УДК 332.852.52:355.613:174.7:004.832.28:330.131.7

В.А. Ефремов, А.А. Мицель

Ценообразование опционных контрактов в задачах управления финансовым риском

Рассмотрены основные подходы к определению стоимости опционов в задачах управления риском. Предложена адаптивная модель описания динамики цен базовых активов. Проведен сравнительный анализ полученной модели с известными на эмпирических данных цен индекса РТС.

Ключевые слова: управление риском, деривативы, процессы Леви, модели ценообразования опционов.

Задача ценообразования опционных контрактов при управлении риском. Российский рынок производных финансовых инструментов (деривативов) в последние годы динамично растет, однако его объемы существенно ниже, чем в других развитых странах (США, Германия, Великобритания и др.). Наиболее распространенными видами деривативов на российском рынке являются фьючерсы и опционы. Опционы успешно и эффективно применяются в задачах управления рисками, которыми полон современный финансовый рынок любой страны. Любой опционный контракт (ванильный или экзотический) имеет свою стоимость (премию). В экономическом смысле премия опциона – это плата за риск неблагоприятного изменения цены базового актива, который берет на себя продавец. Определение такой «справедливой» стоимости премии является важнейшей задачей в управлении финансовым риском с использованием опционных контрактов.

Теория эффективного рынка (Efficient Market Hypothesis), предложенная Фамой еще в 60-х годах XX в., дала основу для ценообразования производных финансовых инструментов. Согласно этой теории рынок является эффективным, если полностью отображает всю доступную информацию. Теория также утверждает, что эффективный рынок является мартингалом, т.е. информация не может быть использована для выигрыша [1]. На данный момент нет ни одного эффективного рынка.

В условиях неэффективности рынка возникает понятие *справедливой* стоимости опционного контракта, что соответствует принципу отсутствия арбитража [2]. В свою же очередь модель рынка безарбитражна тогда и только тогда, когда существует мартингальная (*риск-нейтральная*) мера Q такая, что выполняется следующее условие [3]:

$$S_0 = \frac{1}{1+r} E^Q[S_t],$$

где S_0 – текущая цена базового актива; r – безрисковая процентная ставка; S_t – цена актива в момент времени; $E^Q[S_t]$ – среднее значение цены актива в момент времени t.

Поиск такой мартингальной меры Q, в которой вероятностное пространство, моделирующее изменение цен базовых активов, есть мартингал, является основной и наиболее сложной задачей при определении справедливой стоимости опциона. Такой подход к ценообразованию опционов называется *риск-нейтральным*. В риск-нейтральном вероятностном пространстве средние будущие значения цен активов не зависят от риска, а также совпадают с текущими значениями, т.е. цены активов в таком пространстве, дисконтированные по безрисковой процентной ставке, является мартингалами.

При известной мартингальной мере Q справедливая стоимость ванильного (европейского) опциона колл определяется следующим образом [4]:

$$C = E^Q[e^{-rT} \max(S_T - K, 0)],$$

где C – это цена европейского опциона колл; r – безрисковая процентная ставка; T – дата истечения срока опциона; S_T – цена базового актива в момент времени T; K – цена исполнения опционного контракта (страйк).

История ценообразования опционов начинается с модели Блэка-Шоулза в 1973 г., которая стала фактическим стандартом для оценки деривативов на финансовых ранках всего мира [5]. В основе данной модели лежит предположение о том, что изменение цены базового актива – это стохастический процесс с нормальным распределением.

За последние два десятилетия срочный рынок сильно изменился и стал более рискованным – появились скачки, которые не могут быть описаны нормальным законом распределения.

Информация имеет разную значимость для участников срочного рынка и влияет на динамику цен базовых активов абсолютно по-разному. Наряду с информацией, которая незначительно влияет на доходность активов, присутствует информация, существенным образом воздействующая как на отдельно взятый актив, так и на рынок в целом. К такой информации можно отнести экономический кризис, дефолт компании, землетрясение и т.д.

Процессы Леви позволяют моделировать динамику цен активов максимально гибко, так как содержат две составляющие: броуновское движение (диффузия процесса) и скачкообразный компонент. Процессы Леви можно разделить на [6]:

- чисто диффузионные, где цена актива подчиняется геометрическому броуновскому движению;
- скачкообразной диффузии, в которых цена актива подчиняется геометрическому броуновскому движению, но иногда испытывает скачки, описывающиеся составным процессом Пуассона (модель Мертона, модель Коу);
- чисто скачкообразные, где цена базового актива меняется скачкообразно с различной величиной скачка (нормальный обратный гауссовский, гиперболический процессы и др.).

Моделирование динамики цен базового актива на основе процессов Леви. Пусть $\{X_t | \geq 0\}$ – стохастический процесс, определенный на пространстве (Ω, f, P) с фильтрацией $F = \{f_t \,|\, t \geq 0\}$. Предполагается, что X_t – это процесс Леви относительно фильтрации F, который является неограниченным слева, где $X_u - X_t$ не зависит от f_t и имеет следующую характеристическую функцию (теорема Леви–Хинчина) [7]:

$$\phi_{(X_t)}(u) = E^P[e^{iuX_t}] = e^{-t\psi_x(u)}, \quad t \geq 0,$$

где характеристическая экспонента $\psi_x(u)$ выражается следующим образом:

$$\psi_x(u) = -iu\mu + \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + \int_R (1 - e^{iux} + iuxI_{|x|\leq 1})\upsilon(x)dx,$$

$$I_{|x|\leq 1} = \begin{cases} 1, \text{ если } |x| \leq 1, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases},$$

Здесь μ описывает постоянный дрейф, σ^2 определяет постоянную дисперсию непрерывной компоненты процесса Леви и $\upsilon(x)$ – мера Леви, которая описывает плотность распределения скачков. Тройка $(\mu, \sigma^2, \upsilon(x))$ полностью определяет такой процесс и называется *триплетом Леви* [7]. Как правило, ценообразование опционов и вероятностная оценка процессов Леви основываются на подборке такого триплета, который наилучшим образом описывает эмпирическую динамику цен базового актива.

Процессы Леви являются основой для разработки новых моделей. Частными примерами процессов Леви являются практически все известные стохастические модели (CGMY, NIG, GH, VG, Meixner и др.) [8], которые применяются для определения справедливой цены опциона. Например, если триплет Леви имеет форму $(\mu, \sigma^2, 0)$, то мы получаем известную модель Блэка-Шоулза.

Декомпозиция Леви–Ито (1) разбивает процессы Леви на простые составляющие и помогает понять их природу:

$$X_t = \mu t + \sigma B_t + C_t + M_t, \tag{1}$$

$$C_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s I_{|\Delta X_s| > 1},$$

$$M_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\sum_{s \leq t} \Delta X_s I_{\varepsilon \leq \Delta X_s \leq 1} - t\int_{\varepsilon < |x| \leq 1} x\upsilon(x)dx \right),$$

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1},$$

где B_t – броуновская компонента; C_t – составной процесс Пуассона с интенсивностью скачков λ и плотностью распределения размера скачков $\upsilon(x)$; M_t – мартингал с очень маленькими скачками (компенсационный тренд).

Такая декомпозиция (1) является основой для моделирования процессов Леви при помощи суммы двух составляющих: Броуновского движения и составного процесса Пуассона. Данная структура стохастического процесса называется скачкообразной диффузией и имеет вид [8]

$$X_t = \mu t + \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N_t} J_k \, , \tag{2}$$

где N_t – процесс Пуассона с интенсивностью λ; J_k – случайный скачок с размером, имеющий плотность распределения $\frac{\upsilon(x)}{\lambda}$; $\sum_{k=1}^{N_t} J_k$ – составной процесс Пуассона.

Модель скачкообразной диффузии (2) может описать практически любой стохастический процесс, включая динамику цен базового актива. Более того, процессы Леви относятся к классу безгранично делимых распределений, что позволяет учитывать абсолютно любые экономические факторы. Так, например, часто появляющаяся незначительная информация оказывает незначительное воздействие на рынок, что хорошо описывается нормальным распределением, а редкая, но значимая информация (дефолт компании), хорошо описывается скачкообразной составляющей. Таким образом, доходность любого базового актива можно рассматривать как сумму процессов Леви, каждый из которых описывает обособленный экономический фактор.

Анализ российского фондового рынка показал, что логарифмическая доходность большинства активов не подчиняется закону нормального распределения. Так, например, логарифм доходностей фьючерса на индекс РТС с 03.08.2005 по 05.06.2006 имеет распределение, отличное от нормального. Оценка такой выборки критерием согласия Пирсона ($\chi^2 = 63{,}78$) показывает, что эмпирические данные не имеют нормальный закон распределения, которое используется в настоящее время для оценки справедливой стоимости опционов.

В современной науке существует эффективный подход, позволяющий инженеру по виду гистограммы (или ее ядерной оценки) выбрать модель, которая может аппроксимировать практически любое эмпирическое распределение и эффективно подобрать ее параметры. Подбор параметров является одним из наиболее трудоемких процессов.

В диссертации «Моделирование и анализ эффективности ценообразования опционов на российском срочном рынке» М.М. Морозова предложила методику калибровки известных моделей к эмпирическим данным и показала эффективность применения такой методики к российскому фондовому рынку [9]. Такой процесс является трудоемким, требует участия опытного финансового инженера и сводится к подбору триплета Леви и его параметров. В нашей статье предлагается обратный подход, основанный на использовании гистограммы, построенной на ретроспективных данных базового актива, для определения триплета Леви напрямую, без привязки к известным моделям.

Алгоритм построения модели динамики цен базового актива. Авторами статьи предложен автоматизированный подход к определению триплета Леви на основе ретроспективных данных по доходности моделируемого базового актива. В основе такого подхода лежит предположение о том, что цена актива меняется диффузно со скачками, возникающими в связи с появлением важной информации, которая поступает случайно. Поток такого рода информации является составным процессом Пуассона с плотностью распределения размера скачков $\frac{\upsilon(x)}{\lambda}$. Для определения $\upsilon(x)$ и других характеристик процесса Леви использовался следующий алгоритм:

1. С помощью критерия согласия Пирсона проверяется гипотеза о том, что эмпирические данные имеют логарифмически нормальный закон распределения.

2. Определение эмпирической волатильности σ_e и тренда μ_e для подбора параметров нормального распределения, которое будет описывать броуновскую составляющую процесса Леви (2). Если эмпирическая логарифмическая доходность имеет нормальный закон распределения, то получаем диффузную модель с параметрами $(\mu_e, \sigma^2{}_e, 0)$, иначе переходим к шагу 3.

3. Определение скачков. На данном этапе отбрасывается диффузионная составляющая ретроспективной логарифмической доходности и определяется последовательность скачков.

4. На заключительном этапе строится непараметрическая оценка Розенблатта–Парзена плотности вероятности полученных скачков вида

$$\overline{p}(x) = \frac{1}{nc}\sum_{i=1}^{n}\Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right),$$

где $\Phi(u)$ – ядерная функция, n – количество измерений, c – ширина интервала построенной гистограммы и x^i – результат i-го измерения. В данном алгоритме используется ядерная функция Епанечникова вида

$$\Phi(u) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}} - \frac{3u^2}{20\sqrt{5}}, & \text{если } |u| < \sqrt{5}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Результатом работы данного алгоритма является аппроксимированный триплет Леви $(\mu_e, \sigma_e^2, \lambda \cdot \overline{p}(x))$. Таким образом, полученная стохастическая модель логарифмической доходности базового актива имеет следующий вид (3):

$$X_t(\mu,\sigma,\lambda) = \mu t + \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N_t} J_k\ , \tag{3}$$

$$\upsilon(x) = \frac{1}{nc}\sum_{i=1}^{n}\Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right),$$

$$\Phi(u) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}} - \frac{3u^2}{20\sqrt{5}}, \text{если } |u| < \sqrt{5} \\ 0, \quad \text{иначе} \end{cases},$$

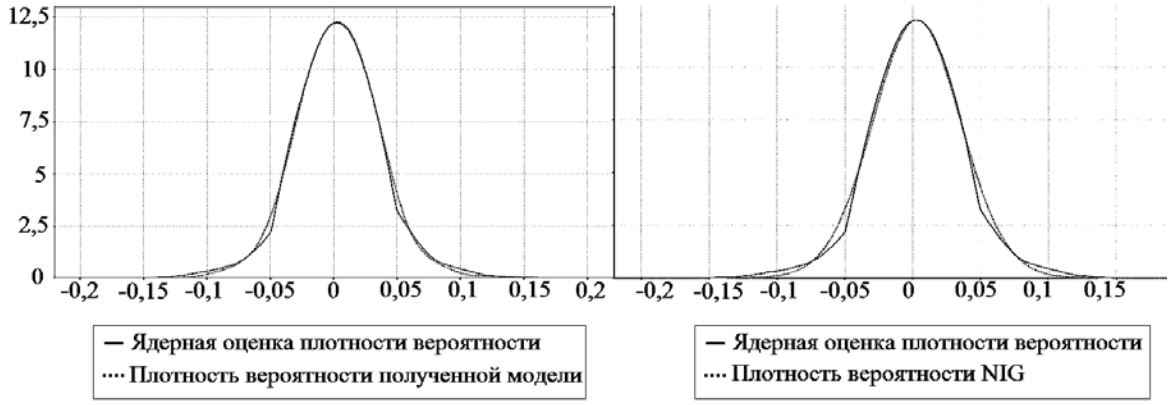
где N_t – процесс Пуассона с интенсивностью λ (интенсивность появления скачков); J_k – случайный скачок, имеющий плотность распределения $\frac{\upsilon(x)}{\lambda}$; n – количество измерений; x^i – результат i-го измерения; c – ширина интервала построенной гистограммы.

Цена базового актива определяется как геометрическая модель Леви: $S_t = S_0 e^{X_t(\mu,\sigma,\lambda)}$.

Апробация результатов программного комплекса, который реализует данную модель (3), проводилась на основе исторических данных индекса РТС и фьючерса на индекс РТС. Оценка результатов моделирования логарифмической доходности фьючерсного контракта на индекс РТС в период с 03.08.2005 по 05.06.2006 представлена на рис. 1, *а*. Для данной эмпирической выборки $\chi^2 = 1{,}903$, что говорит о том, что эмпирические данные не противоречат полученному закону распределения с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ для 7 степеней свободы. Параметры модели: $\mu = 0{,}03$; $\sigma^2 = 0{,}1129$ и $\lambda = 0{,}9$.

Анализ данной выборки [9], проведенный М.М. Морозовой в своем диссертационном исследовании, обосновал применение обратного гауссовского процесса (NIG) с параметрами: $\mu = -0{,}0005$; $\sigma^2 = 0{,}0017$ и $k = 6{,}6777$, что подтверждается экспериментами и значением $\chi^2 = 4{,}67$ (рис. 1, *б*). Квантили распределения хи-квадрат позволили определить уровень значимости $\alpha = 0{,}3$ для 7 степеней свободы.

Оценка полученных результатов (см. рис. 1) показала, что эмпирические данные логарифмической доходности фьючерсного контракта на индекс РТС в период с 03.08.2005 по 05.06.2006 имеют закон распределения стохастического процесса (3) с вероятностью 95%. В свою очередь можно утверждать, что эти же данные имеют закон распределения нормального обратного гауссовского процесса с доверительной вероятностью 70%. Таким образом, стохастическая модель (3) точнее описывает логарифмическую доходность фьючерсного контракта на индекс РТС в период с 03.08.2005 по 05.06.2006, чем нормальный обратный Гауссовский процесс.



а *б*

Рис. 1. Оценка результатов моделирования логарифмической доходности фьючерсного контракта на индекс РТС

Заключение. Переходный характер российской экономики, ее высокие риски при дефиците инвестиций и проблемном финансовом секторе обосновывают необходимость в создании новых моделей ценообразования опционных контрактов, где важнейшей задачей является моделирование динамики цен на фондовом рынке. Такие модели должны быстро реагировать на рыночные изменения и тем самым эффективно применяться в задачах управления риском. Именно поэтому большинство современных моделей имеют большое количество параметров, что усложняет их практическое применение. Каждая известная модель имеет свои ограничения и не может быть применена для описания всех без исключения активов.

Предложенная и реализованная авторами модель (3) позволяет успешно моделировать динамику цен на индекс РТС, используя процессы Леви эффективнее, чем известные модели.

Достоинствами этой модели являются:

• высокая точность прогноза логарифмической доходности цен на фондовом рынке;
• адаптивность модели к различным ситуациям на фондовом рынке;
• возможность использования модели для определения справедливой цены опционов.

К недостаткам модели можно отнести:

• необходимость иметь ретроспективные данные моделируемого базового актива;
• отсутствие аналитического вида характеристической функции;
• модель может описывать только стохастические процессы со скачкообразной диффузией.

Литература

1. Fama E.F. The behavior of stock market prices // Journal of Business. – 1965. – Vol. 38, № 1(Jan). – P. 34–105.
2. Bingham N.H. Risk-Neutral Valuation. Pricing and Hedging Of Financial Derivatives / N.H. Bingham, R. Kiesel. – London: Springer, 2004. – P. 105–142.
3. Бьорк Т. Теория арбитража в непрерывном времени / пер. с англ. Я.И. Белопольский. – М.: МЦНМО, 2010. – 560 с.
4. Schoutens W. Exotic Options under Levy Models: An Overview. – Belgium, 2004. – P. 4–6.
5. Black F. The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes // The Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81, № 3 (May). – P. 637–654.
6. Халл Д.К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. – М.: Вильямс, 2007. – 1056 с.
7. Wu L. Modeling Financial Security Returns Using Levy Processes // Zicklin School of Business. – 2008. – Vol. 15. − P. 1−56.
8. Winkel M. Levy Processes and Finance. – Oxford, 2010. – P. 2–74.
9. Морозова М.М. Моделирование и анализ эффективности ценообразования опционов на российском рынке: дис. ... канд. экон. наук / Институт экономики и организации промышленного производства Сибирского отделения Российской академии наук. – Новосибирск, 2010.

Ефремов Виталий Александрович
Ассистент каф. автоматизированных систем управления (АСУ) ТУСУРа
Тел.: 8 (382-2) 70-15-36
Эл. почта: efremov@ms.tusur.ru

Мицель Артур Александрович
Д-р техн. наук, профессор каф. АСУ ТУСУРа,
профессор каф. высшей математики и математической физики НИ ТПУ
Тел.: 8 (382-2) 70-15-36
Эл. почта: maa@asu.tusur.ru

Efremov V.A., Mitsel A.A.
The option valuation under Levy processes

The basic option valuation ways in the tasks of risk management were reviewed. A new adaptive model of financial security returns was presented. A comparative analysis of the new model and existing models was provided.
Keywords: risk control, derivatives, Levy processes, option valuation.
