УДК 681.51

**В.Д. Юркевич**

# Синтез нелинейных систем с ШИМ в канале управления на основе метода разделения движений

Рассматривается проблема синтеза регуляторов для нелинейных систем управления с широтно-импульсной модуляцией в канале управления. Предлагается методика расчета параметров пропорционально-интегральных регуляторов для нелинейных систем на основе применения метода доопределения А.Ф. Филиппова и метода разделения движений. Получены расчетные соотношения для выбора параметров регулятора и широтно-импульсного модулятора. Приведен пример с результатами численного моделирования.

**Ключевые слова:** нелинейные системы, пропорционально-интегральный регулятор, широтно-импульсная модуляция, метод разделения движений.

### Проблема синтеза нелинейных систем с ШИМ в канале управления

В существующей теории синтеза импульсных систем управления [1–6] остаются открытыми вопросы расчета регуляторов для нелинейных неаффинных по управлению систем при широтно-импульсной модуляции управляющего сигнала в условиях действия сигнальных и параметрических возмущений. В данной работе обсуждается методика расчета параметров пропорционально-интегральных (ПИ) регуляторов для нелинейной системы, где исходное дифференциальное уравнение нелинейной неаффинной по управлению системы с разрывной правой частью заменяется аффинной моделью усредненного движения, полученной на основе метода доопределения А.Ф. Филиппова [7]. Стабилизация выхода системы в условиях действия сигнальных и параметрических возмущений обеспечивается путем преднамеренного формирования разнотемповых процессов в системе управления. Устойчивость быстрых процессов обеспечивается выбором параметров регулятора, а формируемые медленные процессы соответствуют эталонной модели желаемого поведения выхода нелинейной системы.

### Постановка задачи

Обсуждаемый подход к решению задачи синтеза регулятора может быть использован для широкого класса нелинейных динамических систем. В данной работе в качестве примера рассматривается нелинейная, неаффинная по управлению динамическая система вида

$$\dot{x} = f(x, w, u)\,, \tag{1}$$

где $x$ – выходная измеряемая переменная, $x \in R$; $u$ – управляющее воздействие, $u \in R$; $w$ – внешнее ограниченное возмущающее воздействие, которое является недоступным для измерения, $w \in R$. Неаффинность по управлению системы (1) подразумевает, что функция $f(x,w,u)$ является непрерывной по своим аргументам, но явное обращение данной функции относительно $u$ при заданных $x$ и $w$ является невозможным. Примером такой системы может служить динамическая система следующего вида:

$$\dot{x} = x^3 + u(1-u^2)\,. \tag{2}$$

Предполагается, что управляющее воздействие для системы (1) формируется с помощью широтно-импульсного модулятора (ШИМ) первого рода, заданного условием

$$u = \begin{cases} u^+, \; t_k < t \le t_k + \chi(t_k)T_s, \\ u^-, \; t_k + \chi(t_k)T_s < t \le t_k + T_s, \end{cases} \tag{3}$$

где $T_s$ – период квантования ШИМ; $t_\kappa$ – дискретное время; $t_\kappa = \kappa T_s$; $\kappa = 0,1,\ldots$; $\chi(t_\kappa)$ – коэффициент заполнения импульса в момент времени $t_\kappa$. Необходимо обеспечить стабилизацию выхода $x(t)$, т.е. свойство $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = r$, где $r = \text{const}$, для нелинейной системы вида (1) в условиях неполной информации о виде функции $f(x,w,u)$.

**Методика синтеза регулятора**

Известно [8, 9], что в условиях высокой частоты коммутации управляющего воздействия $u(t)$, формируемого ШИМ (3), и в отсутствие режима насыщения ШИМ на основе метода доопределения А.Ф. Филиппова [7] может быть получена модель усредненного поведения динамической системы (1), (3) вида

$$\dot{x} = f^{-}(x,w) + [f^{+}(x,w) - f^{-}(x,w)]\chi, \quad (4)$$

где управляющим воздействием является коэффициент заполнения импульса $\chi$, $f^{+}(x,w) = f(x,w,u^{+})$, $f^{-}(x,w) = f(x,w,u^{-})$ и $\chi \in (0,1)$.

С целью решения поставленной задачи управления, рассмотрим алгоритм управления в виде следующего дифференциального уравнения [10]:

$$\mu^{q}\chi^{(q)} + d_{q-1}\mu^{q-1}\chi^{(q-1)} + \dots + d_1\mu\chi^{(1)} = k[(r-x)/T - x^{(1)}], \quad (5)$$

где $\mu$ – малый параметр, $\mu > 0$, $T > 0$. В частном случае, при $q = 1$, из (5) следует

$$\mu\dot{u} = k[(r-x)/T - \dot{x}], \quad (6)$$

где (6) соответствует структуре пропорционально-интегрального (ПИ) регулятора, а выражение (5) соответствует структуре ПИ-регулятора с дополнительной фильтрацией. В результате уравнения усредненного поведения замкнутой системы имеют вид

$$\begin{aligned} &x^{(1)} = f^{-}(x,w) + [f^{+}(x,w) - f^{-}(x,w)]\chi, \\ &\mu^{q}\chi^{(q)} + d_{q-1}\mu^{q-1}\chi^{(q-1)} + \dots + d_1\mu\ \chi^{(1)} = k[(r-x)/T - x^{(1)}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Подстановка выражения для $\dot{x}$ из правой части первого уравнения системы (7), в правую часть второго уравнения данной системы приводит к системе уравнений вида

$$\begin{aligned} &x^{(1)} = f^{-}(x,w) + [f^{+}(x,w) - f^{-}(x,w)]\chi, \\ &\mu^{q}\chi^{(q)} + d_{q-1}\mu^{q-1}\chi^{(q-1)} + \dots + d_1\mu\ \chi^{(1)} + k[f^{+}(x,w) - f^{-}(x,w)]\chi = k[(r-x)/T - f^{-}(x,w)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим $\chi_1 = \chi, \chi_2 = \mu\dot{\chi}, \dots, \chi_q = \mu^{q-1}\chi^{(q-1)}$, тогда систему (8) представим в виде

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f^{-}(x,w) + [f^{+}(x,w) - f^{-}(x,w)]\chi_1, \\ &\mu\dot{\chi}_1 = \chi_2, \\ &\dots\dots\dots \\ &\mu\dot{\chi}_{q-1} = \chi_q, \\ &\mu\dot{\chi}_q = -k[f^{+}(x,w) - f^{-}(x,w)]\chi_1 - d_1\chi_2 - \dots - d_{q-1}\chi_q - k[(r-x)/T - f^{-}(x,w)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя технику разделения движений А.Н. Тихонова [11,12], из уравнений (9) получаем усредненную модель подсистемы быстрых движений (ПБД) вида

$$\begin{aligned} &\mu\dot{\chi}_1 = \chi_2, \\ &\dots\dots\dots \\ &\mu\dot{\chi}_{q-1} = \chi_q, \\ &\mu\dot{\chi}_q = -k[f^{+}(x,w) - f^{-}(x,w)]\chi_1 - d_1\chi_2 - \dots - d_{q-1}\chi_q - k[(r-x)/T - f^{-}(x,w)], \end{aligned} \quad (10)$$

где $x, w$ рассматриваются как замороженные параметры на интервале времени переходных процессов в ПБД (10). Из (10) получим характеристический полином ПБД

$$\mu^{q}s^{q} + d_{q-1}\mu^{q-1}s^{q-1} + \dots + d_1\mu\ s + k[f^{+}(x,w) - f^{-}(x,w)], \quad (11)$$

где параметр $k$ выбирается так, что в рабочей области пространства состояний системы (4) выполняется условие $k[f^{+}(x,w) - f^{-}(x,w)] = \gamma > 0$. Остальные параметры регулятора $d_{q-1}, \dots, d_1$ выбираются в соответствии с требованием устойчивости процессов в ПБД. Полагая $\mu = 0$ в системе (10), получим квазиравновесный режим ПБД, где $\chi = \chi_1 = \chi_1^{id}$ и

$$\chi_1^{id} = [(r-x)/T - f^{-}(x,w)]/[f^{+}(x,w) - f^{-}(x,w)]. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (4), получим усредненную модель подсистемы медленных движений (ПМД) вида

$$\dot{x}=(r-x)/T\,. \qquad (13)$$

С целью разделения темпов между быстрыми и медленными процессами выбор параметра $\mu$ осуществляется в соответствии с условием $\mu=\sqrt[q]{\gamma}T/\eta$, где $\eta\geq 10$.

Согласно свойствам сингулярно-возмущенных систем дифференциальных уравнений [11, 12], при выполнении условий экспоненциальной устойчивости процессов в ПБД и условий разделения темпов быстрых и медленных процессов, получаем, что после затухания быстрых процессов поведение выхода системы (1) определяется свойствами уравнения ПМД (13). Тем самым обеспечивается не только стабилизация выходной переменной $x(t)$, но и формирование заданных показателей качества переходных процессов для $x(t)$.

Влияние импульсного режима ШИМ на процессы в обсуждаемой замкнутой системе управления можно оценить при $\chi=0{,}5$ на основе следующих соотношений:

$$A_x(\omega_s)\approx\frac{2}{\pi\omega_s}\left|f^{+}(x,w)-f^{-}(x,w)\right|,\ A_{\chi}(\omega_s)\approx\frac{k}{\mu^{q}\omega_s^{q-1}}A_x(\omega_s)\,, \qquad (14)$$

где $\omega_s=2\pi/T_s$; $A_x(\omega_s)$ – амплитуда гармонической составляющей с частотой $\omega_s$ в выходном сигнале $x(t)$ системы (1), $A_{\chi}(\omega_s)$ – амплитуда гармонической составляющей с частотой $\omega_s$ во входном сигнале $\chi(t)$ широтно-импульсного преобразователя (3). Выбор периода квантования $T_s$ осуществляется с учетом дополнительных требований $A_x(\omega_s)\leq\varepsilon_1$, $A_{\chi}(\omega_s)\leq\varepsilon_2$, где $\varepsilon_1>0$ и $\varepsilon_2>0$.

**Численный пример**

Рассмотрим динамическую систему (2) с ШИМ (3) в канале управления, где управляющий сигнал $\chi(t)$ на входе ШИМ формируется алгоритмом управления вида

$$\mu^2\chi^{(2)}+d_1\mu\chi^{(1)}=k[(r-x)/T-x^{(1)}]\,. \qquad (15)$$

Модель усредненного движения динамической системы (2), (3) при отсутствии насыщения ШИМ имеет вид $x^{(1)}=\phi^{-}(x,u^{-})+g(u^{+},u^{-})\chi$, где $\phi^{-}(x,u^{-})=x^3+u^{-}[1-(u^{-})^2]$ и $g(u^{+},u^{-})=u^{+}[1-(u^{+})^2]-u^{-}[1-(u^{-})^2]$. Тогда $\chi^{id}=[(r-x)/T-\phi^{-}(x,u^{-})]/g(u^{+},u^{-})$, где режим отсутствия насыщения ШИМ можно обеспечить выбором величин $u^{+}$ и $u^{-}$. Численное моделирование было выполнено при следующих значениях параметров алгоритма управления (15): $T=0{,}75$ с, $\mu=0{,}1$ с, $d_1=3$, $k=-2$. Заданы следующие параметры ШИМ: $u^{+}=2{,}5$, $u^{-}=-2{,}5$, $T_s=0{,}02$ с. Соответственно $g(u^{+},u^{-})=-26{,}25$ и $\omega_s\approx 314{,}1593$ рад/с. Из выражений (14) получаем $A_x(\omega_s)\approx 0{,}0532$ и $A_{\chi}(\omega_s)\approx 0{,}0339$, что согласуется с результатами моделирования на рис. 1.

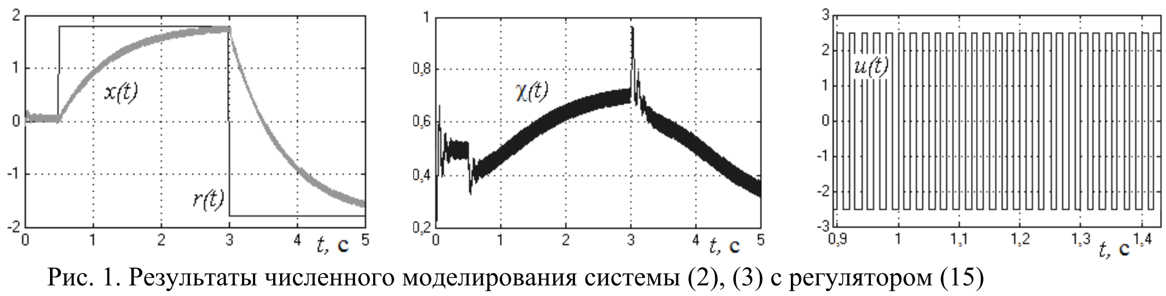


Рис. 1. Результаты численного моделирования системы (2), (3) с регулятором (15)

**Заключение**

Предлагаемый подход к синтезу регуляторов для нелинейных динамических систем с широтно-импульсным модулятором в канале управления может быть использован в условиях неполной информации о внешних неконтролируемых возмущениях и параметрах модели объекта управления для широкого класса нелинейных динамических систем, в частности, для решения таких прикладных задач, как управление угловой ориентацией спутника с импульсным режимом работы двигателей тяги, стабилизация электромагнитного подвеса, управление силовыми преобразователями.

*Литература*

1. Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 968 с.
2. Цыпкин Я.З. Теория нелинейных импульсных систем / Я.З. Цыпкин, Ю.С. Попков. – М.: Наука, 1973. – 414 с.
3. Гелиг А.Х. Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем / А.Х. Гелиг, А.Н. Чурилов. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1993. – 266 с.
4. Чурилов А.Н. Устойчивость систем с интегральной широтно-импульсной модуляцией // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 6. – С. 142–150.
5. Gelig A.Kh. Stability and oscillations of pulse-modulated systems: a review of mathematical approaches / A.Kh. Gelig, A.N. Churilov // Functional-Differential Equations. – 1996. – Vol. 3, № 3–4. – P. 267–320.
6. Churilov A.N. LMI approach to stabilization of a linear plant by a pulse modulated signal / A.N. Churilov, A.V. Gessen // Int. J. of Hybrid Systems. – 2003. – Vol. 3, № 4. – P. 375–388.
7. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 225 с.
8. Sira-Ramirez H. A geometric approach to pulse-width-modulated control in nonlinear dynamical systems // IEEE Trans. Automatic Control. – 1989. – Vol. 34, № 2. – P. 184–187.
9. Sira-Ramirez H. Dynamical discontinuous feedback control of nonlinear systems / H. Sira-Ramirez, P. Lischinsky-Arenas // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1990. – Vol. 35, № 12. – P. 1373–1378.
10. Юркевич В.Д. Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. – С.Петербург, Наука, 2000. – 287 с.
11. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. – 1952. – Т. 31, №3. – С. 575–586.
12. Геращенко Е.И. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем / Е.И. Геращенко, С.М. Геращенко. – М.: Наука, 1975. – 296 с.

---

**Юркевич Валерий Дмитриевич**
Д-р техн. наук, профессор каф. автоматики Новосибирского государственного технического университета
Тел.: 8 (383-3) 46-11-19
Эл. почта: yurkev@ait.cs.nstu.ru

Yurkevich V.D.
**Design of nonlinear control systems with pulse-width modulation via time-scale separation**

The problem of controller design under pulse-width modulated feedback is discussed in terms of Filippov's average model where control variable is a duty ratio function. The presented design methodology guarantees desired output transient performance indices by inducing of two-time-scale motions in the closed-loop system. The method of singular perturbations is used in order to get explicit expressions for evaluation of controller parameters. Simulation results of numerical example are presented.
**Keywords:** nonlinear control systems, pulse-width modulation, singular perturbation method.

---