УДК 539.375: 629.7.015

В.Н. Максименко, А.В. Тягний

Математическое моделирование и исследование развития усталостных трещин в клееклепаных панелях

Методом интегральных уравнений решаются задача об упругом взаимодействии приклеенной и (или) приклепанной широкой анизотропной (композитной) ремонтной накладки с пластиной, ослабленной трещиной, а также задача расчета поврежденной двухслойной клееклепаной панели. Полученные результаты расчета коэффициентов интенсивности напряжений используются для прогнозирования роста трещины при циклических нагрузках. Исследуется зависимость скорости и длительности роста усталостной трещины от типа соединения пластин.

Ключевые слова: анизотропная пластина, клеевое соединение, заклепка, интегральные уравнения, коэффициент интенсивности напряжений, развитие усталостной трещины.

Для обоснования ремонта конструкций с трещинами при помощи клееных и клееклепаных накладок из композитных материалов необходимо производить расчетные оценки поведения конструкций при эксплуатационных статических и циклических нагрузках. С другой стороны, при проектировании конструкций возникает необходимость оценить опасность дефектов типа трещин в двухслойных клееных, клепаных и клееклепаных панелях из металлических и композитных материалов. Прогнозирование остаточной прочности и остаточной долговечности основано на определении напряженно-деформированного состояния (НДС) таких соединений и использовании соответствующих критериев механики разрушения и моделей роста трещин при повторяющихся нагрузках.

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную прямолинейно анизотропную пластину *1* толщиной $h^{(1)}$ с трещиной $-a < x < a$, $y = 0$ (рис. 1). По некоторой области D_0 к пластине *1* посредством клеевого слоя толщиной Δ присоединена бесконечная анизотропная накладка (пластина *2*) толщиной $h^{(2)}$.

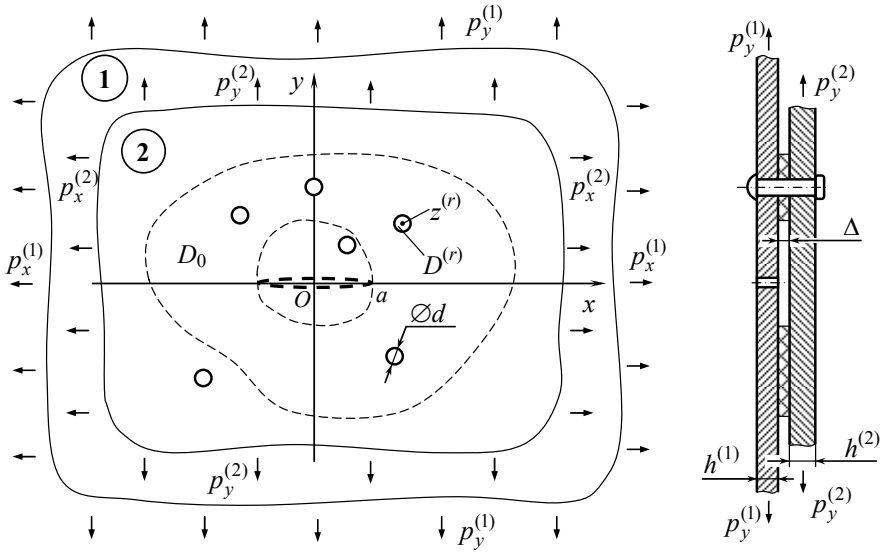

Рис. 1. Схема клееклепаного конструктивного элемента

Пластины дополнительно скреплены m заклепками диаметром d, поперечные сечения которых с центрами в точках $z^{(r)} = x^{(r)} + iy^{(r)}$ занимают область $D_1 = \bigcup_{r=1}^{m} D^{(r)}$ ($r = \overline{1,m}$, $D_0 \cap D_1 = \varnothing$). В плоскости каждой из пластин приложена система внешних переменных, циклически повторяющихся нагрузок с постоянной амплитудой (на рис. 1 показано растяжение пластин в направлениях *Ox* и *Oy)*. Предполагается простое нагружение, т.е. все внешние нагрузки изменяются пропорционально

одному параметру. Требуется оценить эффективность способов присоединения накладки *2* к пластине *1*, остаточную долговечность такого элемента конструкции, связанную с ростом усталостной трещины и достижением ею критического размера.

Расчет напряженно-деформированного состояния. На первом этапе оценим НДС такого комбинированного соединения под действием системы статических нагрузок $p_x^{(1)}$, $p_y^{(1)}$, $p_x^{(2)}$, $p_y^{(2)}$.

Примем ряд допущений [1]. Толщина пластины, клеевого слоя и накладки мала по сравнению с характерными размерами области соединения. Склеивающий слой и заклепки предполагаются упругими и передают только усилия сдвига, возникающие из-за относительного смещении пластин. Ослабление пластины и накладки за счет постановки заклепок не учитывается. Заклепочное соединение рассматривается как упругая связь между пластинами по области $D^{(r)}$ (см. рис. 1), площадью $S = \pi d^2/4$, аналогичная клеевой, но с иной характеристикой жесткости. Усилия, действующие со стороны клея (заклепки) на каждую из пластин, считаются объемными, равномерно распределенными по ее толщине. Пластина и накладка находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии. При прохождении трещины через заклепочное отверстие не учитывается влияние этого отверстия и его заполнение заклепкой. Реальная накладка конечных размеров при моделировании заменяется бесконечной, приклеенной и (или) приклепанной по области $D = D_0 \bigcup D_1$.

Перемещения пластин $u^{(1,2)}(z)$ вдоль оси Ox и $\upsilon^{(1,2)}(z)$ вдоль оси Oy ($z = x + iy$; здесь и в дальнейшем верхний индекс соответствует номеру пластины), деформации сдвига $\gamma_x(z)$, $\gamma_y(z)$ и касательные напряжения $\tau_x(z)$, $\tau_y(z)$ в связующем материале должны удовлетворять заданной системе внешних нагрузок, приложенных к пластинам, и условиям совместности смещений пластины и накладки

$$\begin{aligned} u^{(1)}(z) - u^{(2)}(z) &= \gamma_x(z)\Delta = \frac{\Delta}{G_x(z)}\tau_x(z), \\ \upsilon^{(1)}(z) - \upsilon^{(2)}(z) &= \gamma_y(z)\Delta = \frac{\Delta}{G_y(z)}\tau_y(z), \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$G_{x,y}(z) = \begin{cases} \dfrac{4\Delta}{q_{x,y}\pi d^2}, & z \in D_1, \\ G, & z \in D_0. \end{cases}$$

Здесь G – модуль сдвига клея; $q_{x,y}$ – податливость заклепочного соединения [1].

Перемещения пластины и накладки представим в виде

$$\begin{aligned} u^{(1)}(z) &= u_1^{(1)}(z) + u_2^{(1)}(z), & \upsilon^{(1)}(z) &= \upsilon_1^{(1)}(z) + \upsilon_2^{(1)}(z), \\ u^{(2)}(z) &= u_1^{(2)}(z) + u_2^{(2)}(z) + u_0 - \omega y, & \upsilon^{(2)}(z) &= \upsilon_1^{(2)}(z) + \upsilon_2^{(2)}(z) + \upsilon_0 + \omega x, \end{aligned} \tag{2}$$

где неизвестные константы ω, u_0, υ_0 определяют поворот и перемещения накладки как жесткого целого относительно пластины; $u_1^{(l)}(z)$, $\upsilon_1^{(l)}(z)$ – перемещения от действия неизвестных распределенных усилий $(-1)^l \tau_{x,y} \big/ h^{(l)}$ со стороны связующего; $u_2^{(l)}(z)$, $\upsilon_2^{(l)}(z)$ – перемещения от известных внешних усилий ($l = 1, 2$). Если известны аналитические выражения смещений пластины l от действия единичной сосредоточенной силы, приложенной к точке $t = x_t + iy_t$ в направлении оси Ox – $u_{11}^{(l)}(z,t)$, $\upsilon_{11}^{(l)}(z,t)$ и оси Oy – $u_{12}^{(l)}(z,t)$, $\upsilon_{12}^{(l)}(z,t)$, то перемещения $u_1^{(l)}(z)$, $\upsilon_1^{(l)}(z)$ представимы в виде ($l = 1, 2$)

$$\begin{aligned} u_1^{(l)}(z) &= \frac{(-1)^l}{h^{(l)}} \iint\limits_D \left[u_{11}^{(l)}(z,t)\tau_x(t) + u_{12}^{(l)}(z,t)\tau_y(t) \right] dx_t\, dy_t, \\ \upsilon_1^{(l)}(z) &= \frac{(-1)^l}{h^{(l)}} \iint\limits_D \left[\upsilon_{11}^{(l)}(z,t)\tau_x(t) + \upsilon_{12}^{(l)}(z,t)\tau_y(t) \right] dx_t\, dy_t. \end{aligned} \tag{3}$$

Перемещения в анизотропной пластине l выражаются через две аналитические функции $\varphi_\nu^{(l)}(z_\nu^{(l)})$, $\nu = 1, 2$ [2, 3]

$$u^{(l)} = 2\mathrm{Re}\left\{\sum_{\nu=1}^{2} p_\nu^{(l)} \varphi_\nu^{(l)}(z_\nu^{(l)})\right\}, \qquad \upsilon^{(l)} = 2\mathrm{Re}\left\{\sum_{\nu=1}^{2} q_\nu^{(l)} \varphi_\nu^{(l)}(z_\nu^{(l)})\right\}, \tag{4}$$

где

$$p_\nu^{(l)} = a_{11}^{(l)}[\mu_\nu^{(l)}]^2 - a_{16}^{(l)}\mu_\nu^{(l)} + a_{12}^{(l)}, \quad q_\nu^{(l)} = a_{12}^{(l)}\mu_\nu^{(l)} + a_{22}^{(l)}[\mu_\nu^{(l)}]^{-1} - a_{26}^{(l)}, \quad z_\nu^{(l)} = x + \mu_\nu^{(l)} y.$$

Здесь $\mu_\nu^{(l)}$ – корни характеристического уравнения ($\mathrm{Im}\mu_\nu^{(l)} > 0$); $a_{jk}^{(l)}$ ($j, k = 1, 2, 6$) – коэффициенты матрицы податливости обобщенного закона Гука материала пластины l. Явный вид потенциалов $\varphi_\nu^{(l)}(z_\nu^{(l)})$, определяющих перемещения $u_{11}^{(l)}(z,t)$, $\upsilon_{11}^{(l}(z,t)$, $u_{12}^{(l)}(z,t)$, $\upsilon_{12}^{(l)}(z,t)$, $u_2^{(l)}(z,t)$, $\upsilon_2^{(l)}(z,t)$ в пластине с трещиной ($l = 1$) и без трещины ($l = 2$), в общем случае и в случае симметрии задачи относительно осей Ox и (или) Oy приведен в работах [1, 3]. Решения для сосредоточенных сил имеют логарифмическую особенность.

Используя (3), (4) и учитывая (2), уравнениям (1) можно придать вид

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta}{G_x(z)}\tau_x(z) + \iint_D \left[k_{11}(z,t)\tau_x(t) + k_{12}(z,t)\tau_y(t)\right]dx_t dy_t - \omega y + u_0 = R_1(z), \\ &\frac{\Delta}{G_y(z)}\tau_y(z) + \iint_D \left[k_{21}(z,t)\tau_x(t) + k_{22}(z,t)\tau_y(t)\right]dx_t dy_t + \omega x + \upsilon_0 = R_2(z), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$k_{11}(z,t) = \sum_{l=1}^{2}\frac{u_{11}^{(l)}(z,t)}{h^{(l)}}, \qquad k_{12}(z,t) = \sum_{l=1}^{2}\frac{u_{12}^{(l)}(z,t)}{h^{(l)}},$$

$$k_{21}(z,t) = \sum_{l=1}^{2}\frac{\upsilon_{11}^{(l)}(z,t)}{h^{(l)}}, \qquad k_{22}(z,t) = \sum_{l=1}^{2}\frac{\upsilon_{12}^{(l)}(z,t)}{h^{(l)}},$$

$$R_1(z) = u_2^{(1)}(z) - u_2^{(2)}(z), \quad R_2(z) = \upsilon_2^{(1)}(z) - \upsilon_2^{(2)}(z).$$

Явные выражения $k_{ij}(z,t)$ ($i, j = 1, 2$) ввиду громоздкости не приводим.

К системе уравнений (5) необходимо добавить уравнения равновесия пластин:

$$\iint_D \tau_x(t)dx_t dy_t = 0, \quad \iint_D \tau_y(t)dx_t dy_t = 0, \quad \iint_D \left[\tau_x(t)y - \tau_y(t)x\right]dx_t dy_t = 0. \tag{6}$$

В случае симметрии задачи относительно оси Ox (Oy) второе (первое) и третье уравнения в (6) выполняются тождественно.

Напряжения в пластине 1 имеют особенности в окрестностях вершин трещины. Если $\tau_x(z)$, $\tau_y(z)$ известны, то коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) отрыва и сдвига

$$K_1(\pm a) = \lim_{x\to\pm a\pm 0}\sigma_y^{(1)}(x,0)\sqrt{2\pi|x-a|} \qquad K_2(\pm a) = \lim_{x\to\pm a\pm 0}\tau_{xy}^{(1)}(x,0)\sqrt{2\pi|x-a|}$$

вычисляются по формулам, приведенным в работе [4].

При численной реализации уравнений (5), (6) область D разбивается на M квадратных ячеек $D^{(r)}$, каждая площадью $S^{(r)}$ и с центром в точке $z^{(r)}$, причем одной заклепке соответствует одна ячейка площадью $S^{(r)}$ ($r = \overline{1,M}$, $m < M$). Размер ячеек в области D_0 должен быть уменьшен в предполагаемой области увеличения градиента $\tau_x(z)$, $\tau_y(z)$. Неизвестные функции $\tau_x(z)$, $\tau_y(z)$ считаются постоянными внутри каждой ячейки.

Потребуем, чтобы система (5), (6) выполнялась в центре каждой ячейки. В этом случае дискретный аналог уравнений (5), (6) можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{l=1}^{M}\left[k_{11}^{(s,r)}\tau_x^{(r)}+k_{12}^{(s,r)}\tau_y^{(r)}\right]-\omega y^{(s)}+u_0=R_1^{(s)}\\ \sum_{l=1}^{M}\left[k_{21}^{(s,r)}\tau_x^{(r)}+k_{22}^{(s,r)}\tau_y^{(r)}\right]+\omega x^{(s)}+\upsilon_0=R_2^{(s)}\end{aligned}\right\}\quad s=\overline{1,M}\,; \tag{7}$$

$$\sum_{r=1}^{M}\tau_x^{(r)}S^{(r)}=0\,,\quad \sum_{r=1}^{M}\tau_y^{(r)}S^{(r)}=0\,,\quad \sum_{r=1}^{M}\left[\tau_x^{(r)}y^{(r)}+\tau_y^{(r)}x^{(r)}\right]S^{(r)}=0\,, \tag{8}$$

где

$$k_{ij}^{(s,r)}=\begin{cases}\iint\limits_{D^{(r)}}k_{ij}(z^{(s)},t)dx_t\,dy_t\,, & i\neq j \text{ или } s\neq r,\\ \alpha_j^{(s)}+\iint\limits_{D^{(r)}}k_{jj}(z^{(s)},t)dx_t\,dy_t\,, & i=j,\ s=r;\end{cases}$$

$$\alpha_j^{(s)}=\begin{cases}\Delta\big/G_x(z^s), & j=1,\\ \Delta\big/G_y(z^s); & j=2;\end{cases}$$

$$\tau_x^{(r)}=\tau_x(z^{(r)}),\quad \tau_y^{(r)}=\tau_y(z^{(r)}),\quad R_j^{(s)}=R_j(z^{(s)}),\ s,j=1,2\,.$$

За исключением случая симметрии относительно осей Ox и Oy система (7), (8) переопределенная. Наиболее просто избыточность преодолевается отбрасыванием лишних (любых) уравнений из (7).

Интегралы, входящие в выражение для коэффициентов системы, вычисляются численно. При $z^{(s)}\notin D^{(r)}$ применяется дважды (по координатам x и y) квадратурная формула Гаусса наивысшей алгебраической точности для постоянной весовой функции с L узлами [5]. В расчетах принималось $L=1$ для $\left|z^{(s)}-z^{(r)}\right|\Big/\sqrt{S^{(r)}}>2$ и $L=2$ для $\left|z^{(s)}-z^{(r)}\right|\Big/\sqrt{S^{(r)}}\leq 2$. Если $z^{(s)}\in D^{(r)}$ $(s=r)$, то внутри области интегрирования возникает интегрируемая особенность типа $\ln(z^{(s)}-t)$ при $t\to z^{(s)}$. В этом случае область разбивается на четыре квадратные подобласти, при этом точка $z^{(s)}$ совпадает с одной из угловых точек каждой из этих подобластей. Интеграл по каждой из этих подобластей вычисляется двукратным применением квадратурной формулы Гаусса без выделения особенности при $L=2\div3$. Подобранные значения L обеспечивали погрешность определения КИН менее 1 %.

Достоверность и эффективность предложенной механико-математической модели и метода численного решения для оценки НДС подтверждены в работе [1] сравнением с численными решением (МКЭ) и данными эксперимента. Там же показано, что дополнительное крепление клеевого соединения даже жесткими заклепками ($q_{x,y}\to 0$) незначительно понижает КИН, поэтому в дальнейшем рассматриваются способы соединения пластин только посредством заклепок и клееклепаный.

Прогнозирование роста усталостных трещин. Предложенная расчетная методика определения КИН позволяет оценивать длительность роста усталостной трещины при циклическом нагружении на основе известного закона роста усталостной трещины. В частности, для пульсирующего цикла нагружения прогнозирование роста усталостных трещин в конструктивном элементе при действующем КИН отрыва может быть выполнено с использованием уравнения Пэриса, которое, например, для алюминиевых сплавов дает хорошее соответствие с экспериментом в среднем диапазоне скоростей от 10^{-8} до 10^{-3} м/цикл [6–8]

$$\frac{da}{dN}=C(\Delta K)^q\,, \tag{9}$$

где ΔK – размах КИН отрыва, соответствующий изменению параметра внешней нагрузки от минимума (нуля) до максимума; C и q – экспериментально определяемые константы. Уравнение (9) справедливо для прогнозирования роста трещины в каждой ее вершине.

При циклическом одноосном растяжении пластины с трещиной в направлении оси у выражение для размаха коэффициента интенсивности напряжений разрыва во многих случаях может быть представлено следующим образом:

$$\Delta K = \beta(a)\,\Delta p_y^{(1)}\sqrt{\pi a}\,, \tag{10}$$

где $\Delta p_y^{(1)}$ – размах приложенных усилий цикла от минимального (нулевого) значения до максимального; $\beta(a)$ – поправочный множитель для трещины нормального отрыва в бесконечной пластине, находящейся под действием равномерных усилий на бесконечности $\beta(a) = 1$, для других случаев $\beta(a)$ определяется аналитическими или численными методами.

Из выражения для скорости развития усталостной трещины можно найти длительность развития трещины (в циклах). Так, подставляя выражение для ΔK из (10) в уравнение (9), после разделения переменных и интегрирования получаем

$$N - N_0 = \frac{1}{C\left[\Delta p_y^{(1)}\sqrt{\pi}\right]^q}\int_{a_0}^{a}\frac{da}{\left[\beta(a)\sqrt{a}\right]^q}\,, \tag{11}$$

где a_0 – начальная полудлина трещины, соответствующая числу циклов N_0; a – длина трещины, соответствующая числу N циклов.

Параметрические исследования роста усталостной трещины проводились для конструктивного элемента, схема которого изображена на рис. 2. Материал пластины – сплав Д16чАТ: E = 71,0 ГПа, ν = 0,33; параметры трещиностойкости [8]: вязкость разрушения K_c = 4300 Н/мм$^{3/2}$, $C = 9{,}191\times10^{-17}$, q = 4,553; толщина 3,0 мм. Ремонтная накладка толщиной 1,0 мм выполнена из боропластика с характеристиками упругости E_1 = 165,06 ГПа, E_2 = 85,82 ГПа, G_{12} = 31,21 ГПа, ν_{12} = 0,308, направление E_1 совпадает с осью Oy. Параметры клея G = 0,26 ГПа, Δ = 0,2 мм; размер клеевого соединения 40 × 80 мм. Заклепки диаметром d = 4 мм предполагаются в расчете абсолютно жесткими ($q_{x,y} \to 0$), расстояние в направлениях Ox и Oy между центрами любых двух ближайших заклепок равно 20 мм.

На поврежденную пластину действует растягивающая циклическая пульсирующая нагрузка с постоянным размахом $\Delta p_y^{(1)}$ = 100 МПа. Пластина при развитии трещины должна выдерживать статическую эксплуатационную нагрузку $p^* = [p_y^{(1)}]^*$ = 200 МПа. Рассматриваются два способа присоединения накладки к поврежденной пластине: заклепками и клеемеханическое присоединение. Податливость заклепок равна нулю. Для сравнения также исследуется развитие трещины в пластине без ремонтной накладки. Рост трещины происходит от начальной длины $2a_0$ = 20 мм до предельного значения, определяемого из условия, что при предельной длине трещины $2a_c$ и приложенной эксплуатационной нагрузке p^* КИН в вершинах равен вязкости разрушения K_c, т.е.

$$K_c = \beta(a_c)\,p^*\sqrt{\pi a_c}\,,$$

откуда следует условие для определения a_c

$$\frac{K_c\big/(p^*\sqrt{\pi})}{\beta(a_c)\sqrt{a_c}} = 1\,. \tag{12}$$

На рис. 2 изображены рассчитанные зависимости $\beta(a)$ для различных способов прикрепления накладки (для неподкрепленной панели $\beta(a) = 1$). С использованием этих зависимостей и условия (12) рассчитаны предельные значения длин трещин (таблица). На основе соотношений (11) получены кривые длительности роста усталостной трещины, изображенные на рис. 3. Число циклов до предельного состояния N_c приведено в таблице.

По результатам зависимостей $\beta(a)$ и $a(N)$ построены графики снижения несущей способности (коэффициента запаса прочности n) поврежденной панели (рис. 4):

$$n(N) = \frac{p_{\max}(a)}{p^*} = \frac{p_{\max}(a)}{p^*}\,\frac{\beta(a)\sqrt{\pi a}}{\beta(a)\sqrt{\pi a}} = \frac{K_c}{K(a)} = \frac{K_c}{K[a(N)]}\,,$$

где $p_{\max}(a)$ – максимальная статическая нагрузка $p_y^{(1)}$, которую выдерживает панель при полудлине трещины a.

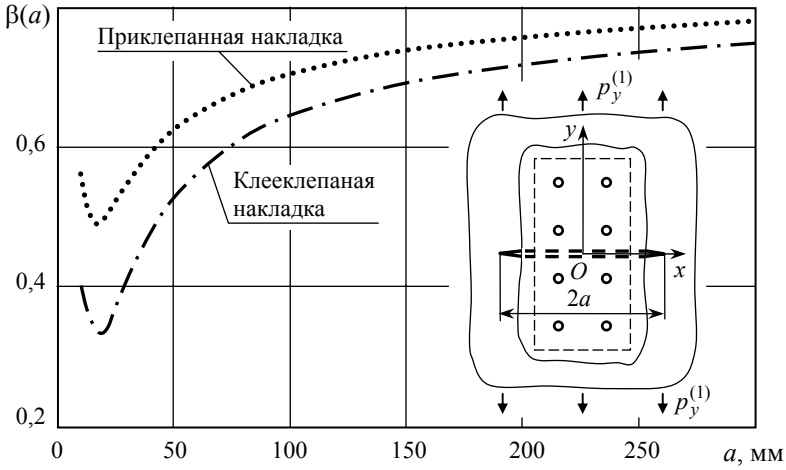

Рис. 2. Зависимость поправочного множителя β от полудлины трещины *a*

Предельные значения длин трещин a_c и число циклов до предельного состояния N_c в исходной поврежденной панели и в панели с ремонтными накладками

Конструктивный элемент	a_c, мм	N_c, циклов
Без накладки	147,1	25 240
С приклепанной накладкой	247,6	456 990
С клееклепаной накладкой	268,6	2 175 100

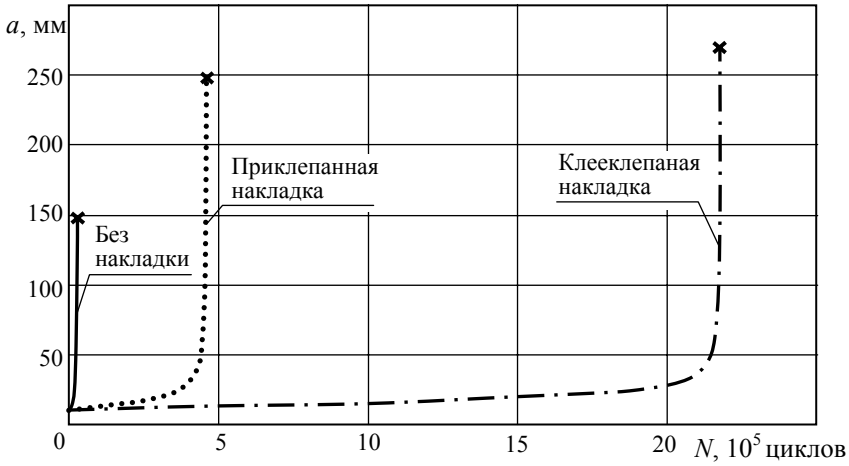

Рис. 3. Длительность роста усталостной трещины

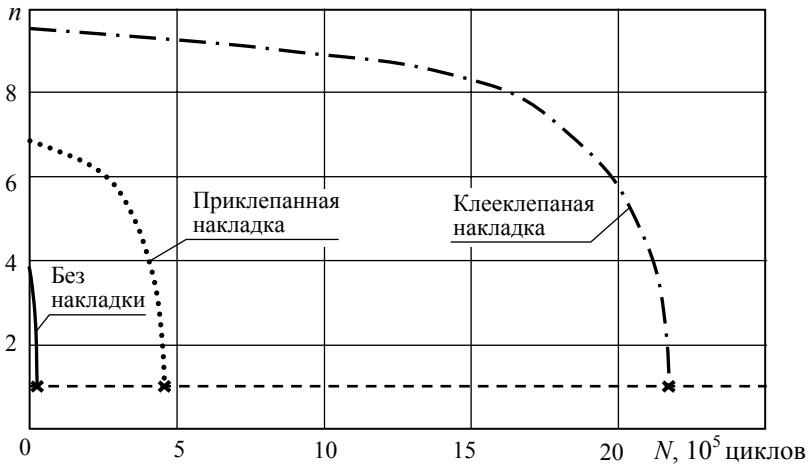

Рис. 4. Снижение несущей способности поврежденной панели

Применение ремонтной накладки, присоединенной заклепками, увеличивает остаточный ресурс (число циклов до разрушения) поврежденного трещиной конструктивного элемента в 18 раз, а клееклепаной накладки – в 86 раз по сравнению с неотремонтированной панелью.

Литература

1. Максименко В.Н. Расчет напряженного состояния клееклепаных слоистых пластин с трещиной / В.Н. Максименко, А.В. Тягний // Учен. зап. ЦАГИ. – 1990. – Т. 21, № 5. – С. 92–101.

2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехтеоретиздат, 1957. – 464 с.

3. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.

4. Максименко В.Н. Расчет подкрепленной пластины с трещиной в случае нелинейной работы накладок и склеивающего слоя / В.Н. Максименко, В.Н. Павшок // Прочность и аэроупругость авиац. конструкций. – Казань: КАИ, 1988. – С. 27–33.

5. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Физматгиз, 1959. – 328 с.

6. Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие / ред. В.В. Панасюк: В 4 т. – Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М.П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1988. – 619 с.

7. Броек Д. Основы механики разрушения. – М.: Высшая школа, 1980. – 368 с.

8. Исследование характеристик трещиностойкости сплава Д16чАТ / Ю.Н. Александров, А.И. Бакулин, В.В. Белов и др. // Вопросы авиационной науки и техники. Сер. Аэродинамика и прочность летательных аппаратов. – Новосибирск: СибНИА. 1995. – Вып. 1. – С. 178–201.

Максименко Вениамин Николаевич
Д-р техн. наук, профессор, зав. каф. инженерной математики
Новосибирского государственного технического университета
Тел.: (383-3) 46-07-33
Эл. почта: kimt@ngs.ru

Тягний Анатолий Владимирович
Канд. техн. наук, нач. отдела АНО СЦНТО «Промбезопасность–Сибирь»
Тел.: (383-3) 54-88-63
Эл. почта: av-tg@yandex.ru

Maksimenko V.N., Tyagnii A.V.

Mathematical modeling and analysis of fatigue crack propagation in riveted and adhesive bonded panels

The problem of elastic interaction between cracked plate and the wide anisotropic (composite) repair patch, bonded via rivets and (or) adhesive, and also the problem of calculation of the cracked two-layer riveted and adhesive bonded panel is solved by means of the integral equations method. The computed stress intensity factor are used to predict the crack propagation under cyclic loading. The rate and duration of fatigue crack growth depending on junction type of plates is investigated.

Keywords: anisotropic plate, adhesive bonding, rivet, integral equation, stress intensity factor, fatigue crack propagation.
