

УДК 621.396.6:004.942

А.В. Ненашев

Сходимость метода последовательных приближений при моделировании нелинейных радиотехнических устройств. Метод простой итерации

Рассмотрены вопросы сходимости метода последовательных приближений при моделировании нелинейных радиотехнических устройств. Исследованы теоретические основы, на примере метода простой итерации даны рекомендации по расширению области сходимости.

Ключевые слова: моделирование, нелинейные устройства, последовательные приближения, сходимость.

Для численного анализа и моделирования нелинейных систем часто используются методы последовательных приближений. К ним относится, например, метод гармонического баланса, применяемый в популярном пакете схемотехнического моделирования Microwave Office. В [1, 2] автором предложен метод моделирования нелинейных радиотехнических устройств, являющийся методом последовательных приближений, в котором нелинейные элементы рассматриваются как параметрические. Отмечено, что важнейшим является вопрос о сходимости, но подробно он не был рассмотрен.

Постановка задачи: рассмотреть принципы определения пределов сходимости предложенного метода моделирования, выявить возможность их расширения, выработать практические рекомендации по применению.

Методы последовательных приближений (итерационные) широко известны в теории численного решения уравнений и их систем, в частности, нелинейных (трансцендентных) уравнений [3]. Вопрос об их сходимости опирается на основные понятия функционального анализа [4]. К таким понятиям относится *множество*, т.е. совокупность элементов того или иного вида. Это могут быть числа, объединённые каким-либо свойством, либо функции. Если определено понятие расстояния ρ между двумя элементами множества X , пару (X, ρ) называют *метрическим пространством*. Если есть два метрических пространства X и Y , для них вводится понятие *отображения* X в Y , которое выражают как функцию $y = f(x)$ либо как оператор $Y = FX$. Если пространства X и Y совпадают, говорят, что F отображает пространство X в себя. Важным является понятие *сжимающего отображения*. Пусть имеются две точки x_1 и x_2 , принадлежащие X . Отображение F называется сжимающим, если выполняется соотношение $\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha \cdot \rho(x_1, x_2)$ при $\alpha < 1$. Иначе говоря, расстояние между значениями функций должно быть меньше, чем расстояние между значениями их аргументов. Если имеется сходящаяся последовательность значений $x_{(0)}, x_{(1)}, \dots, x_{(n)} \rightarrow x$, их отображения также будут сходящимися $f(x_{(0)}), f(x_{(1)}), \dots, f(x_{(n)}) \rightarrow f(x)$. Точка x называется неподвижной точкой отображения, если $f(x) = x$. Таким образом, неподвижная точка является корнем уравнения $f(x) = x$.

Рассмотренный принцип используется для решения нелинейных уравнений, в которых $x \in X$ есть множество действительных чисел, а $f(x)$ – нелинейная функция. В то же время, теория функционального анализа не исключает случаи, когда в состав уравнения входит функционал. Например, рассматривается нелинейное интегральное уравнение [4]

$$f(x) = \lambda \cdot \int_a^b K(x, y; f(y)) \cdot dy + \phi(x), \quad (1)$$

где K и ϕ непрерывны, а ядро $K(x, y; z)$ удовлетворяет условию Липшица по аргументу z : $|K(x, y; z_1) - K(x, y; z_2)| \leq M \cdot |z_1 - z_2|$, где M – произвольная константа. Функция f определена в пространстве $C[a, b]$. Если обозначить правую часть как $g(x)$, можно записать:

$$g(x) = \lambda \cdot \int_a^b K(x, y; f(y)) \cdot dy + \phi(x), \text{ или } g = \mathbf{A}f, \text{ где } \mathbf{A} - \text{оператор, отображающий } C \text{ само в}$$

себя. Уравнение (1) может решаться методом последовательных приближений, если выполнен принцип сжимающих отображений. Для его проверки проводят оценку наибольшего расстояния между двумя значениями функционала $g(x)$ с учётом условия Липшица:

$$\max |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| \cdot (b - a) \cdot M \cdot \max |f_1(x) - f_2(x)|, \text{ где } g_1(x) = \mathbf{A}f_1(x), \quad g_2(x) = \mathbf{A}f_2(x).$$

Отсюда следует, что при $\lambda < 1 / [(b - a) \cdot M]$ отображение \mathbf{A} будет сжимающим. Это достаточное условие сходимости метода последовательных приближений при решении уравнения (1). Самая простая из его известных реализаций – метод простой итерации. Кратко его суть следующая. Пусть нелинейное уравнение записано в общем виде

$$\varphi(x) = 0, \tag{2}$$

где функция $\varphi(x)$ определена на $[a, b]$. Известна достаточно малая область, в которой располагается решение $x = a$. В ней выбирается начальное приближение $x_{(0)}$, достаточно близкое к искомому корню. Выбирают функцию $\psi(x)$ так, чтобы корень $x = a$ совпадал с корнем уравнения $x = \psi(x)$. Затем строится последовательность $x_{(0)}, x_{(1)}, \dots, x_{(n)}, \dots$ через соотношение $x_{(n)} = \psi(x_{(n-1)})$, образующее итерационный процесс. Здесь и далее нижний индекс в скобках означает номер вычисляемого приближения. Сходимость обеспечивается выбором вида функции $\psi(x)$ и начального приближения $x_{(0)}$. Предъявляется требование,

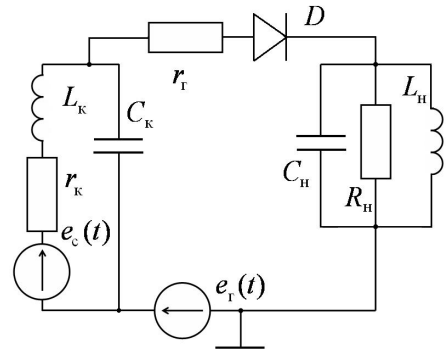
чтобы функция $\psi(x)$ удовлетворяла условию Липшица $|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leq M \cdot |x_1 - x_2|$ с константой $M < 1$. Если функция $\psi(x)$ дифференцируема, условие Липшица будет иметь место, когда в некоторой окрестности корня $x = a$ выполняется соотношение $|\psi'(x)| \leq M < 1$. Принципиальным является вопрос, как выбрать функцию $\psi(x)$, чтобы обеспечить наилучшую сходимость. Один из способов [5]:

$$\psi(x) = x - \delta \cdot \varphi(x), \tag{3}$$

где δ – константа.

Используем метод простой итерации для анализа нелинейной радиотехнической цепи. Рассмотрим устройство с одним нелинейным элементом – диодный преобразователь частоты [2], упрощенная эквивалентная схема которого изображена на рис. 1.

Рис. 1. Эквивалентная схема преобразователя



Контур L_k, C_k настроен на частоту сигнала. Сопротивление источника ЭДС $e_c(t)$ входит в сопротивление потерь контура r_k . Сопротивление r_g гетеродина $e_r(t)$ изображено рядом с диодом D . Выходное напряжение снимается с контура L_n, C_n, R_n , настроенного на промежуточную частоту. Сигнал и напряжение гетеродина имеют вид гармонических функций

$$e_c(t) = U_{m_c} \sin(2\pi f_c t), \quad e_r(t) = U_{m_r} \sin(2\pi f_r t),$$

где $U_{m_c}, f_c, U_{m_r}, f_r$ – амплитуда и частота, соответственно, входного сигнала и гетеродинного напряжения. Разность частот $f_{пр} = f_r - f_c$ равна промежуточной частоте. Для упрощения положим, что ёмкость диода равна нулю. Линеаризованное уравнение в операторной форме имеет вид

$$U_d(s) \cdot [1 + g_d \cdot Z_\Sigma(s)] = E_{эКВ}(s),$$

где $U_d(s)$ – изображение напряжения на диоде, $E_{эКВ}(s) = E_r(s) + E_c(s) / (1 + s \cdot r_k \cdot C_k + s^2 L_k \cdot C_k)$ – эквивалентная ЭДС;

$$Z_{\Sigma}(s) = r_{\Gamma} + (r_{\kappa} + s \cdot L_{\kappa}) / \left((1 + s \cdot r_{\kappa} \cdot C_{\kappa} + s^2 \cdot L_{\kappa} \cdot C_{\kappa}) + s \cdot L_{\text{H}} / \left((1 + s \cdot L_{\text{H}} / R_{\text{H}} + s^2 \cdot L_{\text{H}} \cdot C_{\text{H}}) \right) \right) -$$

суммарное сопротивление, включенное последовательно с диодом, g_d – проводимость линеаризованной модели диода. При переходе во временную область получим уравнение:

$$u_d(t) = e_{\text{ЭКВ}}(t) - \int_0^t u_d(\tau) \cdot g_d[u_d(\tau)] \cdot z_{\Sigma}(t - \tau) \cdot d\tau, \quad (4)$$

где $z_{\Sigma}(t)$ – импульсная характеристика сопротивления Z_{Σ} . Здесь учтена нелинейность проводимости диода, т.е. $g_d = g_d(u_d)$. Время принимает значения в пределах $t \in [0, T]$. По структуре уравнение совпадает с (1). Следовательно, решение можно искать методом последовательных приближений, если выполнен принцип сжимающих отображений. Для метода простой итерации, исходя из (2), (4), запишем

$$\varphi[u_d(t)] = u_d(t) + \int_0^t u_d(\tau) \cdot g_d[u_d(\tau)] \cdot z_{\Sigma}(t - \tau) \cdot d\tau - e_{\text{ЭКВ}}(t).$$

Вначале полагаем, что в (3) $\delta = 1$, тогда

$$\psi[u_d(t)] = - \int_0^t u_d(\tau) \cdot g_d[u_d(\tau)] \cdot z_{\Sigma}(t - \tau) \cdot d\tau + e_{\text{ЭКВ}}(t). \quad (5)$$

Итерационная процедура имеет вид $u_{d(n)}(t) = \psi[u_{d(n-1)}(t)]$. Условие сжимающего отображения

$$\max_{t \in [0, T]} |\psi[u_{d(n)}(t)] - \psi[u_{d(n-1)}(t)]| \leq M \cdot \max_{t \in [0, T]} |u_{d(n)}(t) - u_{d(n-1)}(t)|, \quad (6)$$

где $M < 1$. При условии сходимости алгоритма расстояние между $u_{d(n)}(t)$ и $u_{d(n-1)}(t)$ должно быть малым. При этом, в случае обычного нелинейного уравнения, можно приближённо выразить левую часть через производную от функции и приращение аргумента. В нашем случае в уравнении присутствует функционал, прямое дифференцирование которого невозможно. Используется понятие дифференциала Гато и производной Гато [4, 6]. Тогда можно записать (6) в виде

$$\max_{t \in [0, T]} |\psi'[u_d(t)] \cdot \Delta u_d(t)| \leq M \cdot \max_{t \in [0, T]} |\Delta u_d(t)|. \quad (7)$$

Здесь $\psi'[u_d(t)] \cdot \Delta u_d(t)$ – дифференциал Гато. Правило нахождения такого дифференциала от функционала, представленного интегральной функцией, можно найти, например, в [6]. Используя (5), получим

$$\psi'[u_d(t)] \cdot \Delta u_d(t) = - \int_0^t \left(g_d[u_d(\tau)] + u_d(\tau) \cdot \frac{d}{du_d} g_d[u_d(\tau)] \right) \cdot \Delta u_d(\tau) \cdot z_{\Sigma}(t - \tau) \cdot d\tau.$$

Тогда неравенство (7) примет вид

$$\max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \left(g_d[u_d(\tau)] + u_d(\tau) \cdot \frac{dg_d(\tau)}{du_d} \right) \cdot \Delta u_d(\tau) \cdot z_{\Sigma}(t - \tau) \cdot d\tau \right| \leq M \cdot \max_{t \in [0, T]} |\Delta u_d(t)|. \quad (8)$$

Для оценки предельного значения левой части справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \left(g_d[u_d(\tau)] + u_d(\tau) \cdot \frac{dg_d(\tau)}{du_d} \right) \cdot \Delta u_d(\tau) \cdot z_{\Sigma}(t - \tau) \cdot d\tau \right| \leq \\ & \leq t \cdot \max_{t, \tau \in [0, T]} \left| \left(g_d[u_d(\tau)] + u_d(\tau) \cdot \frac{dg_d(\tau)}{du_d} \right) \cdot z_{\Sigma}(t - \tau) \right| \cdot \max_{t \in [0, T]} |\Delta u_d(t)|. \end{aligned} \quad (9)$$

Будем считать, что интегрирование производится в пределах интервала наблюдения T . Тогда, сравнивая (8) и (9), получим

$$T \cdot \max_{t, \tau \in [0, T]} \left| \left(g_d[u_d(\tau)] + u_d(\tau) \cdot \frac{dg_d(\tau)}{du_d} \right) \cdot z_{\Sigma}(t - \tau) \right| \leq M,$$

где $M < 1$. Отсюда условием сходимости метода последовательных приближений является соотношение

$$T \cdot \max_{t, \tau \in [0, T]} \left| \left(g_d[u_d(\tau)] + u_d(\tau) \cdot \frac{dg_d(\tau)}{du_d} \right) \cdot z_{\Sigma}(t - \tau) \right| < 1. \quad (10)$$

Это условие достаточное, т.е. гарантирует сходимость. Очевидно, что оно далеко не всегда является необходимым, поэтому сходимость обеспечивается с запасом.

Подобные выражения можно получить для случая, когда в (3) выбрано значение $\delta \neq 1$. Тогда (5) будет иметь вид

$$\psi[u_d(t)] = (1-\delta) \cdot u_d(t) - \delta \cdot \left[\int_0^t u_d(\tau) \cdot g_d[u_d(\tau)] \cdot z_\Sigma(t-\tau) \cdot d\tau - e_{\text{ЭКВ}}(t) \right].$$

Алгоритм последовательных приближений

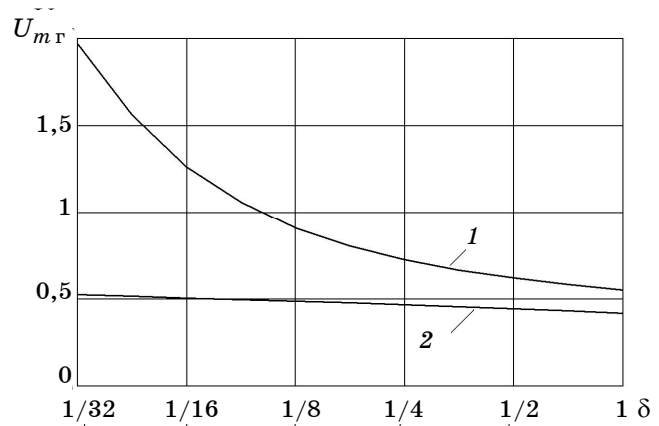
$$u_{d(n)}(t) = -\delta \cdot \left[\int_0^t u_{d(n-1)}(\tau) \cdot g_d[u_{d(n-1)}(\tau)] \cdot z_\Sigma(t-\tau) \cdot d\tau - e_{\text{ЭКВ}}(t) \right] + (1-\delta) \cdot u_{d(n-1)}(t). \quad (11)$$

Неравенство (10) приобретёт следующую форму:

$$\max_{t, \tau \in [0, T]} \left| (1-\delta) - \delta \cdot T \cdot \left(g_d[u_d(\tau)] + u_d(\tau) \cdot \frac{dg_d(\tau)}{du_d} \right) \cdot z_\Sigma(t-\tau) \right| < 1. \quad (12)$$

На практике неравенства (10), (12) мало пригодны для аналитической оценки максимальных напряжений в схеме, при которых обеспечена сходимость последовательных приближений. Это тем более справедливо для сложных схем, содержащих несколько нелинейных элементов. Более реально производить оценку сходимости путём вычислительного эксперимента. Для схемы рис. 1 были проведены расчёты по формуле (11) при различных значениях коэффициента δ и различных амплитудах гетеродинного напряжения $U_{m\Gamma}$ (амплитуда сигнала $U_{m\epsilon}$ полагалась пренебрежимо малой). Экспериментально определялась максимальная величина $U_{m\Gamma}$, при которой обеспечивается сходимость. Также проверялось выполнение неравенства (12). Результаты отображены на рис. 2. Кривая 1 соответствует максимальным величинам $U_{m\Gamma}$, при различных значениях δ , при которых обеспечивается сходимость вычислительного процесса. Кривая 2 показывает, соответственно, предельные амплитуды $U_{m\Gamma}$, при которых выполняется неравенство (12).

Рис. 2. Зависимость предельной амплитуды гетеродина от δ : 1 – реальный предел сходимости; 2 – по формуле (12)



Из полученных результатов могут быть сделаны следующие выводы:

- При $\delta=1$ итерационный процесс является сходящимся при максимальной амплитуде гетеродинного напряжения не более 0,55 В, что явно недостаточно для моделирования практически значимых режимов.
- При $\delta < 1$ сходимость обеспечивается при большей амплитуде, чем при $\delta=1$. Чем меньше δ , тем больше предельная амплитуда напряжения, при которой обеспечена сходимость. Абсолютного предела не обнаружено. Например, при $\delta=0,01$ процесс сходится при амплитуде более 5 В. Однако при уменьшении величины δ сходимость замедляется, что приводит к увеличению требуемого числа итерационных циклов.
- Из сравнения кривых 1 и 2 следует, что оценка сходимости по формуле (12) производится с запасом в сторону уменьшения допустимой амплитуды. При $\delta=1$ различие можно считать приемлемым, но при уменьшении δ расхождение становится слишком большим. Из этого следует, что использование формулы (12) для оценки сходимости теряет смысл. Это тем более справедливо при моделировании более сложных устройств, для которых соотношения вида (12) будут более громоздкими.
- Практическая рекомендация состоит в том, что для выбора коэффициента δ в реальных условиях работы цепи следует использовать метод пробных вычислений. Возможные варианты его реализации в данной работе не рассматриваются.

Описанные результаты исследования метода простой итерации могут быть распространены на случаи моделирования нелинейных устройств с более сложными эквивалентными схемами. Например, в [1] описано моделирование усилительного каскада на полевом транзисторе с барьером Шотки. Алгоритм строится на основе метода контурных токов, с применением теоремы компенсации. При вычислении очередного приближения решается система линейных уравнений, после чего определяются напряжения на нелинейных двухполюсниках, входящих в эквивалентную схему. На этом этапе используются выражения, по структуре подобные (11), с коэффициентом $\delta < 1$. При этом справедливы все выводы, полученные в настоящей статье.

Заключение. Рассмотрен метод простой итерации при моделировании нелинейных радиотехнических устройств. Теоретически и экспериментально исследован вопрос о размерах области сходимости метода, на примере исследования диодного преобразователя частоты. Показано, что для расширения области сходимости целесообразно выбирать параметры вычислительного процесса методом пробных вычислений. Чем больше амплитуды приложенных напряжений, тем ниже скорость сходимости, т.е. больше требуемое число итераций.

Литература

1. Ненашев А.В. Метод моделирования нелинейных радиотехнических устройств // Доклады Том. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники. – 2010. – № 1 (21), ч. 2. – С. 50–54.
2. Ненашев А.В. Метод параметрических характеристик для анализа и моделирования нелинейных устройств // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 2009. – Т. 52, № 11 – С. 30–40.
3. Березин И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. – Ч. 2. – 620 с.
4. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматгиз, 1976. – 543 с.
5. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1980. – 271 с.
6. Пупков К.А. Функциональные ряды в теории нелинейных систем / К.А. Пупков, В.И. Капалин, А.С. Ющенко. – М.: Наука, 1976. – 448 с.

Ненашев Александр Васильевич

Канд. техн. наук, доцент каф. радиоэлектроники
Сургутского государственного университета ХМАО–Югры
Тел.: 8-912-810-44-75
Эл. почта: navas1@mail.ru

Nenashev A.V.

Convergence of the consecutive approximation method in modeling nonlinear radio engineering devices. Part 1. The method of simple iteration

Problems of convergence of the consecutive approximation method are considered in modeling nonlinear radio engineering devices. The theoretical basics are investigated. With using the method of simple iteration, recommendations for the convergence area expansion are given.

Keywords: modeling, nonlinear devices, consecutive approximation, convergence.