УДК 681.51

В.Д. Юркевич

Расчет типовых регуляторов для нелинейных систем с запаздыванием методом разделения движений

Предлагается методика расчета параметров пропорционально-интегральных (ПИ) и пропорционально-интегрально-дифференциальных (ПИД) регуляторов для нелинейных систем с запаздыванием в канале управления. Обсуждаемая методика применима для неустойчивых нелинейных систем в условиях неполной информации о модели объекта управления. В основе применяемой методики лежит преднамеренное формирование разнотемповых процессов в системе управления, где устойчивость быстрых процессов обеспечивается выбором параметров регулятора, а формируемые медленные процессы соответствуют эталонной модели желаемого поведения нелинейной системы. Приведен пример с результатами численного моделирования.

Ключевые слова: нелинейные системы, пропорционально-интегральный регулятор, метод разделения движений.

Проблема синтеза нелинейных систем с запаздыванием в канале управления

Пропорционально-интегральные (ПИ) и пропорционально-интегрально-дифференциальные (ПИД) регуляторы являются составной частью современных технических средств автоматики [1]. Применение данных регуляторов лежит в основе большинства механотронных систем и промышленных систем управления. Вопросам расчета параметров данных типовых регуляторов посвящено множество статей и монографий, например [2–4]. Большая часть известных методик расчета типовых регуляторов была разработана для устойчивых линейных динамических систем, в том числе для устойчивых линейных систем при наличии запаздывания в канале управления. Широкое применение сетевых технологий построения распределенных систем управления приводит к необходимости дальнейших исследований в области методов синтеза систем с запаздыванием в канале управления. Целью данной работы является рассмотрение методики расчета параметров типовых регуляторов для нелинейных систем с запаздыванием в канале управления на основе подхода, представленного в [5–6]. В данном подходе осуществляется преднамеренное формирование разнотемповых процессов в системе управления и применяется метод разделения движений [7–9] для анализа свойств системы. Рассматриваемые в данной работе структуры алгоритмов управления наиболее близки к структурам алгоритмов, обсуждаемых в [10].

ПИ-регулятор для нелинейной системы 1-го порядка

Рассмотрим модель нелинейного объекта управления с запаздыванием в канале управления

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w(t)) + g(x(t), w(t))u(t-\tau), \tag{1}$$

где x – выходная измеряемая переменная, $x \in R$; u – управляющее воздействие, $u \in R$; w – внешнее ограниченное возмущающее воздействие, которое является недоступным для измерения, $w \in R$; τ – величина запаздывания в канале управления, $\tau > 0$. Полагаем, что функции $f(x,w)$, $g(x,w)$ являются непрерывными по своим аргументам в ограниченной рабочей области пространства состояний, где также полагаем, что выполнено условие

$$0 < g_{\min} \le g(x,w) \le g_{\max} < \infty. \tag{2}$$

Задача управления состоит в том, что необходимо обеспечить в замкнутой системе стабилизацию выхода $x(t)$, т.е. свойство $\lim_{t\to\infty} x(t) = r$, где $r = \text{const}$, для нелинейной системы вида (1) в условиях неполной информации о виде функций $f(x,w)$, $g(x,w)$.

Рассмотрим алгоритм управления, заданный уравнением следующего вида:

$$\mu\dot{u}(t) = k_0\{a[r(t) - x(t)] - \dot{x}(t)\}, \tag{3}$$

где μ – малый параметр, $\mu > 0$. Далее будет показано, каким образом могут быть получены расчетные соотношения для выбора параметров регулятора μ, k_0, a на основе применения метода разделения движений для анализа процессов в замкнутой системе управления (1), (3). Отметим, что алгоритм управления (3) в изображениях Лапласа соответствует структуре ПИ-регулятора

$$u(s)=\frac{k_0}{\mu}\left\{\frac{a}{s}[r(s)-x(s)]-x(s)\right\}.$$

Анализ свойств замкнутой системы с ПИ-регулятором

Заменяя $\dot{x}$ в выражении (3) правой частью уравнения (1), получим уравнения замкнутой системы в форме сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=f(x(t),w(t))+g(x(t),w(t))u(t-\tau),\\&\mu\dot{u}(t)=-k_0 g(x(t),w(t))u(t-\tau)+k_0\{a[r(t)-x(t)]-f(x(t),w(t))\}.\end{aligned}\qquad(4)$$

Представим систему (4) в операторной форме записи, где $p=d/dt$. Получим

$$\begin{aligned}&px=f(x,w)+g(x,w)e^{-\tau p}u,\\&\mu pu=-k_0 g(x,w)e^{-\tau p}u+k_0\{a[r-x]-f(x,w)\}.\end{aligned}\qquad(5)$$

С целью анализа свойств системы (5) выделим из данной системы уравнения для подсистемы быстрых движений (ПБД) и подсистемы медленных движений (ПМД) в условиях предположения, что $\tau=\mu\tau_0$. Обозначим $p=\mu^{-1}p_0$. Из системы (5) получаем

$$\begin{aligned}&p_0 x=\mu[f(x,w)+g(x,w)e^{-\tau_0 p_0}u],\\&p_0 u=-k_0 g(x,w)e^{-\tau_0 p_0}u+k_0\{a[r-x]-f(x,w)\}.\end{aligned}$$

При предельном переходе $\mu\to 0$ из данной системы следуют уравнения

$$\begin{aligned}&p_0 x=0,\\&p_0 u=-k_0 g(x,w)e^{-\tau_0 p_0}u+k_0\{a[r-x]-f(x,w)\},\end{aligned}$$

в которых замена $\tau_0=\mu^{-1}\tau$, $p_0=\mu^{-1}p$ с последующим переходом к временной форме записи приводит к уравнению ПБД вида

$$\mu\dot{u}(t)=-k_0 g(x(t),w(t))u(t-\tau)+k_0\{a[r(t)-x(t)]-f(x(t),w(t))\},\qquad(6)$$

где $x(t), w(t)$ и $r(t)$ рассматриваются как замороженные величины на интервале времени переходных процессов ПБД (6).

Предполагая устойчивость быстрых процессов, рассмотрим квазиравновесный режим ПБД (6), соответствующий формальному условию $\dot{u}=0$, из которого следует $u(t)=u_s(t)$, где

$$u_s(t-\tau)=[g(x(t),w(t))]^{-1}\{a[r(t)-x(t)]-f(x(t),w(t))\}.$$

Подстановка $u(t-\tau)=u_s(t-\tau)$ в уравнение (1) позволяет получить уравнение ПМД:

$$\dot{x}(t)=a[r(t)-x(t)],\qquad(7)$$

где в качестве первого приближения в представленной методике анализа вида уравнений быстрых и медленных движений пренебрегается влиянием запаздывания на процессы в ПМД.

Известно [7–8], что при уменьшении μ из устойчивости процессов в ПБД и в ПМД следует устойчивость процессов в исходной сингулярно-возмущенной системе дифференциальных уравнений. Тогда после затухания процессов в ПБД (6) поведение выходной управляемой переменной $x(t)$ описывается уравнением ПМД (7) и тем самым обеспечивается решение поставленной задачи стабилизации выхода $x(t)$. При этом выбором параметра a обеспечивается формирование желаемого времени переходных процессов для выхода объекта управления (1), которое определяется временем переходных процессов в ПМД, где $t_{\text{ПМД}}\approx 3/a$, $a>0$.

Расчет параметров ПИ-регулятора

Критическими факторами для работоспособности обсуждаемого класса систем управления являются: а) устойчивость процессов в ПБД; б) достаточно высокая степень разделения темпов переходных процессов между ПБД и ПМД. Используем критерий Найквиста для анализа устойчивости быстрых процессов в условиях предположения (2), где $g(x,w)=\text{const}$ на интервале времени переходных процессов ПБД (6) и $k_0 g>0$. Из уравнения для частоты среза ω_c в ПБД (6) получим $\mu\omega_c=k_0 g$, а уравнение для величины запаса устойчивости по фазе φ_0 в данной ПБД приобретает вид $\varphi_0=0{,}5\pi-\tau\omega_c$. Тогда нижняя граница параметра μ задается условием

$$\mu\ge\mu_{\min}=\tau k_0 g_{\max}/(0{,}5\pi-\varphi_0),$$

где φ_0 выбирается в интервале $0<\varphi_0<\pi/2$.

В качестве оценки для времени переходного процесса в ПБД используем соотношение $t_{\text{пбд}} \approx \pi/\omega_c$, а требование на степень разделения темпов переходных процессов между ПБД и ПМД выразим соотношением $t_{\text{пбд}} \le t_{\text{пмд}}/\eta$, где полагаем $\eta=10$. В результате получаем выражение для верхней границы параметра μ следующего вида:

$$\mu \le \mu_{\max} = 3k_0 g_{\min}/(a\pi\eta).$$

ПИД-регулятор для нелинейной системы 2-го порядка

Рассмотрим модель нелинейного объекта управления с запаздыванием в канале управления

$$\ddot{x}(t) = f(\mathbf{X}(t), w(t)) + g(\mathbf{X}(t), w(t))u(t-\tau), \tag{8}$$

где $\mathbf{X}=[x,\dot{x}]^T$ – вектор состояния; $0<g_{\min} \le g(\mathbf{X},w) \le g_{\max} <\infty$.

Рассмотрим алгоритм управления, заданный уравнением

$$\mu^2 \ddot{u}(t) + d_1\mu\dot{u}(t) = k_0\{-\ddot{x}(t) - a_1\dot{x}(t) + a_0[r(t)-x(t)]\},$$

который представим для более компактной формы записи в виде

$$\mu^2 \ddot{u}(t) + d_1\mu\dot{u}(t) = k_0[F(\mathbf{X}(t), r(t)) - \ddot{x}(t)], \tag{9}$$

где μ – малый параметр, $\mu>0$; $F(\mathbf{X}(t),r(t)) = -a_1\dot{x}(t) + a_0[r(t)-x(t)]$; $a_0>0$; $a_1>0$. Отметим, что выражение (9) в изображениях Лапласа соответствует структуре ПИД-регулятора с фильтром

$$u(s) = \frac{k_0}{\mu(\mu s + d_1)}\left\{\frac{a_0}{s}[r(s)-x(s)] - (s+a_1)x(s)\right\}.$$

Анализ свойств замкнутой системы с ПИД-регулятором

Заменяя $\ddot{x}$ в выражении (9) правой частью уравнения (8), получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \ddot{x}(t) = f(\mathbf{X}(t), w(t)) + g(\mathbf{X}(t), w(t))u(t-\tau), \\ \mu^2 \ddot{u}(t) + d_1\mu\dot{u}(t) + k_0 g(\mathbf{X}(t), w(t))u(t-\tau) = k_0[F(\mathbf{X}(t), r(t)) - f(\mathbf{X}(t), w(t))]. \end{gathered} \tag{10}$$

Обозначим $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, u_1 = u, u_2 = \mu\dot{u}$. Представим систему (10) как стандартную сингулярно-возмущенную систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = f(x_1, x_2, w) + g(x_1, x_2, w)u_1(t-\tau), \\ &\mu\dot{u}_1 = u_2, \\ &\mu\dot{u}_2 = -k_0 g(x_1, x_2, w)u_1(t-\tau) - d_1 u_2 + k_0[F(x_1, x_2, r) - f(x_1, x_2, w)]. \end{aligned} \tag{11}$$

При малой величине параметра μ в системе вида (11) обеспечивается формирование разнотемповых процессов. Привлекая рассмотренную выше операторную форму записи для системы (11), после соответствующих преобразований получим уравнение ПБД вида

$$\mu^2 \ddot{u}(t) + d_1\mu\dot{u}(t) + k_0 g(\mathbf{X}(t), w(t))u(t-\tau) = k_0[F(\mathbf{X}(t), r(t)) - f(\mathbf{X}(t), w(t))], \tag{12}$$

где $g(\mathbf{X}(t), w(t)), F(\mathbf{X}(t), r(t))$ и $f(\mathbf{X}(t), w(t))$ рассматриваются как замороженные величины на интервале времени переходных процессов ПБД (12). Соответствующее системе (11) уравнение ПМД определяется параметрами регулятора и имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = a_0 r, \tag{13}$$

где в качестве первого приближения пренебрегается влиянием τ на процессы в ПМД. После затухания процессов в ПБД (12) поведение $x(t)$ описывается уравнением ПМД (13) и тем самым обеспечивается решение поставленной задачи управления, где выбор параметров a_0, a_1 определяет формирование желаемого перерегулирования и времени переходных процессов на выходе $x(t)$.

Расчет параметров ПИД-регулятора

Привлекая критерий Найквиста для анализа устойчивости быстрых процессов в ПБД (12), получаем расчетные соотношения для вычисления частоты среза ω_c в ПБД (12)

$$k_0 g = \mu\omega_c\sqrt{\mu^2\omega_c^2 + d_1^2} \tag{14}$$

и величины запаса устойчивости по фазе φ_0 в данной ПБД

$$\varphi_0 = 0{,}5\pi - \mathrm{arctg}(\mu\omega_c / d_1) - \tau\omega_c\,. \quad (15)$$

С целью устранения неоднозначности выбора параметра d_1 вводится дополнительное требование на величину запаса устойчивости по модулю l для ПБД (12)

$$k_0 g l = \mu\omega_l \sqrt{\mu^2\omega_l^2 + d_1^2},\ 0 = 0{,}5\pi - \mathrm{arctg}(\mu\omega_l / d_1) - \tau\omega_l\,. \quad (16)$$

Совместное решение уравнений (14)–(16) при заданной величине запаса устойчивости по фазе φ_0, где $0 < \varphi_0 < \pi/2$, заданной величине запаса устойчивости по модулю l, где $l > 1$, и условии $g = g_{\max}$, позволяет вычислить d_1 и значение нижней границы для параметра μ. Расчет верхней границы для параметра μ осуществляется исходя из требования на степень разделения темпов переходных процессов между ПБД и ПМД при условии $g = g_{\min}$, где полагаем $t_{\text{пмд}} \approx 4a_0^{-1/2}$.

Численный пример

Рассмотрим модель объекта управления следующего вида:

$$\ddot{x}(t) = 0{,}5x(t)\dot{x}(t) + 0{,}1\dot{x}(t) + 0{,}5x(t) + 0{,}5\sin(0{,}5t) + u(t-\tau)\,. \quad (17)$$

В соответствии с выражением (9) сформируем ПИД-закон управления:

$$\mu^2\ddot{u}(t) + d_1\mu\dot{u}(t) = k_0[-\ddot{x}(t) - 2\dot{x} - x + r]\,. \quad (18)$$

При заданных значениях $\varphi_0 = 0{,}6$ рад, $l = 2$, $\tau = 0{,}03$ с, $k_0 = 10$, решая систему уравнений (14)-(16), получим $\mu = 0{,}124$ с, $d_1 = 4{,}243$, $\omega_c = 16{,}973$ рад/с, $\omega_l = 28{,}922$ рад/с. Результаты численного моделирования замкнутой системы (17)–(18) для полученных значений параметров алгоритма управления представлены на рис. 1–2.

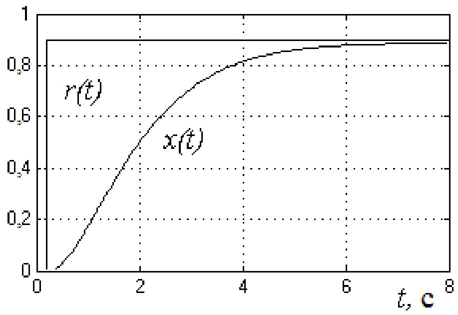

Рис. 1. Выход объекта управления

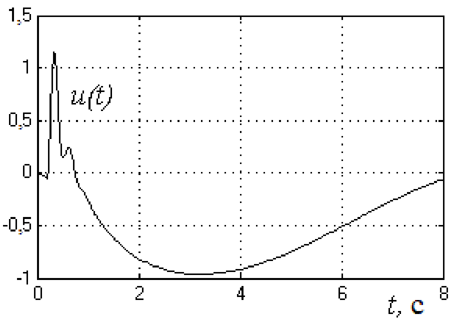

Рис. 2. Управляющее воздействие

Заключение

Представленный подход к решению задачи синтеза систем управления позволяет получить аналитические соотношения для расчета параметров ПИ- и ПИД-регуляторов для нелинейных нестационарных систем с запаздыванием в канале управления и может быть распространен на случай динамических систем более высокого порядка.

Литература

1. Ротач В.Я. Теория автоматического управления: учеб. для вузов. – 3-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МЭИ, 2005. – 400 с.

2. Astrom K.J. PID controllers: Theory, Design, and Tuning / K.J. Astrom, T. Hagglund. – Research Triangle Park, NC: Instrum. Soc. Amer., 1995. – 343 с.

3. O'Dwyer A. Handbook of PI and PID Tuning Rules. – London: Imperial College Press, 2003. – 608 с.

4. Li Y. PID Control System Analysis and Design / Y. Li, K.H. Ang, G.C.Y. Chong // IEEE Control Systems Magazine. – 2006. – Vol. 26, No. 1. – P. 32–41.

5. Юркевич В.Д. Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. – С.Петербург, Наука, 2000. – 287 с.

6. Yurkevich V.D. Design of nonlinear control systems with the highest derivative in feedback. – World Scientific, 2004. – 352 p.

7. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. – 1952. – Т. 31, № 3. – С. 575–586.

8. Геращенко Е.И. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем / Е.И. Геращенко, С.М. Геращенко. – М.: Наука, 1975. – 296 с.

9. Naidu D.S. Singular Perturbations and Time Scales in Control Theory and Applications: An Overview // Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems (DCDIS). Series B: Applications & Algorithms. – 2002. – Vol. 9, № 2. – P. 233–278.

10. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. Цикл лекций: учеб. пособие для вузов.– М.: Машиностроение, 2004. –576 с.

Юркевич Валерий Дмитриевич
Д-р техн. наук, профессор каф. автоматики Новосибирского государственного технического университета
Тел.: 8 (383-3) 46-11-19
Эл. почта: yurkev@ait.cs.nstu.ru

Yurkevich V.D.

PI and PID controller design for nonlinear systems with time delay via time-scale separation

The paper treats a question of proportional-integral (PI) and proportional-integral-derivative (PID) controllers design for nonlinear systems in the presence of a time delay, plant's parameter variations, and unknown external disturbances. The presented design methodology guarantees desired output transient performance indices by inducing of two-time-scale motions in the closed-loop system. Stability conditions imposed on the fast and slow modes and sufficiently large mode separation rate between fast and slow modes can ensure that the full-order closed-loop non-linear system achieves the desired properties in such a way that the output transient performances are desired and insensitive to external disturbances and plant's parameter variations. The method of singular perturbations is used throughout the paper in order to get explicit expressions for evaluation of the controller parameters. Numerical examples with simulation results are presented.

Keywords: nonlinear systems, PI/PID controllers, time delay in feedback, singular perturbation method.
