимуществ перед любыми другими передачами. Это малые удельные массогабаритные показатели и высокий КПД, обусловленный частичной заменой трения скольжения на трение качения. Очень эффективно применение самотормозящих передач в авиационной технике, где проблема снижения массы имеет первостепенное значение.

1. Описание механизма

В данной работе построена компьютерная модель механизма самоторможения в передаче с зацеплением с помощью промежуточных тел качения – шариков. На рисунке 1 изображён общий вид эксцентрикового редуктора с шариковым зацеплением, динамическое состояние которого описывается построенной в данной работе математической моделью.

На рисунке 2 изображены основные детали рассматриваемого эксцентрикового редуктора.

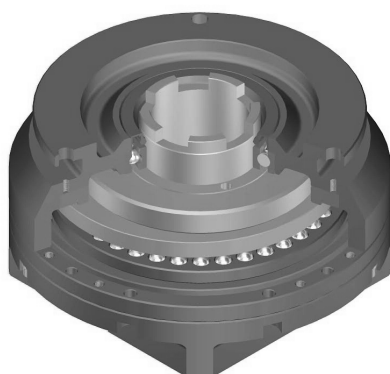


Рис. 1. Общий вид эксцентрикового редуктора

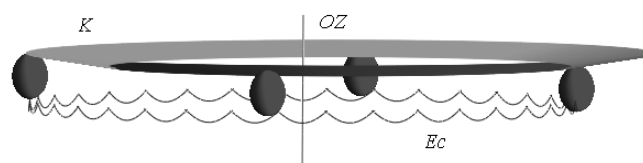


Рис. 2. Принципиальная схема устройства редуктора

Рабочая поверхность K ведущего диска является частью боковой поверхности конуса, ось вращения которого смещена параллельно оси OZ на эксцентриситет ε . Шарик (на рисунке 2 изображены только 4 из 37), касаясь поверхности конуса K , находится в вертикальных цилиндрических прорезях выходного диска-сепаратора на равных расстояниях друг от друга и

касаются неподвижной дорожки качения – торцевого профиля зубчатого венца. Синусоидальная кривая Ec с $Z1 = Z2 - 1$ циклами ($Z2 = 37$ – количество шариков) на рисунке 2 – линия контакта шаров с венцом. При вращении ведущего вала диск с конической боковой поверхностью, посаженный с помощью подшипника на эксцентрике, совершает плоскопараллельное планетарное движение – вершина конуса описывает в плоскости, перпендикулярной OZ , окружность радиуса ϵ . В результате шарики, обкатываясь по торцевому профилю зубчатого венца и совершая осевые перемещения в прорезях сепаратора, поворачивают сепаратор на угол $\alpha/Z1$ при повороте ведущего вала на угол α .

2. Вывод уравнения линии центров шаров

Для построения кинематически согласованной модели работы механизма будем считать, что в каждый момент времени центры шаров лежат в одной плоскости и находятся на эллипсе el сечения цилиндра радиуса R этой плоскостью (рис. 3).

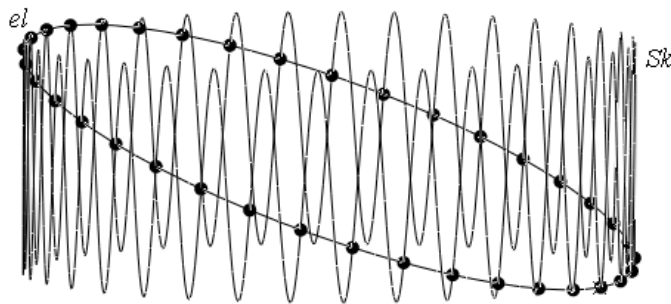


Рис. 3. Линия центров шаров

Тогда можно получить точное уравнение синусоидальной кривой Sk на цилиндре радиуса R , которую опишет центр одного шара при работе механизма, а центры всех шаров в каждый момент времени определятся как точки пересечения этой кривой с эллипсом el .

При работе механизма нормаль к плоскости эллипса el поворачивается вокруг оси вращения ведущего вала (ось OZ) составляя с ней постоянный угол θ . Для нахождения этого угла рассмотрим сечение механизма в начальный момент времени плоскостью, проходящей через OZ и большую ось эллипса el (рис. 4).

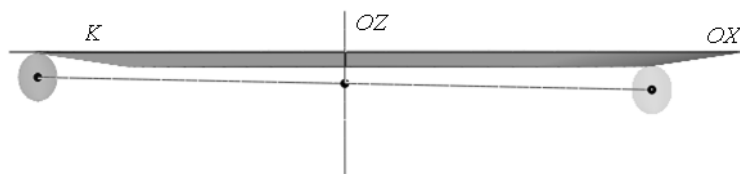


Рис. 4. Плоское сечение в начальный момент времени

Требую, чтобы концы большой оси эллипса el были равноудалены на радиус шара ρ от образующих конуса, лежащих в плоскости сечения, получаем:

$$R \operatorname{tg} \theta = \epsilon \operatorname{tg} \beta, \quad (1)$$

где β – угол между образующими конуса и плоскостью, перпендикулярной его оси.

Вектор нормали к плоскости эллипса el в начальный момент времени имеет вид:

$$N = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где θ находится из (1).

При повороте нормали на угол α вокруг оси OZ , обозначая матрицу этого поворота через

$$Q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

в силу (2) и (3) получаем:

$$N(\alpha) = Q(\alpha)N = \begin{pmatrix} -\cos\alpha \sin\theta \\ -\sin\alpha \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Центр эллипса el при работе механизма остается неподвижным и находится в точке $Ce\{0, 0, b\}$, где

$$b = \operatorname{tg}\beta(R-r) - \frac{\rho}{\cos\beta}, \quad (5)$$

здесь r – радиус окружности сечения конуса, ограничивающего рабочую поверхность снизу. Таким образом, эллипс el получается как сечение прямого кругового цилиндра радиуса R , заданного параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R \cos u, \\ y = R \sin u, \\ z = v, \end{cases} \quad (6)$$

плоскостью, проходящей через точку Ce , с нормалью $N(\alpha)$. Записывая уравнение этой плоскости в виде:

$$z = x \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\theta + y \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\theta + b,$$

получаем параметрические уравнения эллипса el для каждого значения α :

$$\begin{cases} x = R \cos u, \\ y = R \sin u, \\ z = R \operatorname{tg}\theta \cdot \cos(u - \alpha) + b. \end{cases} \quad (7)$$

Фиксированная точка этого эллипса (например, при $u = 0$ – центр первого шара) при работе механизма будет поворачиваться вокруг оси OZ на угол $\varphi(\alpha) = \alpha/Z1$. Умножая матрицу этого поворота (3) слева на вектор-столбец координат фиксированной точки эллипса (7) при $u = 0$, получаем параметрические уравнения синусоидальной кривой Sk :

$$\begin{cases} x = R \cos\varphi(t), \\ y = R \sin\varphi(t), \\ z = R \operatorname{tg}\theta \cdot \cos(t) + b. \end{cases} \quad (8)$$

Из (8) при $t_k = (2pk + \alpha)Z1/Z2$ получаются координаты центра k -го шара ($k = 0, 1, \dots, Z2-1$) для любого значения α .

3. Вывод уравнения линии контакта шаров с неподвижной дорожкой качения

Дорожка качения (внутренний профиль зубчатого венца) должна представлять собой поверхность – часть огибающей семейства сфер радиуса ρ , центры которых находятся на кривой Sk . Будем считать, что искомая линия контакта является пересечением этой поверхности с цилиндром радиуса R , на котором лежит кривая Sk .

Точки искомой линии должны лежать на цилиндре (6) и в нормальной плоскости к линии Sk ; уравнение этой плоскости запишем в виде:

$$(x - Sk_0(t)) Sk'_0(t) + (y - Sk_1(t)) Sk'_1(t) + (z - Sk_2(t)) Sk'_2(t) = 0,$$

где нижний индекс i означает $(i + 1)$ -ю координату производной вектор-функции (8). Выражая отсюда z и подставляя в (6), получим параметрические уравнения линии Ec :

$$\begin{cases} x = R \cos u(t), \\ y = R \sin u(t), \\ z = R \left[\operatorname{tg} \theta \cdot \cos t + \frac{\sin(u(t) - \phi(t))}{Z1 \operatorname{tg} \theta \cdot \sin t} \right] + b, \end{cases} \quad (9)$$

где зависимость u от t находится из условия удалённости точки линии Ec от соответствующей точки линии Sk на радиус шара ρ и имеет вид:

$$\cos(u - \phi(t)) - \frac{\sin^2(u - \phi(t))}{2(Z1 \operatorname{tg} \theta \cdot \sin t)^2} = 1 - \frac{\rho^2}{2R^2}.$$

Решения этого тригонометрического уравнения находятся при помощи символьных вычислений в пакете MathCad, при этом необходимо отобразить только те решения, которые приводят к точкам, расположенным ниже линии Sk , для чего создана специальная подпрограмма. Из (9) при $t_k = (2\pi k + \alpha)Z1/Z2$ получаются координаты точек контакта k -го шара ($k = 0, 1, \dots, Z2-1$) с дорожкой качения для любого значения α .

4. Нахождение точек контакта шаров с конической поверхностью

Уравнение конической поверхности при повороте ведущего вала на угол α запишем в виде вектор-функции двух аргументов:

$$K(u, v) = Q(\alpha)Vk + uLk(v), \quad (10)$$

где через Vk обозначен столбец координат вершины конуса в начальный момент времени – $\{\varepsilon, 0, -\operatorname{tg} \beta r\}$, а через $Lk(v)$ – столбец координат направляющих векторов прямолинейных образующих – $\{\cos v \cos \beta, \sin v \cos \beta, \sin \beta\}$. Будем искать такие точки на конусе (10) (значения параметров u, v), для которых конец отрезка длиной ρ нормали к конусу в точке (u, v) совпадает с центром соответствующего шара. Приравнявая координаты радиус-векторов конца отрезка нормали и центра шара при заданных k и α , получаем систему трёх уравнений на два неизвестных u, v . Эта система оказывается несовместной, что доказывает, что исходное предположение о плоском расположении центров шаров – неверно. Однако если найти u и v из двух уравнений системы в виде:

$$\begin{aligned} u &= \frac{r - \varepsilon \cos\left(\frac{(2\pi k + \alpha)Z1}{Z2}\right)}{\cos \beta} + \frac{b}{\sin \beta} + \rho \operatorname{ctg} \beta, \\ v &= \operatorname{arctg} \left(\frac{R \sin\left(\frac{2\pi k + \alpha}{Z2}\right) - \varepsilon \sin \alpha}{R \cos\left(\frac{2\pi k + \alpha}{Z2}\right) - \varepsilon \cos \alpha} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

то они дадут точки на конусе весьма близкие к истинным точкам контакта (расстояние между близкими и истинными точками составляет в среднем 0,05% от радиуса шара). Поэтому естественно взять значения $t_k = (2\pi k + \alpha)Z1/Z2$, дающие координаты этих «близких» точек за начальные приближения для численного решения системы трёх уравнений, относительно трёх неизвестных – u, v и t , где t – параметр синусоидальной кривой Sk . Решение этой системы запишем в виде:

$$\begin{aligned} u &= \frac{r - \varepsilon \cos(t(\alpha))}{\cos \beta} + \frac{b}{\sin \beta} + \rho \operatorname{ctg} \beta, \\ v &= \operatorname{arctg} \left(\frac{R \sin\left(\frac{t(\alpha)}{Z1}\right) - \varepsilon \sin \alpha}{R \cos\left(\frac{t(\alpha)}{Z1}\right) - \varepsilon \cos \alpha} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

причём значение t при заданном α находится численным решением с начальными приближениями $t_k = (2\pi k + \alpha)Z1/Z2$ следующего уравнения

$$2R\epsilon \cos\left(\alpha - \frac{t}{Z1}\right) = -\epsilon^2 \cos^2 t + 2\epsilon c \cos t + R^2 + \epsilon^2 - c^2,$$

где

$$c = \frac{b \cos\beta + r \sin\beta + \rho}{\sin\beta} = const.$$

Таким образом, мы предполагаем, что центры шаров в каждый момент времени, хоть и не находятся в одной плоскости, но лежат на кривой Sk . Отклонение найденных с помощью (12) центров шаров от осей соответствующих цилиндрических прорезей сепаратора не превосходит величины $\rho + 1,8\% \rho$, т.е. радиус этих прорезей должен быть больше радиуса шара на $1,8\% \rho$.

5. Определение рабочих шаров и расчет усилий, действующих на шар

Для определения «рабочих» шаров – тех, которые испытывают в каждый момент времени (т.е. при повороте ведущего вала на угол α) силовую нагрузку, создана подпрограмма, работающая в два этапа. Сначала определяются шары, для которых угол между радиус-вектором центра шара и осью OX больше (для обратного хода – меньше), чем угол между радиус-вектором точки контакта с конусом и осью OX . Из этих шаров удаляются те, точки контакта которых с дорожкой качения попадают в зоны петель кривой Ec . Эти зоны определяются специальной подпрограммой.

Первоначально определим стационарные усилия, возникающие в системе при подаче небольшой нагрузки на вход (конус), которая еще не приводит к возникновению движения в устройстве. Момент, приложенный к входной детали, вызывает усилия, действующие на шары в точках контакта с конусом; величины этих усилий рассчитываются по формуле:

$$F_k = \frac{M\phi_k \sin \gamma_k}{\sum_{i=0}^{Z1-1} \rho_i \phi_i \sin^2 \gamma_i}. \tag{13}$$

Здесь M – входной момент, $\phi_k = 1$, если шар «рабочий», и 0 – в противном случае; ρ_i – расстояние от оси устройства до точки контакта отдельного шара с конусом; γ_k – угол, который составляет вектор усилия с направлением «точка контакта – центр устройства» в плоскости, перпендикулярной оси устройства. На рисунке 5 показаны величины усилий F_k в точках контакта работающих шаров с генератором, дорожкой качения и сепаратором в фиксированный момент времени.

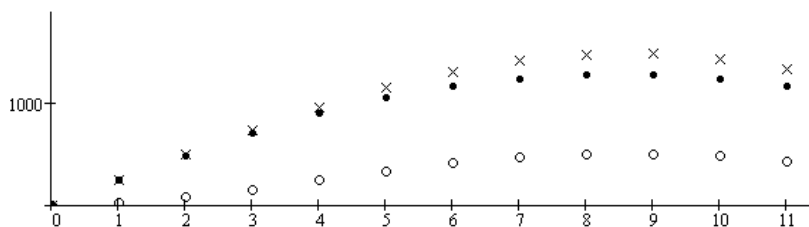


Рис. 5. По вертикальной оси – величины усилий F_k в $кг \cdot м \cdot с^{-2}$ в точках контакта: × – с генератором, • – с дорожкой качения, o – с сепаратором; по горизонтальной – номера работающих шаров

У катящегося по твёрдой поверхности твёрдого тела существуют предельные значения сил трения, но они столь незначительны, что ими можно пренебречь. Таким образом, в случае отсутствия движения реакция со стороны конуса направлена по нормали к поверхности

шара, т.е. к его центру. Реакции со стороны двух других деталей также будут направлены к центру шара. Поскольку точки контакта с этими деталями известны, то известны и углы между направлениями усилий в треугольнике сил, выражающем собой условие локального равновесия для каждого отдельно взятого шара. Причем в этом треугольнике одна из сторон известна. Решая треугольник, находим величины двух других усилий.

Зная усилия, возникающие на выходной детали, в данном случае на сепараторе, мы можем рассчитать выходной момент M_1 , который окажется связанным с входным моментом трансмиссионным соотношением следующего вида:

$$M_1 = \frac{\omega}{\omega_1} M, \quad (14)$$

где ω , ω_1 – угловые скорости вращения ведущего кривошипа и сепаратора соответственно.

Использование закона (13) позволяет в точности выполнить трансмиссионное соотношение (14), являющееся формальным выражением фундаментального принципа Лагранжа [6]. При этом угловые скорости, обеспечивающие кинематически согласованное движение, связаны соотношением:

$$\omega_1 = \frac{\omega}{Z1}. \quad (15)$$

В случае же, когда реализуется движение, мы находим величину и направление скоростного скольжения на конусе и сепараторе (считается, что по профилю зубчатого венца шары катятся без скольжения), а следовательно, и величины сил трения в точках контакта с этими деталями. Поэтому результирующие воздействия со стороны конуса и цилиндрического канала сепаратора на каждый из отдельных шаров уже не будут направлены к его центру. В этом случае при расчете сил мы поступаем следующим образом. В треугольнике сил, образованном нормальными реакциями на шар со стороны всех трех деталей, мы «урезаем» нормальную составляющую на сепараторе (являющемся при прямом ходе выходом) до тех пор, пока не будет выполнено соотношение

$$M\omega = M_1\omega_1 - Q_k - Q_s, \quad (16)$$

где Q_k – потери мощности на трение на конусе, Q_s – соответствующие потери на сепараторе.

Соотношение (16) является формальным выражением принципа Даламбера–Лагранжа, в котором учтены потери мощности на трение, но не учтена удельная работа сил инерции. Последняя могла бы проявиться при высоких значениях ω , не характерных для разрабатываемых систем.

6. Обратный ход системы

Считая теперь входной деталью сепаратор и разбрасывая входной момент M_1 по формуле (13), мы находим усилия, действующие в точках контакта шаров с сепаратором. Проведя стационарный расчет усилий и формально подставляя полученные значения реакций в уравнение принципа Даламбера–Лагранжа:

$$M_1\omega_1 = M\omega - Q'_k - Q'_s, \quad (17)$$

где Q'_k , Q'_s – виртуальные значения потерь на трение при обратном ходе, мы получаем отрицательную правую часть (17), т.е. отрицательную величину η – коэффициента полезного действия (КПД).

Отбрасывая величины нормальных реакций на конусе, мы остаемся в области нереальных отрицательных значений КПД. Это говорит о том, что обратный ход системы невозможен, по крайней мере, для значений коэффициентов трения скольжения $f > 0,045$.

Заключение

Таким образом, в работе с использованием точного описания поверхностей устройства и линий контакта деталей построена математическая модель кинематически согласованного движения частей планетарного редуктора, обладающего эффектом самоторможения.

Проведён расчёт усилий в точках контакта деталей механизма с рабочими шарами. Определено скоростное скольжение в этих точках и найдена величина потерь мощностей на трение. Расчётами установлено, что при значении коэффициента трения скольжения $f = 0,045$ коэффициент полезного действия прямого хода $\eta = 84\%$; при $f = 0,065$ – $\eta = 76\%$, при $f = 0,1$ – $\eta = 63\%$. Во всех случаях это высокий уровень КПД для систем с самоторможением.

При $f < 0,045$ коэффициент обратного хода η' становится положительным, т.е. в системе возможно обратное движение, вызываемое вращением выходной детали.

Литература

1. Игнатищев Р.М. Общие сведения о синусошариковых передачах // Вестник машиностроения. – 1986. – №2. – С. 26–27.
2. Панкратов Э.Н., Шумский В.В., Лушников С.В. Волновые редукторы с промежуточными звеньями // Бурение и нефть. – 2003. – №2. – С. 26–27.
3. Пат. 2 179 272 РФ, МПК⁵¹ 7F16H 25/06. Дифференциальный преобразователь скорости «Редуктор-подшипник» / В.В. Становской, А.Ф. Шибико, Т.А. Ремнева, А.В. Становской, В.В. Кривошеев. – №2001 108 604/28 ; заявлено 30.03.2001 ; опубликовано 10.02.2002, Бюл. №4.
4. Пат. 2 246 649 РФ, МПК⁵¹ 7F16H 25/06. Планетарный шариковый передающий узел / В.В. Становской, С.М. Казакиявичюс, А.Г. Петракович. – №2003 119 476/11 ; заявлено 26.06.2003 ; опубликовано 20.02.2005, Бюл. №5.
5. Пат. 2 253 776 РФ, МПК⁵¹ 7F16H 25/06. Передающий узел планетарной шариковой передачи / В.В. Становской, С.М. Казакиявичюс, А.Г. Петракович. – №2003 116 366/11 ; заявлено 02.06.2003 ; опубликовано 10.06.2005, Бюл. №16.
6. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М. : ГИТТЛ, 1955. – Т.1. – 379 с.

Бубенчиков Алексей Михайлович

Доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой теоретической механики механико-математического факультета ТГУ
Тел.: (3822) 52-97-40

Щербаков Николай Романович

Канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. каф. геометрии механико-математического факультета ТГУ
Тел.: (3822) 53-22-13
Эл. почта: nrs@math.tsu.ru

A.M. Bubenchikov, N.R. Shcherbakov

The mathematical modeling of eccentric's gear work with intermediate solids of revolution and self-braking

The mathematical model of components motion of fundamentally new planetary reduction gear with intermediate solids of revolution with self-braking effect at high efficiency forward trace was developed / The results of computer modelling and efficiency calculations of such reduction gear are presented. Shown that at certain conditions the reduction gear has the secure conditions of self-braking.

Keywords: mathematical model, reduction, self-braking.
