УДК 537.876.22

В.В. Фисанов

Проявления невзаимности в биизотропной среде Теллегена

Рассматриваются собственные поля и плоские волны круговой поляризации в биизотропной среде Теллегена. Невзаимность такой однородной и безграничной среды обнаруживается в результате сопоставления свободно распространяющихся электромагнитных полей Бельтрами в исходной и сопряжённой средах Теллегена. Она также проявляется как мера неортогональности электрического и магнитного полей плоской волны в такой среде.
Ключевые слова: биизотропная среда Теллегена, диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, параметр невзаимности, электромагнитные поля Бельтрами, волновые импедансы, волновое число, однородные плоские волны, вектор Пойнтинга.

Начиная с середины 80-х годов прошлого века резко повысился интерес к исследованию сложных электромагнитных сред и метаматериалов. К ним обычно относят искусственные композитные материалы с малыми включениями различного вида применительно к микроволнам и нанотехнологиям. На макроскопическом уровне описания они характеризуются как биизотропные или даже как бианизотропные среды. Киральная среда является наиболее известным представителем таких сред. Менее известна и изучена биизотропная среда Теллегена, которая первоначально была предложена для реализации гиратора – пятого элемента электрических цепей [1]. Возможность создания среды Теллегена была недавно подтверждена экспериментально с использованием наноразмерных Янус-частиц, которые являются носителями тесно связанных между собой диполей постоянных электрических и магнитных зарядов [2, 3]. Такие материалы представляют интерес в качестве элементов волноводных трактов и других устройств на микроволнах [4]. Среда Теллегена, будучи биизотропной, является, однако, невзаимной. Считается, что свойство невзаимности неочевидно в безграничной среде [5], но вполне проявляется при наличии отражающего препятствия [6]. В данной работе показывается, что невзаимность обнаруживается также и через посредство свободно распространяющихся через однородную среду Теллегена полей, в том числе плоских волн.

Материальные уравнения, параметры и собственные волны среды Теллегена. При описании электромагнитных волновых полей в материальных средах к уравнениям Максвелла добавляют материальные уравнения – соотношения, которые определяют взаимосвязи между индукциями $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и напряженностями $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ электрического и магнитного полей. Общая биизотропная среда характеризуется помимо диэлектрической и магнитной проницаемостей двумя дополнительными параметрами, которые обеспечивают перекрёстную (магнитоэлектрическую) связь векторов поля и являются ответственными за свойства киральности и невзаимности среды. В макроскопической электродинамике сред со слабой пространственной дисперсией традиционно применяют несколько систем симметричных материальных уравнений [7]. Уравнения Друде–Борна–Фёдорова для биизотропной среды

$$\mathbf{D}=\varepsilon\left(\mathbf{E}+\alpha\nabla\times\mathbf{E}\right),\quad \mathbf{B}=\mu\left(\mathbf{H}+\beta\nabla\times\mathbf{H}\right) \tag{1}$$

непосредственно указывают на пространственную дисперсию среды. Они применяются совместно с однородными уравнениями Максвелла, а при наличии сторонних источников должны быть модифицированы [8]. Эти уравнения справедливы при произвольной зависимости от времени t, далее рассматриваются синусоидально изменяющиеся монохроматические поля с фактором $\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота. В формулах (1) символами ε и μ обозначены соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости, а символы α и β обозначают параметры магнитоэлектрической связи. Киральной среде соответствует равенство параметров связи ($\alpha=\beta$), тогда как при значении $\beta=-\alpha$ получается среда Теллегена.

Как и в общей биизотропной среде, здесь справедлива декомпозиция электромагнитного поля на два поля круговой поляризации, называемых также «полями Бельтрами» $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$. Уравнения Максвелла вместе с уравнениями связи (1) приводятся к виду

$$\nabla\times\mathbf{Q}_1=\gamma\mathbf{Q}_1,\ \nabla\cdot\mathbf{Q}_1=0; \tag{2}$$

$$\nabla\times\mathbf{Q}_2=-\gamma\mathbf{Q}_2,\ \nabla\cdot\mathbf{Q}_2=0 \tag{3}$$

и удовлетворяют уравнению Гельмгольца $\nabla^2\mathbf{Q}_{1,2}+\gamma^2\mathbf{Q}_{1,2}=0$. Оба поля распространяются с единым волновым числом

$$\gamma=k\left[1+(k\alpha)^2\right]^{-1/2},\ k=\omega(\varepsilon\mu)^{1/2}, \tag{4}$$

но имеют разные волновые импедансы

$$\eta_{1,2}=\eta\left\{\left[1+(k\alpha)^2\right]^{1/2}\pm k\alpha\right\}^{-1},\ \eta=(\mu/\varepsilon)^{1/2}. \tag{5}$$

Связь между волновым числом и волновыми импедансами определяется формулами

$$\gamma=k\left(\eta_{1,2}/\eta\pm k\alpha\right)^{-1}. \tag{6}$$

Вводя вспомогательный безразмерный параметр невзаимности по формуле $\theta=\operatorname{arsh}(k\alpha)$, получим

$$\gamma=k\operatorname{sech}\theta,\ \eta_{1,2}=\eta\exp(\mp\theta).$$

В отсутствие потерь в среде Теллегена все материальные параметры являются вещественными величинами. Параметр невзаимности α принимается положительным, если моменты постоянных диполей в частице Теллегена параллельны и одинаково направлены, и отрицательным, если они противоположно направлены. Две среды, различающиеся только знаком параметра невзаимности, называются сопряжёнными. Как следует из (5), $\eta_{1,2}(-\alpha)=\eta_{2,1}(+\alpha)$, т.е. в сопряжённой среде Теллегена поля Бельтрами обмениваются импедансами, но сохраняют первоначальный тип левой или правой круговой поляризации.

Векторы $\mathbf{Q}_{1,2}$ характеризуют волновые поля, которые в однородной и безграничной среде свободно распространяются без взаимодействия или отражения и могут возбуждаться по отдельности. По этой причине невзаимность оказывается у них завуалированным свойством. Невзаимность должна проявляться при сопоставлении одноимённых волновых величин в исходной и сопряжённой средах. В исходной среде поля Бельтрами связаны с напряжённостями электромагнитного поля по формулам

$$\mathbf{E}=\mathbf{Q}_1-i\eta_2\mathbf{Q}_2,\ \mathbf{H}=\mathbf{Q}_2-i\varsigma_1\mathbf{Q}_1; \tag{7}$$

$$\mathbf{Q}_1=(\mathbf{E}+i\eta_2\mathbf{H})(1+\varsigma_1\eta_2)^{-1},\ \mathbf{Q}_2=(\mathbf{H}+i\varsigma_1\mathbf{E})(1+\varsigma_1\eta_2)^{-1}, \tag{8}$$

где $\varsigma_j=\eta_j^{-1}$ ($j=1,2$) – волновые адмитансы. Образуем разность между электрическими полями в исходной и сопряжённой с ней средах Теллегена

$$\Delta\mathbf{E}=\mathbf{E}-\mathbf{E}_{\text{сопр}}=i(\eta_1-\eta_2)\mathbf{Q}_2=-2i\eta k\alpha\mathbf{Q}_2 \tag{9}$$

и между магнитными полями

$$\Delta\mathbf{H}=\mathbf{H}-\mathbf{H}_{\text{сопр}}=i(\varsigma_2-\varsigma_1)\mathbf{Q}_1=-2i\varsigma k\alpha\mathbf{Q}_1. \tag{10}$$

Обе разности изменяются пропорционально параметру невзаимности α и в простой изотропной среде (при $\alpha=0$) обращаются в нуль.

Комплексный вектор Пойнтинга $\mathbf{P}=\frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*$ (знак «$*$» обозначает комплексное сопряжение) также можно использовать для выявления невзаимности среды. В общем случае разность $\Delta\mathbf{P}=\mathbf{P}-\mathbf{P}_{\text{сопр}}$ приводится к выражению

$$2\Delta\mathbf{P}=i(\varsigma_1-\varsigma_2)\mathbf{Q}_1\times\mathbf{Q}_1^*+i(\eta_1-\eta_2)\mathbf{Q}_1\times\mathbf{Q}_1^*+(\varsigma_1\eta_2-\varsigma_2\eta_1)\mathbf{Q}_2\times\mathbf{Q}_1^*. \tag{11}$$

Пусть поля Бельтрами являются плоскими волнами, которые распространяются в плоскости $y=0$ под углом φ к оси z. В этом случае

$$\mathbf{Q}_1(x,z)=\{-i\cos\varphi,1,i\sin\varphi\}Q_1\exp\left[\gamma(x\sin\varphi+z\cos\varphi)\right], \tag{12}$$

$$\mathbf{Q}_2(x,z)=\{i\cos\varphi,1,-i\sin\varphi\}Q_2\exp\left[\gamma(x\sin\varphi+z\cos\varphi)\right], \tag{13}$$

где Q_1 и Q_2 – амплитуды плоских волн Бельтрами. Третье слагаемое в (11) обращается в нуль, после чего получаем

$$\Delta\mathbf{P} = 2k\alpha\left(\varsigma|Q_1|^2 + \eta|Q_2|^2\right)\left(\sin\varphi\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\hat{\mathbf{z}}\right). \tag{14}$$

Таким образом, средние за период значения плотности потока энергии различаются, причём тоже на величину, кратную параметру невзаимности α.

Невзаимность можно обнаружить также и не прибегая к сопряжённой среде. Как видно из (7), электрическое и магнитное поля зависят от параметра невзаимности через импеданс η_2 и адмитанс ς_1. Изучая структуру поля распространяющейся плоской волны в среде и используя тот факт, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не являются взаимно ортогональными, находим проявление невзаимности среды Теллегена, вычисляя скалярное произведение $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}$.

Плоские волны Бельтрами $\mathbf{Q}_j(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}_j \exp(i\gamma\cdot\mathbf{r})$, $\gamma = \gamma\hat{\mathbf{e}}$ ($j = 1,2$), где $\hat{\mathbf{e}}$ – единичный вектор в направлении распространения, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, обладают структурой

$$i\hat{\mathbf{e}}\times\mathbf{Q}_{1,2} = \pm\mathbf{Q}_{2,1},\ \hat{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{Q}_j = 0, \tag{15}$$

см. формулы (2) и (3). Введём тройку базисных векторов $\hat{\mathbf{e}}_\perp$, $\hat{\mathbf{e}}_{||}$, $\hat{\mathbf{e}}$, так что $\hat{\mathbf{e}}\times\hat{\mathbf{e}}_\perp = \hat{\mathbf{e}}_{||}$, $\hat{\mathbf{e}}\times\hat{\mathbf{e}}_{||} = -\hat{\mathbf{e}}_\perp$. Пусть $\mathbf{Q}_j = Q_{||}^{(j)}\hat{\mathbf{e}}_{||} + Q_\perp^{(j)}\hat{\mathbf{e}}_\perp$; вследствие (15) имеется связь $Q_{||}^{(1,2)} = \pm iQ_\perp^{(1,2)}$, поэтому имеем

$$\mathbf{Q}_1 = Q_{||}^{(1)}\left(\hat{\mathbf{e}}_{||} - i\hat{\mathbf{e}}_\perp\right) = Q_\perp^{(1)}\left(\hat{\mathbf{e}}_\perp + i\hat{\mathbf{e}}_{||}\right), \tag{16}$$

$$\mathbf{Q}_2 = Q_{||}^{(2)}\left(\hat{\mathbf{e}}_{||} + i\hat{\mathbf{e}}_\perp\right) = Q_\perp^{(2)}\left(\hat{\mathbf{e}}_\perp - i\hat{\mathbf{e}}_{||}\right). \tag{17}$$

Векторы электрического и магнитного полей вычисляются, согласно (7), по формулам (сомножитель $\exp(i\gamma\cdot\mathbf{r})$ подразумевается)

$$\mathbf{E} = \left(Q_{||}^{(1)} - i\eta_2 Q_{||}^{(2)}\right)\hat{\mathbf{e}}_{||} - i\left(Q_{||}^{(1)} + i\eta_2 Q_{||}^{(2)}\right)\hat{\mathbf{e}}_\perp = \left(Q_\perp^{(1)} - i\eta_2 Q_\perp^{(2)}\right)\hat{\mathbf{e}}_\perp + i\left(Q_\perp^{(1)} + i\eta_2 Q_\perp^{(2)}\right)\hat{\mathbf{e}}_{||}, \tag{18}$$

$$\mathbf{H} = \left(Q_{||}^{(2)} - i\varsigma_1 Q_{||}^{(1)}\right)\hat{\mathbf{e}}_{||} + i\left(Q_{||}^{(2)} + i\varsigma_1 Q_{||}^{(1)}\right)\hat{\mathbf{e}}_\perp = \left(Q_\perp^{(2)} - i\varsigma_1 Q_\perp^{(1)}\right)\hat{\mathbf{e}}_\perp - i\left(Q_\perp^{(2)} + i\varsigma_1 Q_\perp^{(1)}\right)\hat{\mathbf{e}}_{||}. \tag{19}$$

В отличие от простой изотропной среды, здесь скалярное произведение $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} \neq 0$ и служит мерой невзаимности

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = E_{||}H_{||} + E_\perp H_\perp = 2(1 - \varsigma_1\eta_2)Q_\perp^{(1)}Q_\perp^{(2)} = -4k\alpha\left(\frac{k}{\gamma} + k\alpha\right). \tag{20}$$

При обращении параметра α в нуль ортогональность векторов напряжённости электрического и магнитного полей однородной плоской волны восстанавливается.

Заключение. Невзаимность биизотропной среды Теллегена может быть обнаружена не только при отражении от границы или от поверхности раздела с взаимной изотропной средой, но и в свободно проходящих среду волнах. С этой целью следует сопоставить одноимённые характеристики волновых полей в исходной и сопряжённой с ней средах Теллегена. Индикатором невзаимности служит также скалярное произведение напряжённостей электрического и магнитного полей в поле плоской однородной волны. Полученные результаты показывают, что аспект неоднородности среды, который присутствует в дискуссии о невзаимной биизотропной среде [9, 10], является несущественным.

Литература

1. Tellegen D.B.F. The gyrator: a new electric network element // Philips Res. Rept. – 1948. – Vol. 3, № 2. – P. 81–101.

2. Ghosh A. Voltage-controllable magnetic composite based on multifunctional polyethylene microparticles / A. Ghosh, N.K. Sheridon, P. Fischer // Small. – 2008. –Vol. 4, № 11. – P. 1956–1958.

3. Fischer P. Tellegen particles / P. Fischer, A. Ghosh // PIERS Abstracts, Cambridge (USA): Cambridge, MA: The Electromagnetics Academy, 2008. – P. 28.

4. Canto J.R. Modal analysis of bi-isotropic H-guides / J.R. Canto, C.R. Paiva, A.M. Barbosa // Progress In Electromagnetics Research. – 2011. – Vol. 111. – P. 1–24.

5. Lindell I.V. On the reciprocity of bi-isotropic media // Microwave Opt. Technol. Lett. – 1992. – Vol. 5, № 7. – P. 343–346.

6. Sihvola A. Handedness in plasmonics: electrical engineers perspective / A. Sihvola, S. Zouhdi // Metamaterials and plasmonics: fundamentals, modeling, applications (S. Zouhdi, A. Sihvola, A.P. Vinogradov, eds.).– Dordrecht: Springer, 2009. – P. 3–20.

7. Propagation in bi-isotropic media: effect of different formalisms on the propagation analysis / S. Ougier, I. Chenerie, A. Sihvola, A. Priou // Progress In Electromagnetics Research. – 1994. – Vol. 9. – P. 19–30.

8. Фисанов В.В. О применении систем материальных уравнений к задачам излучения электромагнитных волн в изотропной киральной среде // Радиотехника и электроника. – 2004. – Т. 49, № 4. – С. 454–457.

9. Lakhtakia A. Comment on “Are nonreciprocal bi-isotropic media forbidden indeed?” / A. Lakhtakia, W.S. Weiglhofer // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – 1995. – Vol. 43, № 12. – P. 2722–2723.

10. Sihvola A.H. Author’s reply // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – 1995. – Vol. 43, № 12. – P. 2723–2724.

Фисанов Василий Васильевич
Д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник СФТИ при НИТГУ, профессор каф. радиофизики
Национального исследовательскогоТомского государственного университета
Тел.: (382-2) 41-20-78
Эл. почта: fisanov@public.tsu.ru

Fisanov V.V.
Nonreciprocity displays in a bi- isotropic Tellegen medium

Circularly polarized eigenfields and plane waves are considered in a bi-isotropic Tellegen medium. The nonreciprocity of such homogeneous and unbounded medium is shown as a result of comparison between freely propagating electromagnetic Beltrami fields in initial and conjugate Tellegen media. It is appeared as a nonorthogonality measure of the electric and magnetic plane-wave fields in such a medium.
Keywords: bi-isotropic Tellegen medium, dielectric permittivity, magnetic permeability, nonreciprocity parameter, electromagnetic Beltrami fields, wave impedances, wave number, homogeneous plane waves, Poynting vector.
