УДК 519.865.3

В.И. Хабаров, Д.О. Молодцов, С.Г. Хомяков

Марковская модель транспортных корреспонденций

Рассматриваются вопросы оценки матриц корреспонденций для транспортных моделей городов и агломераций. Дается краткий обзор существующих методов. В качестве альтернативного подхода предлагается использовать марковские цепи, байесовские оценки и оценки максимального правдоподобия для матриц переходных вероятностей на основе агрегированных и неагрегированных данных. Анализируются способы учета априорной информации о транспортных корреспонденциях. Приводятся примеры использования разработанных методов.
Ключевые слова: транспортные районы, транспортные корреспонденции, марковские цепи, оценка по агрегированным данным матриц переходных вероятностей.

1. Оценка транспортных корреспонденций

Рассмотрим транспортную сеть как планарный граф $\mathbf{G}=(\mathbf{V},\mathbf{E})$, где $\mathbf{V}$ – множество вершин, $\mathbf{E}$ – множество дуг сети. С каждой вершиной может ассоциироваться некоторый транспортный район как место зарождения (исток) или гашения (сток) потока в сети. Пусть $\mathbf{S}\subset\mathbf{V}$, $\mathbf{D}\subset\mathbf{V}$ – множества вершин графа, которые можно назвать соответственно, истоками и стоками сети. Матрица корреспонденций [1–3] $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{t})=\{\rho_{IJ}(t), i\in\mathbf{S}, j\in\mathbf{D}, t\in\mathbf{T}\}$ определяет распределение потока в сети и может характеризоваться, например, *приведенным количеством транспортных единиц* за единицу времени, переместившихся из района с номером *i* в район с номером *j*, т.е.

$$\rho_{ij}(t)=\frac{N_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} N_{ij}},$$

где N_{ij} – количество транспортных единиц, пересекающих границу *i*-го и *j*-го районов.

Матрица корреспонденций в общем виде зависит от времени $t\in\mathbf{T}$. Корреспонденции обычно связывают с отдельным социальными группами населения, с отдельными видами транспорта, привязывают к времени суток, дням недели, месяцам. Общая задача оценки транспортных корреспонденций заключается в оценке матрицы $\boldsymbol{\rho}$ на основе прямых и/или косвенных данных о перемещениях транспорта, полученных из различных источников.

Матрица корреспонденций рассматривается как укрупненная транспортная модель, в которой скрыта конкретная топология улично-дорожной сети города или агломерации. Эта матрица служит основой для построения детальной модели распределения транспортных потоков по улично-дорожной сети. Выделение транспортных районов обусловлено множеством факторов социально-экономического и географического порядка.

Задачи об оценке транспортных корреспонденций можно разделить на следующие классы в зависимости от способа получения данных:

A. *Наблюдение за множеством траекторий микрообъектов*. Например, наблюдение за перемещением отдельного жителя города или транспортного средства по траектории $\{e_1,e_2,...,e_r\}$, $e_i\in\mathbf{E}$. В этом случае могут использоваться современные средства слежения, например на основе спутниковой навигации, либо на основе сотовой связи. Имеется возможность сохранения и обработки траекторий. Такой способ, очевидно, самый информативный, однако в настоящее время остается малодоступным в силу многих причин, обсуждение которых выходит за рамки данной работы.

B. *Наблюдение за пересечением микрообъектом границы между соседними районами.* Если $n_{ij}(t)$ – *статистика пересечений* микрообъектами границы соседних районов с номерами *i*, *j* в момент $t\in\mathbf{T}$, то получить такую статистику можно, например, с помощью автоматических датчиков в сечении транспортной магистрали, либо с помощью web-камер с дальнейшей ручной или автоматической обработкой изображений. Этот способ трудоемкий, требует установки специального оборудования или организации подсчета с помощью людей. Однако он часто используется на практике.

C. *Наблюдения за состоянием макрообъектов*. Под макрообъектом понимается транспортный район. Наблюдение осуществляется за общим количеством прибывших и убывших из данного транспортного района микрообъектов. Статистические данные относительно макрообъектов далее будут называться агрегированными данными [4]. Эти данные могут быть получены из автоматизированных систем транспортных предприятий, через анкетирование населения района, непосредственного подсчета пассажиропотока на центральных остановках транспортного района и пр.

D. *Априорная информация о корреспонденциях* формируется на основе различных данных социально-экономического характера. Например, по группам населения оценивается емкость данного транспортного района. Оцениваются корреспонденции по группам населения между отдельными районами в зависимости от характера занятий: социально активное население движется к месту приложения труда, к месту учебы, отдыха и пр.

Уточненная модель корреспонденций получается путем объединения априорной информации и информации, полученной путем наблюдений за транспортными потоками. Поэтому важно иметь в распоряжении методы, позволяющие объединять информацию о корреспонденциях различного характера.

Наиболее известными считаются методы оценки корреспонденций, в основе которых лежат гравитационная и энтропийная модели. *Гравитационная модель* использует аналогию с явлением тяготения двух тел с заданными массами [1]:

$$\rho_{ij} = k\frac{s_i d_j}{c_{ij}^2},\ \ i \in \mathbf{S}, j \in \mathbf{D}, \tag{1}$$

где s_i – общий объем транспорта выезжающего из района $i \in \mathbf{D}$; d_j – общий объем транспорта въезжающего в район $j \in S$; c_{ij}^2 – приведенные затраты на перемещение из *i*-го района в *j*-й район; k – нормировочный коэффициент. Данная модель обладает рядом недостатков, отмеченных, например, в [1–3]. В рамках данной модели невозможно учесть априорную информацию. Кроме того, эта модель не учитывает стохастические закономерности потокообразования.

Энтропийная модель [1–2] определяется экстремальной задачей вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}\ln\frac{\rho_{ij}}{\pi_{ij}} \to \max, \tag{2}$$

где π_{ij} – априорная информация о корреспонденциях $\forall i \in \mathbf{S},\ j \in \mathbf{D}$, выраженная в виде вероятности того, что реализуется корреспонденция ρ_{ij}. В целом выражение (2) характеризует максимум по ρ энтропии, что с физической точки зрения соответствует равновесному состоянию системы. Достоинства и недостатки метода обсуждаются в [3].

Цель данной работы заключается в том, чтобы показать возможность применения для моделирования транспортных систем хорошо развитого аппарата цепей Маркова в качестве моделей корреспонденций и использовать методы статистики цепей Маркова для оценки корреспонденций.

2. Марковская модель корреспонденций

Пусть некоторый микрообъект, например транспортное средство, пересекает границу, общую для транспортных районов $i, j \in \mathbf{V}$. Ему соответствует некоторая случайная величина $X(t) \in \mathbf{V}$, которая имеет условную вероятность $p_{ij}(t) = P(X(t+1) = j | X(t) = i$ перехода в состояние $j \in \mathbf{V}$ в момент времени $t+1$, находясь в состоянии $i \in \mathbf{V}$ в момент времени t.

Далее везде будем считать, что время дискретно, т.е. $t \in \mathbf{T}$, $\mathbf{T} = \{0,1,2,...\}$. В силу этого, переход микрообъекта из одного района в другой за $q \geq 2$ шага будет образовывать *марковскую цепь*, которая характеризуется уравнением Колмагорова–Чепмена [4]:

$$p_{ij}(t+q) = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}(t) p_{kj}(t+q-1)\,. \tag{3}$$

Поскольку граф **G** – планарный в силу географического характера исходной задачи, то за один шаг из данного района, можно попасть только в соседний район, а в район, непосредственно не примыкающий, – более чем за два шага. Заметим также, что в условиях *модели наблюдения B* возможно измерение корреспонденций только на границах соседних районов. В силу этого уравнение (3) является основным инструментом для оценки транспортных корреспонденций между районами, не являющимися соседними, если удается найти приемлемые статистические оценки для переходных вероятностей для соседних районов.

Для случая модели наблюдений А-В обозначим $n_{ij}(t)$ число пересечений микрообъектами границы районов $e(i,j) \in \mathbf{E}$. Тогда *оценки максимального правдоподобия* (ОМП) для переходных вероятностей есть

$$\hat{p}_{ij}(t) = \frac{n_{ij}(t)}{\sum_{i=1}^{m} n_{ij}}. \tag{4}$$

В [5] показано, что ОМП-оценка для переходных вероятностей состоятельна, эффективна, асимптотически нормальна, но смещена. Свойство состоятельности оценки позволяет утверждать, что с увеличением объема выборки смещение стремится к нулю.

При наличии априорной информации о корреспонденциях $\{a_{ij}\}$ можно получить байесовские оценки для приведенных корреспонденций [4]

$$\hat{p}_{ij}(t) = \frac{n_{ij}(t) + a_{ij}(t) - 1}{\sum_{i=1}^{m} n_{ij} + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} - m}. \tag{5}$$

Эта оценка является модой апостериорной плотности вероятности для приведенных корреспонденций, которая имеет следующий вид [4]:

$$\Pr(P|n) = k \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{m-1} p_{ij}^{n_{ij}+a_{ij}-1} \left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_{ij}\right)^{n_{ij}+a_{ij}-1}. \tag{6}$$

Таким образом, различные оценки матриц приведенных корреспонденций за конечное число шагов для моделей наблюдений А–В могут быть получены на основании (3)–(6).

Рассмотрим ситуацию, когда возможна только модель наблюдения С. Агрегированные статистические данные по перемещениям транспортных средств $n_j = \sum_i n_{ij}$ представляют фактические значения наблюдаемых частот попадания транспортных средств в район с номером *j*. Пусть $y_i(t)$ – наблюдаемые частоты попадания транспортных средств в район *j* в момент времени *t*. Тогда согласно формуле полной вероятности

$$y_j(t) = \sum_i y_i(t-1) p_{ij} + u_j(t). \tag{7}$$

Здесь $u_j(t)$ – ошибка наблюдения, которая компенсирует различие истинной частоты и наблюдаемой попадания. В матричном виде (7) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{p} + \mathbf{u}. \tag{8}$$

Раскрывая структуру данного матричного уравнения, имеем:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \\ \vdots \\ \mathbf{y_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{X_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{p_2} \\ \vdots \\ \mathbf{p_m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u_1} \\ \mathbf{u_2} \\ \vdots \\ \mathbf{u_m} \end{bmatrix}; \tag{9}$$

$$\mathbf{y}_j = \begin{bmatrix} y_j(1) \\ y_j(2) \\ \vdots \\ y_j(r) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \dots & y_m(0) \\ y_1(1) & y_2(1) & \dots & y_m(1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1(r-1) & y_2(r-1) & \dots & y_m(r-1) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{p}'_j = (p_{1j}, p_{2j}, \dots, p_{mj}).$$

Ранг матрицы $\mathbf{X}_j$ равен *m*, $E(u) = 0$, $E(uu') = \sum$, где $\sum$ – некоторая матрица, структура которой отражает требование некоррелированности ошибок наблюдения и равноточности наблюдений.

Оценка параметра $\mathbf{p}$ для (8) будет решением следующей задачи *квадратичного программирования:*

$$\mathbf{p}^* = \arg\min_p (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{p})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{p}), \tag{10}$$

$$\mathbf{G}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\eta}, \tag{11}$$

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0}. \tag{12}$$

Матрица $\mathbf{G}$ размерности $(m \times m^2)$ и вектор $\boldsymbol{\eta}$ размерности $(r \times 1)$ в обобщенном виде задают условие нормировки

$$\sum_j p_{ij} = 1, \forall i = 1, \dots, m.$$

Использование теоремы Куна–Таккера и принципа двойственности Дорна [6] для задач квадратичного программирования (10)–(12), а также введение дополнительных переменных $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta^*)$ позволяет свести (10)–(12) к задаче линейного программирования:

$$\begin{gathered}(\mathbf{p}^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta^*) = \arg\max \quad (\mathbf{X'y}-\mathbf{X'X}\rho)'\mathbf{p}-\lambda_1'\eta+\lambda_2'\eta,\\ \mathbf{Gp}=\eta,\\ \mathbf{G}'\lambda_1-\mathbf{G}'\lambda_2+(\mathbf{X'X})\mathbf{p}-\beta=\mathbf{X'y},\\ \mathbf{p},\lambda_1,\lambda_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta\ge \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{13}$$

Решение (13) не представляет труда и может быть осуществлено каким-либо пакетом математических программ, например MatLab.

3. Пример построения матрицы корреспонденций

Реальная задача построения матрицы корреспонденций при моделировании транспортных потоков в г. Красноярске возникла в связи с необходимостью оценки влияния введения в строй нового моста через р. Енисей. На рис. 1 приведена схема разбиения города на транспортные районы. Выделено 52 транспортных района. Матрица корреспонденций получена на основе гравитационной модели в среде пакета PT VISION, а также с использованием описанных в данной работе методов. Результаты расчетов показали, что статистические методы вполне конкурентны в плане вычислительной сложности, однако полученные статистические выводы относительно оценок корреспонденций можно рассматривать как методологически более обоснованные.

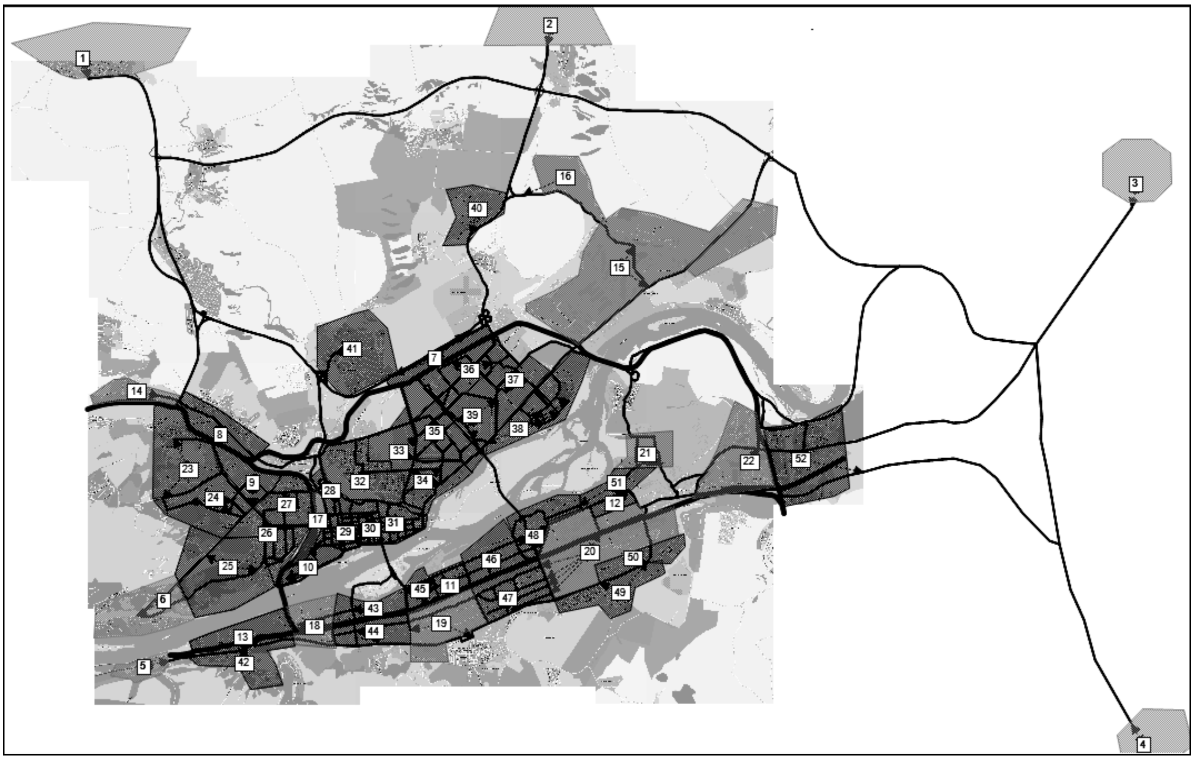

Рис. 1. Выделенные транспортные районы города Красноярска

Заключение

Рассмотренные в данной работе методы, примененные для вычисления транспортных корреспонденций, являются лишь частью арсенала вероятностно-статистических методов, которые заслуживают внимания в данном контексте. За рамками остались модели марковских цепей с непрерывным временем, полумарковские процессы [7], байесовские модели, более полно учитывающие априорную информацию. Представленные выше модели наблюдений А-С также требуют развития в связи с новыми техническими возможностями для измерения корреспонденций. Особого внимания в связи с моделью D заслуживают семантические методы формирования априорной информации на основе разнородных данных социально-экономического характера и их объединения со статистическими данными о транспортных потоках.

Литература

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / А.В. Гасников, С.Л. Кленов и др. – М.: МФТИ, 2010. – 360 с.
2. Хейт Ф. Математическая теория транспортных потоков. – М.: Мир, 1966. – 280 с.
3. Швецов В.И. Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 11. – С. 3–46.
4. Ли Ц. Оценивание параметров марковских процессов по агрегированным временным рядам / Ц. Ли, Д. Джадж, А. Зельнер. – М.: Статистика, 1977. – 221 с.
5. Кендалл М. Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стьюарт. – М.: Наука, 1973. – 566 с.
6. Dorn W.S. Duality in Quadratic Programming // Quarterly of Applied Mathematics. – 1960. – № 18. – P. 155–162.
7. Королюк В.С. Полумарковские процессы и их приложение / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – К.: Наукова думка, 1975. – 182 с.

Хабаров Валерий Иванович
Д-р техн. наук, профессор, чл.-кор. академии высшей школы, декан факультета «Бизнес-информатика», зав. каф. «Информационные технологии на транспорте»
Сибирского государственного университета путей сообщения (СибГУПС), г. Новосибирск
Тел.: (383)328-03-15; +7-913-915-33-46
Эл. почта: khabarov51@mail.ru

Молодцов Дмитрий Олегович
Преподаватель каф. «Информационные технологии на транспорте» СибГУПС
Тел.: +7-923-238-39-89
Эл. почта: molodcovdo@edu.stu.ru

Хомяков Сергей Геннадьевич
Преподаватель каф. «Информационные технологии на транспорте» СибГУПС
Тел.: +7-913-956-05-15
Эл. почта: homyakovsg@edu.stu.ru

Khabarov V.I., Molodtsov D.O., Homyakov S.G.

Model Markov chains for transport correspondence

Questions of an estimation of correspondence for transport models are considered. The short review of existing methods is given. As the alternative approach are suggested to use Markov chains, Bayes estimations and estimations of the maximum probability for matrixes of transitive probabilities on the basis of the aggregated and not aggregated data. Ways of the account of the aprioristic information on transport correspondence are analyzed. Examples of use of the developed methods are resulted. Keywords: transport areas, transport correspondence, Markov chains, an estimation under the aggregated data of matrixes of transitive probabilities.

Keywords: transport areas, transport correspondence, Markov chains, an estimation of correspondence under the aggregated data.