УДК 519.872

В.В. Грачев, А.Н. Моисеев, А.А. Назаров, В.З. Ямпольский

Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных

Представлено описание технической системы распределенной обработки данных в виде математической модели многофазной системы массового обслуживания. Характерной особенностью рассматриваемой системы является высокая интенсивность запросов, поступающих на обработку. Показано, что для большинства видов теоретически изученных потоков однородных событий распределение вероятностей числа событий, наступивших за фиксированное время, в условии высокой интенсивности аппроксимируется нормальным распределением. Также рассматривается многофазная система массового обслуживания с неограниченным числом приборов на каждой фазе, произвольным обслуживанием и входящим высокоинтенсивным потоком общего вида. Показано, что многомерное распределение вероятностей числа приборов, занятых обслуживанием на фазах такой системы, аппроксимируется многомерным нормальным распределением. Получены характеристики этого распределения.

Ключевые слова: система распределенной обработки данных, многофазная система массового обслуживания, высокоинтенсивный поток событий.

Растущий спрос на информационно-вычислительные работы, а также развитие средств вычислительной техники и телекоммуникационных технологий привели к созданию систем, которые предназначены для обработки данных и распределены на большой территории. В узлах таких систем сосредоточены мощные вычислительные ресурсы, а сами узлы связаны между собой быстродействующими каналами.

Такого рода системы относятся к классу систем распределенной обработки данных (СРОД), анализ и оптимизация функционирования которых нуждаются в применении современных средств математического и компьютерного моделирования.

В настоящей работе для моделирования СРОД предложена математическая модель в виде многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным входящим потоком.

Высокоинтенсивные гауссовские потоки. Случайный поток однородных событий будем называть высокоинтенсивным, если его интенсивность имеет вид произведения λN, где $\lambda > 0$ – некоторая конечная величина, а N – значение большого параметра. В теоретических исследованиях предполагается, что $N \to \infty$, а в практических реализациях его значение достаточно велико (порядка 100 или больше). Высокоинтенсивный поток будем называть гауссовским (ВИГ-потоком), если распределение вероятностей числа его событий, наступивших за время t, можно аппроксимировать с достаточной точностью гауссовским распределением с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 вида

$$a = \lambda Nt, \qquad \sigma^2 = (\lambda + \kappa)Nt = \lambda Nt + \kappa Nt, \tag{1}$$

где κ – некоторый параметр (параметр дисперсии). Форма записи среднего и дисперсии в виде (1) удобна для последующего анализа. Показано [1, 2], что для широкого класса высокоинтенсивных потоков (пуассоновских, рекуррентных, MMPP, MAP и др.) такая аппроксимация допустима, а величины a и σ^2 могут быть представлены в форме (1).

Перечислим основные свойства ВИГ-потоков:

− сумма независимых ВИГ-потоков с заданными параметрами интенсивностей λ_k и параметрами дисперсий κ_k также является ВИГ-потоком, параметры λ и κ которого равны суммам соответствующих параметров складываемых потоков, т.е.

$$\lambda = \sum_k \lambda_k, \qquad \kappa = \sum_k \kappa_k; \tag{2}$$

− просеянный [3] с вероятностью r ВИГ-поток с параметрами λ и κ является также ВИГ-потоком с параметрами

$$r\lambda \text{ и } r^2\kappa. \tag{3}$$

Отметим важную особенность просеянного ВИГ-потока, заключающуюся в том, что дисперсия просеянного потока изменяется более значительно, чем его среднее значение. В частности, при $r = 0{,}1$ для просеянного потока среднее значение уменьшается в 10 раз за счет сомножителя r, а второе слагаемое $r^2\kappa$ дисперсии $\sigma^2 = r\lambda + r^2\kappa$ уменьшается в 100 раз. Такие изменения параметров ВИГ-потока при достаточно малых значениях r позволяют аппроксимировать просеянный ВИГ-поток высокоинтенсивным пуассоновским потоком.

Также отметим, что ВИГ-потоки при $\kappa = 0$ не являются пуассоновскими, но их основные свойства просеивания и полиномиального разделения совпадают со свойствами пуассоновских потоков [3, 4].

Разделенный по полиномиальной схеме с вероятностями $s_1, s_2, ..., s_K$ ВИГ-поток с параметрами λ и κ является K-мерным коррелированным ВИГ-потоком, многомерное распределение вероятностей которого является K-мерным гауссовским, определяемым многомерной характеристической функцией $h(\mathbf{u})$ векторного аргумента $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, ..., u_K\}$ вида

$$h(\mathbf{u}) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{K} ju_k s_k \lambda Nt + \sum_{k=1}^{K} \frac{(ju_k)^2}{2} s_k \lambda Nt + \sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K} ju_k ju_\nu s_k s_\nu \frac{\kappa}{2} Nt\right\}, \tag{4}$$

здесь $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Таким образом, каждая компонента разделенного потока является ВИГ-потоком с параметрами $s_k\lambda$ и $s_k^2\kappa$, но потоки стохастически зависимы. Элементы ковариационной матрицы для них имеют вид $s_k s_\nu \kappa Nt$ для k-го и ν-го из разделенных потоков.

Обозначая $\mathbf{E}$ – единичный вектор-столбец; $\mathbf{u}$ – вектор с элементами u_k и диагональную матрицу $\mathbf{A}$ с элементами s_k на главной диагонали, характеристическую функцию $h(\mathbf{u})$ из (4) перепишем в матричном виде

$$h(\mathbf{u}) = \exp\left\{j\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{E}\lambda Nt - \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\left(\lambda\mathbf{A} + \kappa\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)\mathbf{u}Nt\right\}.$$

Четырехфазная система массового обслуживания. На практике возникла необходимость анализа параметров функционирования технической системы распределенной обработки данных, которая была представлена в виде четырехфазной немарковской системы массового обслуживания. На вход этой системы поступает ВИГ-поток с параметром интенсивности λ и параметром дисперсии κ (рис. 1).

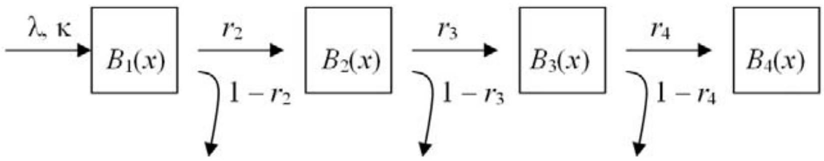

Рис. 1. Четырехфазная система массового обслуживания

Каждая фаза является системой массового обслуживания с неограниченным числом приборов и функцией распределения $B_f(x)$, $f = \overline{1,4}$ времени обслуживания заявки на f-й фазе.

Завершив обслуживание на $(f - 1)$-й фазе, заявка с вероятностью $1 - r_f$ отсеивается, а с вероятностью r_f передается для обслуживания на следующую фазу. Для определенности будем полагать $r_1 = 1$. Ставится задача исследования такой четырехфазной системы и определения ее четырехмерного распределения вероятностей числа приборов, занятых на ее четырех фазах.

Обозначим произведение вероятностей

$$g_f = \prod_{i=1}^{f} r_i \,. \tag{5}$$

Пусть b_f – среднее значение времени обслуживания на f-й фазе, а $B_f^*(x)$ – функция распределения суммарного времени обслуживания заявок на первых f фазах рассматриваемой четырехфазной системы. Очевидно, $B_f^*(x)$ является f-кратной сверткой распределений $B_1(x),\ldots, B_f(x)$, $f \le 4$. Здесь $B_1^*(x) = B_1(x)$, а $B_0^*(x)$ будем полагать равной 1. Также обозначим следующие функционалы:

$$B_{f_1 f_2} = \int_0^\infty \left(B^*_{f_1-1}(x) - B^*_{f_1}(x)\right)\left(B^*_{f_2-1}(x) - B^*_{f_2}(x)\right)dx\,,\ f_1, f_2 = \overline{1,4}\,. \quad (6)$$

Можно показать, что четырехмерный вектор $\mathbf{i} = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ числа i_f приборов, занятых на фазах $f,\ f = \overline{1,4}$ является коррелированным гауссовским (нормальным) с характеристической функцией $h(\mathbf{u})$ векторного аргумента $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ вида

$$h(\mathbf{u}) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{4} ju_k g_k b_k \lambda N + \sum_{k=1}^{4} \frac{(ju_k)^2}{2} g_k b_k \lambda N + \sum_{k,v=1}^{4} ju_k ju_v g_k g_v B_{kv} \frac{\kappa}{2} N\right\}. \quad (7)$$

То есть для каждой компоненты i_f, $f = \overline{1,4}$ среднее значение равно

$$a_f = \lambda N g_f b_f, \quad (8)$$

дисперсия –

$$\sigma_f^2 = \lambda N g_f b_f + \kappa N g_f^2 B_{ff}, \quad (9)$$

а элементы матрицы ковариаций имеют вид

$$\rho_{f_1 f_2} = \begin{cases} \lambda N g_f b_f + \kappa N g_f^2 B_{ff}, & \text{если } f_1 = f_2 = f, \\ \kappa N g_{f_1} g_{f_2} B_{f_1 f_2}, & \text{если } f_1 \ne f_2, \text{ при } f_1 \le 4, f_2 \le 4. \end{cases} \quad (10)$$

Обозначив через $\mathbf{b}$ диагональную матрицу с элементами b_f на главной диагонали, через $\mathbf{G}$ – диагональную матрицу с элементами g_f по главной диагонали и матрицу $\mathbf{B}$ с элементами B_{kv}, характеристическую функцию $h(u)$ из равенства (7) перепишем в матричном виде

$$h(\mathbf{u}) = \exp\left\{j\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{GbE}\lambda N - \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{Gbu}\lambda N - \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{GBGu}\kappa N\right\} = \exp\left\{j\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{GbE}\lambda N - \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Gb}\lambda N - \mathbf{GBG}\kappa N\right)\mathbf{u}\right\}.$$

Когда относительно времени обслуживания известно лишь его среднее значение и можно полагать, что это время детерминировано, то

$$B_{f_1 f_2} = \begin{cases} b_f, & \text{если } f_1 = f_2 = f, \\ 0, & \text{если } f_1 \ne f_2. \end{cases} \quad (11)$$

В этом случае компоненты четырехмерного гауссовского вектора стохастически независимы, а дисперсии его компонент i_f, в силу равенств (9), (11) имеют вид

$$\sigma_f^2 = \lambda N g_f b_f + \kappa N g_f^2 b_f. \quad (12)$$

Заключение. Итак, в работе представлена математическая модель технической системы распределенной обработки данных, которая сформулирована в виде многофазной системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов на каждой фазе, произвольным временем обслуживания и высокоинтенсивным входящим потоком. Рассмотрены основные свойства и характеристики высокоинтенсивных потоков однородных событий. Показано, что в таких потоках распределение вероятностей числа событий, наступивших за фиксированный интервал времени, аппроксимируется гауссовским (нормальным) распределением, в силу чего такие потоки могут быть названы высокоинтенсивными гауссовскими (ВИГ-потоками).

Для многофазной системы в частном случае рассматриваемой технической задачи (4 фазы обслуживания) получена гауссовская аппроксимация числа приборов, занятых обслуживанием на каждой фазе.

Литература

1. Moiseev A. Investigation of High Intensive General Flow / A. Moiseev, A. Nazarov // Proc. of the IV International Conference «Problems of Cybernetics and Informatics» (PCI'2012), September 12–14, 2012. Baku, Azerbaijan. – Baku: ANAS, 2012. – P. 161–163.

2. Моисеев А.Н. Исследование высокоинтенсивного MAP-потока / А.Н. Моисеев, А.А. Назаров // Изв. Том. политех. ун-та. – 2013. – № 2 (в печати).

3. Назаров А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, С.П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

4. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – 4-е изд. испр. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 400 с.

Грачев Владимир Викторович
Канд. техн. наук, вед. сотрудник ООО «Инком»
Тел.: +7-916-158-15-40
Эл. почта: incom@cc.tpu.edu.ru

Моисеев Александр Николаевич
Канд. техн. наук, доцент каф. программной инженерии Томского государственного университета (ТГУ)
Тел.: 8 (382-2) 52-94-96
Эл. почта: alexander-moiseev@mail.ru

Назаров Анатолий Андреевич
Д-р техн. наук, профессор, зав. каф. теории вероятностей и математической статистики ТГУ
Тел.: 8 (382-2) 52-95-99
Эл. почта: nazarov.tsu@gmail.com

Ямпольский Владимир Захарович
Д-р техн. наук, профессор-консультант Института кибернетики Томского политехнического университета
Тел.: 8 (382-2) 50-16-44
Эл. почта: yampolsky@incom.tomsk.ru

Grachev V.V., Moiseev A.N., Nazarov A.A., Yampolsky V.Z.
Multistage queueing model of the distributed data processing system

Mathematical model for the technical system of distributed data processing is considered in the paper. The model is presented in a form of the multistage queueing system. High intensity of incoming queries is a typical feature of the considering system. It was shown that probability distribution of event arrived during fixed time period can be approximated by normal probability distribution for the most of studied homogeneous event processes. Multistage queueing system with unlimited servers count in each stage, general time of serving and high intensive input flow is considered in the paper also. It was shown that multidimensional probability distribution of busy servers count at each stage of the system can be approximated by multidimensional normal probability distribution. Parameters of this distribution were obtained in the paper.
Keywords: distributed data processing system, multistage queueing system, high-intensive arrival process.