УДК 519.87

В.А. Соловьев, Р.Т. Файзуллин

Математическое моделирование и управление транспортными потоками на основе схемы с двумя масштабами времени

Представлена микроскопическая математическая модель транспортного потока, движение транспортных средств в которой определяется лидером потока. В модели описано однополосное движение, которое учитывает сужения дороги и светофоры. Описаны уравнения модели и поставлен ряд оптимизационных задач, которые предполагается решить, используя предложенную модель. Приведены результаты вычислительного эксперимента. Показывается аналогия между оптимизационной задачей и задачей многопроцессорного расписания.

Ключевые слова: математическое моделирование, транспортный поток, оптимизационная задача.

Математическое моделирование транспортных потоков возникало в 50-е годы XX в. как приложение для столь популярных и усиленно изучаемых в то время начально-краевых задач для уравнений типа закона сохранения. Так, в 1955 г. независимо в работах Лайтхилла, Уизема [1], Ричардса [2] была предложена, по-видимому, первая макроскопическая модель однополосного транспортного потока, названная впоследствии моделью Лайтхилла–Уизема–Ричардса, в которой поток транспортных средств рассматривается как поток одномерной сжимаемой жидкости. После был предложен ряд модификаций данной модели (модель Танака, модель Уизема, модель Пэйна и др.).

Микроскопические модели транспортного потока появились несколько позднее. В основе подходов лежит концепция «о желании придерживаться при движении безопасной дистанции до лидера». Так, в 1961 г. Ньюэллом была предложена модель [3], которую можно считать первой микроскопической моделью. В ней постулируется, что для каждого водителя существует «безопасная» скорость движения, зависящая от дистанции до лидера. Другим важным классом микроскопических моделей, наряду с моделями оптимальной скорости, являются модели следования за лидером. В 1959 г. сотрудники концерна «Дженерал Моторс» Д. Газис, Р. Херман, Р. Потс предложили одну из первых [4] (хотя ранее похожие результаты были в моделях А. Рашеля (1950) и Л. Пайпса (1953)) нетривиальных микроскопических моделей однополосного транспортного потока, с помощью которой можно получить фундаментальную диаграмму – зависимость между интенсивностью потока транспортных средств и плотностью. Ф. Хейт был первым, кто выделил исследование транспортных потоков в отдельный самостоятельный раздел математики.

Современные разработки в области математического моделирования транспортных потоков представлены модификациями [5] автоматных моделей К. Даганзо, моделями, основанными на теории трех фаз Кернера [6], и др. Стоит отметить, что имеются также модели, промежуточные между кинетическими и гидродинамическими моделями. Примером такой модели является модель двухполосного движения, разработнная в Инсититуте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН коллективом, возглавляемым Б.Н. Четверушкиным [7].

Описание модели. В работе предлагается математическая модель транспортных потоков на основе схемы с двумя масштабами времени. В качестве топографической основы используется неориентированный граф $G=(V,E)$ в котором V – множество вершин v_i (пересечения дорог), E – множество ребер e_j (дороги). Транспортное средство $X_{j,k}$ представляет собой точку на ребре e_j графа (рис. 1), которая имеет два параметра: x_k – положение на ребре графа и v_k – скорость.

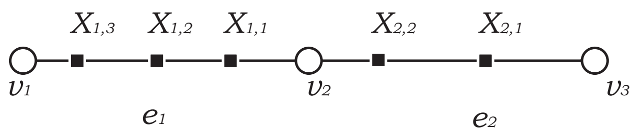

Рис. 1. Сегмент графа модели

Временным интервалом, соответствующим шагу (такту) модели, будем считать время Δt, сравнимое с минимальным временем реакции водителя, т.е. несколько секунд. Примем, что движение транспортных средств на участке сети (дороге) определяется транспортным средством, едущим первым, т.е. лидером. В этом случае предсказание скорости и позиции лидера через время Δt не составляет труда. Зная скорость и позицию лидера, можно вычислить скорости и позиции остальных транспортных средств. Уравнение движения, используемое в базовой модели, выглядит следующим образом:

$$x_i(t)+v_i(t+\Delta t)\Delta t-x_{i+1}(t)-v_{i+1}(t+\Delta t)\Delta t=Su\,. \tag{1}$$

Здесь $x_i(t)$ и $v_i(t)$ – это положение и скорость транспортного средства в момент времени t; u – минимально допустимое расстояние между машинами, S – параметр, накладывающий ограничение на максимальную скорость; M – количество транспортных средств на дороге (ребре), $i=1,\ldots,M$.

Следует учитывать, что транспортное средство, начинающее движение в момент времени t, вклинивается в поток машин не мгновенно. Также, транспортное средство, заканчивающее движение на магистрали, т.е. имеющее конечный пункт назначения на ребре графа, влияет на движение остальных транспортных средств, участвующих в движении. Поэтому желательно рассматривать более малые интервалы $\Delta\tau$, считая решение (1) «предиктором» к решению, к которому в момент времени t стремятся транспортные средства. В этом случае временем, соответствующим одному шагу системы, будет $\Delta\tau$, значение которого выбирается, например, на порядок меньше, чем Δt. Таким образом, предлагается, основываясь на прогнозируемых значениях, полученных в (1), вычислять уточненные значения по следующим формулам:

$$x_i(t+\Delta\tau)=x_i(t)+v_i(t)+\alpha(x_i)\frac{v_i(t+\Delta t)-v_i(t)}{\Delta t}\Delta\tau^2\,, \tag{2}$$

$$v_i(t+\Delta\tau)=v_i(t)+\alpha(x_i)\frac{v_i(t+\Delta t)-v_i(t)}{\Delta t}\Delta\tau\,, \tag{3}$$

где $v_i(t+\Delta\tau)$ найдено из (1), а $\alpha(x_i)$ – это коэффициент, имитирующий сужение дороги или ограничение ускорения на повороте. Далее, принимая за t уже момент $t+\Delta\tau$, продолжим расчет на следующем шаге.

Отметим, что формула (1) описывает только одну из возможных стратегий, при которой транспортное средство ориентировано только на лидера, впереди идущее транспортное средство или светофор. Назовем эту стратегию «эгоистичной». Можно предложить и другие стратегии, когда транспортное средство ориентируется не только на лидера, например когда «предиктор» работает согласно выражению:

$$-x_{i-1}+v_{i-1}\Delta t+2(x_i+v_i\Delta t)-x_{i+1}-v_{i+1}\Delta t=0\,, \tag{4}$$

где $i=1,\ldots,M$.

С помощью (4) можно моделировать так называемый осмотрительный стиль вождения, при котором ускорения при наборе скорости и торможении минимальны, что способствует сохранению безопасной ситуации на дороге и большей экономии топлива. Зная скорость лидера, мы можем рассматривать (4) как трехдиагональную систему уравнений. Такая стратегия, получившая название «дружественная», позволяет передавать информацию о пробке вверх по потоку. Отметим, что, считая правую часть (4) за отрицательное число, например кратное u, мы получаем целый спектр задач, лежащих между «эгоистичной» и «дружественной» моделями. Очевидно, что результатами расчетов будут являться скорости и положения всех транспортных средств.

Возникает естественное желание сравнить предложенные модели поведения. Для проведения численного эксперимента был построен граф (рис. 2), состоящий из четырех вершин $(v_1,\ldots,v_4)$, соединенных тремя ребрами: $e_1=(v_1,v_3)$, $e_2=(v_2,v_3)$, $e_3=(v_3,v_4)$. В вершинах v_1 и v_2 на каждом шаге модели с заданной вероятностью генерируются транспортные средства, пункт назначения которых находится в вершине v_4. В вершине v_3 находится светофор, который перекрывает по очереди движение то с ребра e_1, то с ребра e_2.

Данный подход позволяет моделировать образование пробок и вычислять критическую плотность транспортных средств, при которых возникают пробки. Отметим, что в этой ситуации статистически показано преимущество «дружественной» модели перед «эгоистичной».

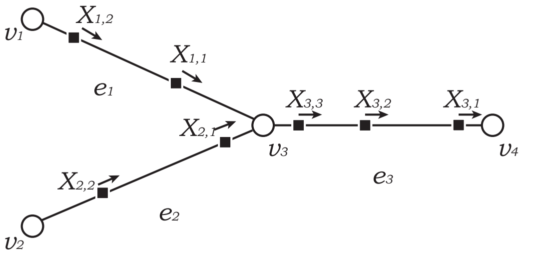

Рис. 2. Сравнение стратегий поведения водителей

Для получения сравнительных результатов было использовано 10000 тестов на каждую из обеих стратегий. При этом загруженность дороги, т.е. количество генерируемых транспортных средств M от 10 до 60 на ребро. Таким образом, были получены сравнительные относительные результаты $T1_{avg}/T2_{avg}$, где $T1_{avg}$ – среднее время прохождения теста с использованием 1-й стратегии, а $T2_{avg}$ – соответственно 2-й. По результатам тестов $T1_{avg}/T2_{avg}$ находилось в диапазоне от 1 до 1,4 при различных входных данных.

Оптимизационная задача. Предлагается называть «регионом» структуры (рис. 3), обладающие рядом следующих свойств: 1) топографическая основа – связанный граф; 2) транспортные средства генерируются на случайных ребрах (дорогах); 3) каждому транспортному средству задается случайный пункт назначения и просчитывается оптимальный маршрут для его достижения; 4) затем транспортное средство включается в движение, т.е. становится участником движения, пока не достигнет пункта назначения. Варьируя количество транспортных средств, генерируемых на каждом такте системы, можно загружать регион различным количеством транспортных средств, выявляя места, в первую очередь подверженные образованию пробок. Опыты, проводившиеся с использованием карт таких городов, как Омск, Новосибирск, Томск, Москва, показали, что пробки, образующиеся в модели, зачастую соответствуют пробкам, существующим в реальности.

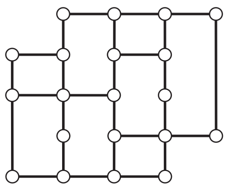

Рис. 3. Пример региона

Данная модель позволяет поставить задачу нахождения оптимальной работы светофоров для максимальной «прокачки» транспортных средств через регион. Без потери общности зададим время работы светофоров функцией $f(\beta_1,...,\beta_P)$ сдвига фаз относительно основного периода T, где P – это число светофоров в регионе. По определенным путям или направлениям через регион следует транзитный транспорт (рис. 4), средняя скорость которого при пересечении региона является целевой функцией, которую нам необходимо максимизировать с помощью выбора значений фаз.

Результаты применения случайного поиска

M	$t_{v\min}$, с	$t_{v\max}$, с	$v0_{avg}$	$v1_{avg}$
1	24,5	81,37	10,7	12,3
2	34,8	69,4	9,5	10,7
3	48,56	43,74	8,43	9,52
4	67,13	25,1	7,16	8,04
5	85,79	10,88	6,24	6,89
6	111,2	1,4	5,1	5,57
7	146,4	0	4,78	5,26

В результате численных экспериментов с применением случайного поиска для нахождения такого набора $\beta_1,...,\beta_P$, что средняя скорость прохождения через регион $v1_{avg}$ после поиска оптимального набора $\beta_1,...,\beta_P$ была бы больше средней скорости прохождения через регион $v0_{avg}$ до поиска, была показана возможность заметно улучшить среднюю скорость прохождения при небольшой загруженности дорог (таблица), например при количестве транспортных средств от 1 до 4 на 100 м. Так же получены результаты поиска зависимости времени нахождения в стоящем положении $t_{v\min}$ и при максимальной скорости $t_{v\max}$ от загруженности дороги. Тестирование проводилось следующим образом: каждая стадия длится 1–5 мин (в зависимости от плотности движения), в конце стадии меняется набор $\beta_1,...,\beta_P$, затем сравнивается средняя скорость за предыдущие стадии и лучший результат сохраняется. Для каждого из исследуемых начальных условий (разная загруженность, различная максимальная скорость, различная максимальная длина дорог) каждый тест состоял из 100–150 стадий (смен наборов).

Данная задача является в некотором смысле развитием задачи поиска так называемой «зеленой волны».

Если наложить некоторые ограничения на условия показанной выше оптимизационной задачи, то видится возможным провести аналогию с задачей многопроцессорного расписания [8]. Проведем аналогию между предложенной задачей о «прокачке» (A) и задачей многопроцессорного расписания (B):

– машины в (B) – это ребра в (A);

– задания в (B) – транспортные средства в (A);

– порядок предшествования в (B) определяет какое транспортное средство в (A) будет двигаться по ребру.

Стоит отметить, что под «машиной» в задаче (B) понимается средство, обрабатывающее задание. Остается функция расписания в (B). Ее роль в (A) выполняет функция $f(\beta_1,...,\beta_P)$, отвечающая за переключения сигналов светофора. Стоит немного сказать об ограничениях, упомянутых выше. В первую очередь, это длина ребра, которая должна быть такой, чтобы транспортное средство могло проехать по нему за один такт. Если же транспортное средство будет находится на ребре дольше, то это эквивалентно ситуации, когда машина обрабатывает задание дольше, чем один такт. «Порядок предшествования» транспортного средства при прохождении через перекресток меняется (обнуляется), что так же приводит к некоторым упрощениям.

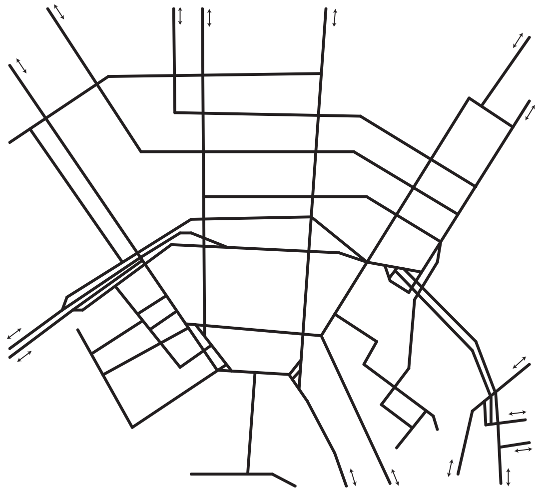

Рис. 4. Прокачка через регион

Очевидно, что проведение более точной аналогии между нашей задачей и задачей многопроцессорного расписания (NP-полная) требует существенного математического доказательства, но даже грубое сведение указывает на возможность принадлежности предложенной задачи о «прокачке» к классу NP-полных.

Литература

1. Lighthill M.J. On kinematic waves. – II. Theory of traffic flow on long crowded roads / M.J. Lighthill, G.B. Whitham // Proceeding of the royal society. – 1955. – Vol. 229, № 1178. – P. 281–345.

2. Richards P.I. Shock Waves on the Highway // Operations Research. – 1956. – Vol. 4, № 1. – P. 42–51.

3. Newell G.F. Nonlinear effects in the dynamics of car following // Operations Research. – 1961. – Vol. 9, № 2. – P. 209–229.

4. Helbing D. Traffic and related self-driven many particle systems // Reviews of modern physics. – 2001. – Vol. 73, № 4. – P. 1067–1141.

5. Gottlich S. Model hierarchies and optimization for dynamic flows on networks. Modeling and optimization of flows on networks. / S. Gottlich, A. Klar [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://php.math.unifi.it/users/cimeCourses/2009/01/200914-Notes.pdf, свободный (дата обращения: 09.11.2012).

6. Kerner B.S. Introduction to modern traffic flow theory and control. The long road to three–phase traffic theory [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.springer.com/engineering/mechanical+engineering/book/978-3-642-02604-1f, свободный (дата обращения: 09.11.2012).

7. Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков / А.Б. Сухинова, М.А. Трапезникова, Б.Н. Четверушкин, Н.Г. Чубарова // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21, № 2. – С. 118–126.

8. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1984. – 512 с.

Соловьев Вадим Анатольевич
Аспирант каф. комплексной защиты информации
Омского государственного технического университета (ОмГТУ)
Тел.: 8-905-940-44-98
Эл. почта: v.a.solovev@gmail.com

Файзуллин Рашит Тагирович
Д-р техн. наук, профессор, проректор по информатизации ОмГТУ
Тел.: 8-905-940-44-98
Эл. почта: frt@omgtu.ru

Solovev V.A., Faizullin R.T.
Mathematical modeling and managing of traffic flow with two time scales

Microscopic mathematical model of traffic flow, in which moving of vehicles is determined by the leader of the flow, is proposed. The model describes single-lane traffic which takes into account the narrowing of roads and traffic lights. Model equations and series of optimization problems, which are supposed to be solved by using the proposed model, are described. Analogy between the optimization problem and the problem of «Multiprocessor scheduling» is shown.
Keywords: mathematical modeling, traffic flow, optimization problem.