УДК 510.644

А.А. Ефремов

Новые операции над нечеткими числами и интервалами

Предложены новые операции над нечеткими числами и интервалами, сохраняющие тип и функциональную форму функций принадлежности и позволяющие образовывать составные термы лингвистических переменных, соответствующие применению лингвистических модификаторов «очень» и «более или менее». Получены выражения, позволяющие для отдельных типов функций принадлежности найти характеристические точки нечетких результатов введенных операций без вычисления интегралов.

Ключевые слова: нечеткое множество, нечеткое число, лингвистические модификаторы, полиномиальные функции принадлежности, кусочно-непрерывные функции.

В работе [1] Заде вводит операции концентрирования и растяжения нечеткого множества $\tilde{A}$ как средство порождения составных термов соответствующей лингвистической переменной с помощью модификаторов «очень» и «более или менее», соответственно. Если $\mu_A(x)$ – функция принадлежности (ФП) нечеткого множества $\tilde{A}$, то операция концентрирования определяется как $CON(\tilde{A}) = (\mu_A(x))^2$, а растяжения – $DIL(\tilde{A}) = \sqrt{\mu_A(x)}$.

Критики в работах [2, 3] указывают на то, что подобные операции не изменяют носитель и ядро нечеткого множества, т.к. полученные ФП принимают значения 0 и 1 в тех же точках, что и исходная, и предлагают производить сдвиг ФП после операций концентрирования и растяжения.

В настоящей работе вводятся новые операции над нечеткими множествами, заданными на множестве действительных чисел $\Re$ (нечеткие числа и интервалы), позволяющие модифицировать нечеткую величину, не изменяя функциональную форму ФП. Также, показывается простота вычисления результатов введенных операций для некоторых типов ФП.

Операции сжатия и размытия нечетких величин. Пусть $\tilde{A}$ – нечеткое множество, заданное на универсальном множестве U, с функцией принадлежности $\mu_A(x)$, и C_A – результат дефаззификации данного множества по методу центра максимума. Иными словами, C_A – центр ядра нечеткого множества $\tilde{A}$. Также, пусть S_A – площадь под функцией принадлежности $S_A = \int\limits_{\operatorname{supp}\tilde{A}} \mu_A(x)dx$, где $\operatorname{supp}\tilde{A}$ – носитель нечеткого множества $\tilde{A}$.

Определение 1. Результатом операции *сжатия* множества $\tilde{A}$ со степенью $r \geq 1$ является нечеткое множество $\tilde{B}$ с функцией принадлежности $\mu_B(x)$ такого же вида, что и $\mu_A(x)$, с центром ядра $C_B = C_A$, площадь под функцией принадлежности которого $S_B = \dfrac{S_A}{r}$, где $S_B = \int\limits_{\operatorname{supp}\tilde{B}} \mu_B(x)dx$.

Операцию сжатия со степенью r нечеткого множества $\tilde{A}$ будем обозначать $\tilde{B} = \operatorname{sharp}_r \tilde{A}$.

Определение 2. Результатом операции *размытия* множества $\tilde{A}$ со степенью $r \geq 1$ является нечеткое множество $\tilde{B}$ с функцией принадлежности $\mu_B(x)$ такого же вида, что и $\mu_A(x)$, с центром ядра $C_B = C_A$, площадь под функцией принадлежности которого $S_B = r \cdot S_A$, где $S_B = \int\limits_{\operatorname{supp}\tilde{B}} \mu_B(x)dx$.

Будем обозначать операцию размытия со степенью r $\tilde{B} = \operatorname{blurr}_r \tilde{A}$.

Очевидно, введенные операции при $r > 0$ являются комплементарными, так что

$$\operatorname{blurr}_r \tilde{A} = \operatorname{sharp}_{(r^{-1})} \tilde{A}; \quad \operatorname{sharp}_r \tilde{A} = \operatorname{blurr}_{(r^{-1})} \tilde{A}.$$

Исходя из введенных определений, можно получить следующие выражения:

$$\mathrm{blurr}_1\,\tilde{A}=\mathrm{sharp}_1\,\tilde{A}=\tilde{A};\quad \mathrm{blurr}_0\,\tilde{A}=\mathrm{sharp}_\infty\,\tilde{A}=C_A;$$
$$\mathrm{blurr}_\infty\,\tilde{A}=\mathrm{sharp}_0\,\tilde{A}=U.$$

В дальнейшем будем говорить о нечетких множествах, заданных на множестве действительных чисел $\Re$, т.е. о нечетких числах и интервалах.

Пример с трапецеидальными ФП. Рассмотрим нечеткий интервал $\tilde{A}=\langle L,K_L,K_R,R\rangle$ с ФП

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\dfrac{x-L}{K_L-L}, x\in[L,K_L);\\ 1,\quad x\in[K_L,K_R];\\ \dfrac{x-R}{K_R-R}, x\in(K_R,R];\\ 0,\quad x\notin[L,R];\end{cases} \tag{1}$$

где $[L,R]$ — носитель нечеткого множества, $[K_L,K_R]$ — его ядро, и $\dfrac{K_L+K_R}{2}=C_A$ — центр ядра.

Функция принадлежности (1) нечеткого множества $\tilde{A}$ изображена на рис. 1, *а*, *б* сплошными линиями и при $x\in[L,R]$ представляет собой трапецию с высотой $h=1$ и основаниями $a=R-L$ и $b=K_R-K_L$, площадь которой определяется по известной формуле [4]:

$$S_A=\frac{a+b}{2}\cdot h. \tag{2}$$

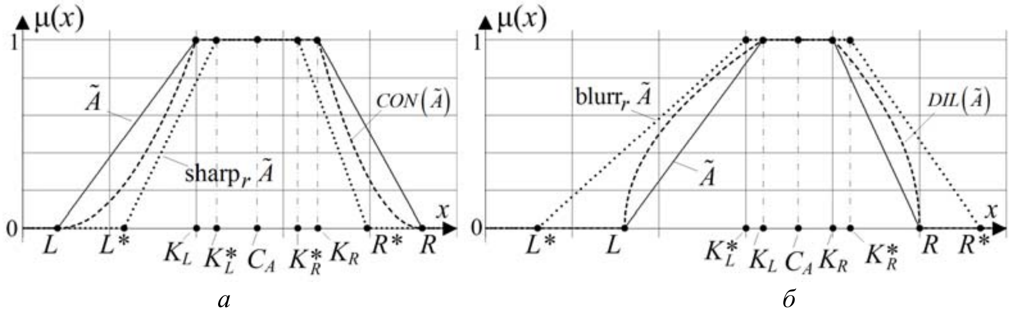

Рис. 1. Сравнение ФП результатов операций над $\tilde{A}$: *а* – концентрирование (*CON*) и сжатие (sharp); *б* – растяжение (*DIL*) и размытие (blurr)

ФП, полученные в результате использования операций $CON(\tilde{A})$ и $DIL(\tilde{A})$, изображены на рис. 1, *а*, *б* штриховыми линиями. Из рис. 1 видно, что левые и правые части ФП исказились, в то время как носитель и ядро новых нечетких интервалов совпадают с исходными.

Нечеткий интервал $\tilde{B}=\mathrm{sharp}_r\,\tilde{A}$ представляет собой нечеткое множество $\tilde{B}=\left\langle L^*,K_L^*,K_R^*,R^*\right\rangle$, ФП которого также является трапецией с высотой $h=1$, площадь которой меньше площади исходной трапеции в r раз. Согласно (2) получаем

$$\frac{(R-L)+(K_R-K_L)}{2}\cdot h=r\cdot\frac{\left(R^*-L^*\right)+\left(K_R^*-K_L^*\right)}{2}\cdot h. \tag{3}$$

Так как центры меньших оснований трапеций должны совпадать, то, используя (3), получаем:

$$L^*=C_A-\frac{C_A-L}{r};\quad R^*=C_A-\frac{C_A-R}{r};$$
$$K_L^*=C_A-\frac{C_A-K_L}{r};\ K_R^*=C_A-\frac{C_A-K_R}{r}. \tag{4}$$

Следуя аналогичным рассуждениям, можно получить зависимости для характерных точек нечеткого интервала $\tilde{B}=\mathrm{blurr}_r\,\tilde{A}$:

$$L^*=C_A-(C_A-L)\cdot r;\quad R^*=C_A-(C_A-R)\cdot r;$$
$$K_L^*=C_A-(C_A-K_L)\cdot r;\quad K_R^*=C_A-(C_A-K_R)\cdot r. \tag{5}$$

Примеры ФП нечетких интервалов, полученных в результате применения операций сжатия и размытия, приведены на рис. 1 (пунктирные линии).

Соотношения (4) и (5) можно использовать и в том случае, когда нечеткое множество $\tilde{A}$ представляет собой треугольное нечеткое число $\tilde{A}=\langle L,C,R\rangle$, принимая во внимание, что $C=C_A=K_L=K_R$.

Пример с кусочно-непрерывными полиномиальными ФП. В работе [5] введен класс нечетких чисел (*L*-*R*)-типа с кусочно-непрерывными ФП такими, что функции $f_L(x)$ и $f_R(x)$ левой и правой частей ФП являются полиномами второго порядка с дополнительными условиями о равенстве нулю производных функций $f_L(x)$ и $f_R(x)$ в характеристических точках нечеткой величины. Тогда для нечеткого интервала $\tilde{A}=\langle L,K_L,K_R,R\rangle$ общий вид ФП можно записать как

$$\mu_A(x)=f_L(x)\cdot H(x-L)\cdot H(K_L-x)+H(x-K_L)\cdot H(K_R-x)+f_R(x)\cdot H(x-K_R)\cdot H(R-x), \tag{6}$$

где $H(x)$ - единичная функция Хевисайда, а $f_L(x)$ и $f_R(x)$ удовлетворяют условию

$$\begin{cases} f_L(L)=0; \\ f_L(K_L)=1; \\ f_R(K_R)=1; \\ f_R(R)=0. \end{cases} \tag{7}$$

Форму ФП, определяемой выражением (6), можно изменять, налагая на функции $f_L(x)$ и $f_R(x)$ одно из четырех дополнительных условий:

$$\begin{cases} f'_L(L)=0; \\ f'_R(R)=0. \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} f'_L(K_L)=0; \\ f'_R(K_R)=0. \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} f'_L(L)=0; \\ f'_R(K_R)=0. \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} f'_L(K_L)=0; \\ f'_R(R)=0. \end{cases} \tag{11}$$

Тип ФП, определяемой выражением (6), будем обозначать $2P$ с добавлением греческих букв $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ при соответствии ФП одному из условий (8)–(11).

Внешний вид ФП типов $2P\alpha - 2P\delta$ представлен на рис. 2, *а–г* соответственно.

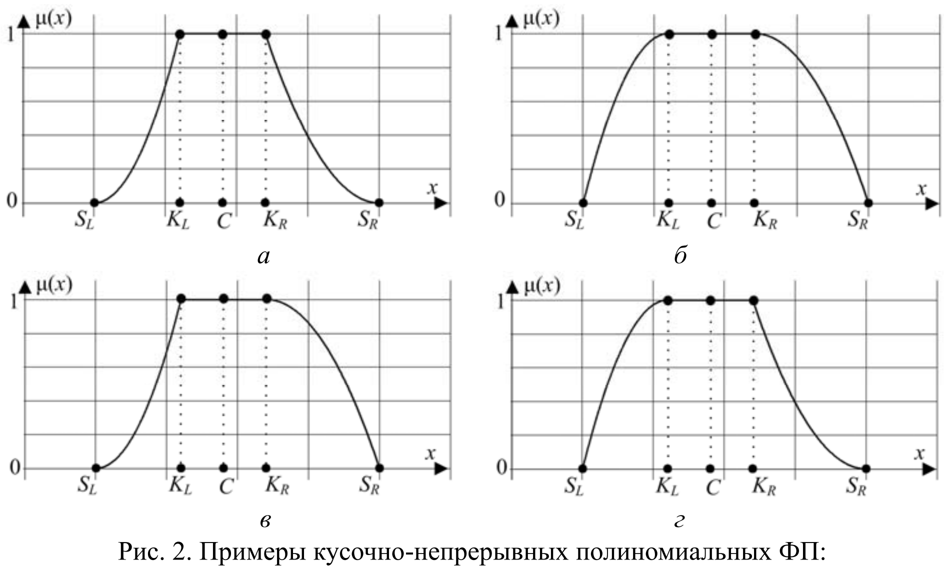

Рис. 2. Примеры кусочно-непрерывных полиномиальных ФП:
а – тип $2P\alpha$; *б* – тип $2P\beta$; *в* – тип $2P\gamma$; *г* – тип $2P\delta$

Коэффициенты функций $f_L(x)$ и $f_R(x)$, а, следовательно, и площадь под кривой ФП, однозначно выражаются через характерные точки нечеткого интервала путем решения системы уравнений, составленной из условия (7) и одного из условий (8)-(11), соответствующего типу ФП.

Пример. Рассмотрим операции сжатия и размытия нечеткого интервала $\widetilde{A} = \langle L, K_L, K_R, R\rangle$ с ФП типа $2P\alpha$ (рис. 2, *а*). Составим систему уравнений, полученную из условий (7) и (8):

$$\begin{cases} a_0 + a_1 L + a_2 L^2 = 0; \\ a_0 + a_1 K_L + a_2 {K_L}^2 = 1; \\ b_0 + b_1 K_R + b_2 {K_R}^2 = 1; \\ b_0 + b_1 R + b_2 R^2 = 0; \\ a_1 + 2a_2 L = 0; \\ b_1 + 2b_2 R = 0; \end{cases} \tag{12}$$

где a_i и b_i — коэффициенты полиномов $f_L(x) = \sum\limits_{i=0}^{2} a_i x^i$ и $f_R(x) = \sum\limits_{i=0}^{2} b_i x^i$. Решением системы (12) будут коэффициенты функций $f_L(x)$ и $f_R(x)$, выраженные через характерные точки нечеткого интервала:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{L^2}{(L-K_L)^2}; \quad a_1 = \frac{-2L}{(L-K_L)^2}; \quad a_2 = \frac{1}{(L-K_L)^2}; \\ b_0 &= \frac{R^2}{(R-K_R)^2}; \quad b_1 = \frac{-2R}{(R-K_R)^2}; \quad b_2 = \frac{1}{(R-K_R)^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда, площадь под кривой $\mu_A(x)$ также выражается через данные характерные точки:

$$S_A = \int\limits_{\operatorname{supp}\widetilde{A}} \mu_A(x)dx = \int\limits_{L}^{K_L} f_L(x)dx + \int\limits_{K_L}^{K_R} dx + \int\limits_{K_R}^{R} f_R(x)dx = \frac{K_L - L}{3} + (K_R - K_L) + \frac{R-K_R}{3}.$$

Согласно Определению 1, ФП нечеткого интервала $\widetilde{B}_1 = \operatorname{sharp}_r \widetilde{A} = \left\langle L^*, K_L^*, K_R^*, R^*\right\rangle$ также будет являться кусочно-непрерывная функция типа $2P\alpha$, площадь под которой будет меньше S_A в r раз, причем центры ядер нечетких множеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}_1$ должны совпадать. Исходя из этого, легко можно показать, что характерные точки нечеткого интервала $\widetilde{B}_1$ можно также определить, используя выражения (4). Аналогично, можно определить характерные точки нечеткого интервала $\widetilde{B}_2 = \operatorname{blurr}_r \widetilde{A}$ с использованием выражений (5).

Примеры ФП типа $2P\alpha$ нечетких интервалов, полученных применением операций сжатия и размытия, изображены штриховыми линиями на рис. 3.

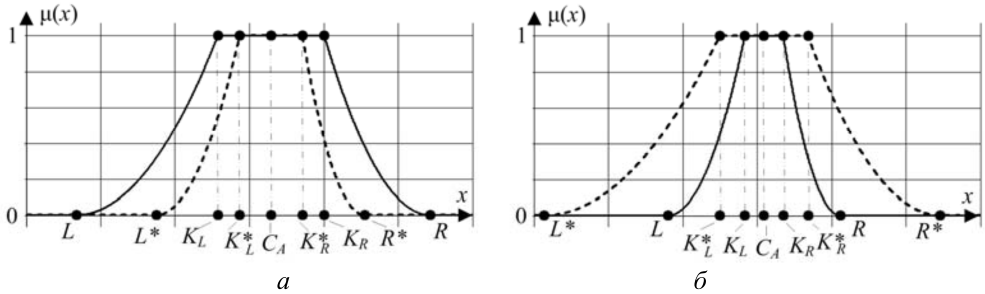

Рис. 3. Результат вычисления операций для ФП (*L*-*R*)-типа: *а* – сжатие; *б* – размытие

Легко доказать, что выражения (4) и (5) применимы для всех четырех введенных выше типов функций принадлежности. Также, при $C_A = K_L = K_R$ эти выражения позволяют получить характерные точки нечетких чисел с кусочно-непрерывными ФП, левые и правые части которых являются полиномами второго порядка, удовлетворяющие условию (7) и одному из условий (8)–(11).

Заключение. Представленные в настоящей работе операции сжатия и размытия нечетких множеств позволяют образовывать составные термы лингвистических переменных без усложнения выражений для функций принадлежности. Простота вычисления результатов введенных операций для отдельных распространенных типов ФП позволяет предложить их в качестве альтернативы традиционным операциям концентрирования и растяжения.

Литература

1. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. - М.: Мир, 1976. – 167 с.

2. Lackoff G. Hedges: A study in meaning criteria and the logic of fuzzy concepts // Journal of Philosophical Logic. – 1973. – Vol. 2, Iss. 4. – pp. 458-508.

3. Huynh V.N., Ho T.B., Nakamori Y. A parametric representation of linguistic hedges in Zadeh's fuzzy logic // International Journal of Approximate Reasoning. - 2002. – Vol. 30, Iss. 3. – P. 203–223.

4. Корн Г. А. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы / Г.А. Корн, Т.М. Корн. - 6-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2003. – 832 с.

5. Ефремов А.А. О применении кусочно-непрерывных функций к заданию функций принадлежности нечетких чисел (L-R)-типа / А.А. Ефремов, А.М. Кориков // Вестник науки Сибири. – 2011. - №. 1(1) [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://sjs.tpu.ru/journal/article/view/70/117, свободный (дата обращения: 20.03.2012).

Ефремов Александр Александрович
Ассистент каф. автоматики и компьютерных систем НИ ТПУ
Тел.: 8 (383-2) 41-89-07
Эл. почта: Yefremov@aics.ru

Yefremov A.A.
New operations on fuzzy numbers and intervals

New operations on fuzzy numbers and intervals which keep the type and the shape of membership functions intact and allow producing complex terms of linguistic variables corresponding linguistic hedges «very» and «more or less» are suggested in this paper. We derive mathematical expressions which allow determining characteristic points of fuzzy results of introduced operations for particular types of membership functions without integral evaluation.
Keywords: fuzzy set, fuzzy number, linguistic hedges, polynomial membership functions, piecewise continuous functions.
