

УДК 004.67

В.А. Толстунов

Нелинейная фильтрация на основе степенного преобразования

Предлагается алгоритм цифрового сглаживающего фильтра со скользящим окном, использующий степенную обработку входных значений сигнала. Предложенный алгоритм исследуется аналитически в случае, когда мешающий шум является суммой гауссовской и импульсной помех. Приведены результаты цифрового моделирования работы данного фильтра при обработке черно-белых изображений.

Ключевые слова: фильтр, мешающий шум, погрешность фильтрации, цифровое моделирование.

Среди широкого класса задач, связанных с цифровой обработкой информационных сигналов, важную роль играют задачи удаления различных шумов, искажающих полезные сигналы при их получении и передачи по каналам связи. Для решения этой задачи широко используются линейные фильтры [1, 2]. Однако линейные алгоритмы фильтрации эффективны в случае, когда мешающий шум является гауссовским и появление шумовых составляющих с другими законами распределения (в частности импульсные помехи) существенно снижает их сглаживающие свойства. В этом отношении нелинейные цифровые фильтры [2–4] имеют определенное преимущество.

В настоящей работе строится алгоритм нелинейного сглаживающего фильтра. При этом задача определения выходного сигнала фильтра рассматривается как статистическая задача оценки неизвестного детерминированного параметра методом наименьших квадратов.

Получение и анализ алгоритма фильтрации. Пусть имеем фильтр со скользящим окном длиной апертуры $n+1$, на вход которого поступают дискретные сигналы $x_i = s_i + n_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, где $s_i = s(t_i)$ – отсчеты полезного детерминированного сигнала, $n_i = n(t_i)$ – отсчеты мешающего шума. По значениям входного сигнала из апертуры $\{x_{k-n/2}, \dots, x_k, \dots, x_{k+n/2}\}$ будем определять значение выхода фильтра y_k , соответствующего отсчету x_k . Полагаем, что в пределах апертуры фильтра значения полезного сигнала практически одинаковы. Тогда

$$x_i = s_k + n_i, \quad i \in [k-n/2, \dots, k+n/2].$$

Отсчеты входного сигнала x_i , $i \in [k-n/2, \dots, k+n/2]$ будем рассматривать как выборку из распределения, задаваемого мешающим шумом, отсчет полезного сигнала s_k считаем неизвестным параметром этого распределения. Оценку \hat{s}_k сигнала s_k интерпретируем как выход y_k искомого фильтра $y_k = \hat{s}_k$.

В общем случае качество фильтрации будем характеризовать соотношением

$$R_k = L(f(x_{k-n/2}), \dots, f(x_k), \dots, f(x_{k+n/2}), f(y_k)). \quad (1)$$

Здесь $f(x)$ – монотонная, однозначная, дифференцируемая функция, L – некоторое расстояние между значениями $f(x_i)$, $i \in [k-n/2, \dots, k+n/2]$ и точкой $f(y_k)$. Величину $f(y_k)$ будем выбирать таким образом, чтобы данное расстояние было минимальным.

В качестве расстояния L возьмем [4] сумму квадратов отклонений $f(x_i)$ от $f(y_k)$. Тогда

$$R_k = \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} (f(x_i) - f(y_k))^2.$$

Решая уравнение

$$\frac{\partial R_k}{\partial y_k} = 0,$$

будем иметь

$$y_k = f^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} f(x_i) \right). \quad (2)$$

Алгоритм (2) позволяет построить целое семейство сглаживающих фильтров.

В частности, при $f(x) \equiv x$ из (2) получаем классический линейный фильтр выборочного усреднения.

Если $f(x_i) = x_i \exp \left\{ -\frac{1}{n}(k-i) \right\}$, то из (2)

$$y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} x_i e^{-\frac{k-i}{n}} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} x_i e^{-\frac{k-i}{n}}. \quad (3)$$

При $n \gg 1$ (3) можно представить в виде рекуррентной формулы

$$y_k = y_{k-1} + \alpha(x_{k+n/2} - y_{k-1}), \quad \alpha = \text{const}. \quad (4)$$

Данное соотношение представляет собой хорошо известный фильтр экспоненциального сглаживания.

Выберем в (1) в качестве расстояния L сумму абсолютных величин отклонений $f(x_i)$ от $f(y_k)$. Тогда

$$R_k = \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} |f(x_i) - f(y_k)|.$$

В последнем соотношении перенумеруем слагаемые так, чтобы

$$f(x_{k-n/2}) \leq \dots \leq f(x_k) \leq \dots \leq f(x_{k+n/2}). \quad (5)$$

Тогда

$$R_k = \sum_{i=k-n/2}^{k-1} |f(x_i) - f(y_k)| + \sum_{i=k+1}^{k+n/2} |f(x_i) - f(y_k)| + |f(x_k) - f(y_k)|.$$

Очевидно, что минимум расстояния R_k по $f(y_k)$ достигается при

$$f(y_k) = f(x_k). \quad (6)$$

Так как $f(x)$ по предположению монотонна, однозначна, то из (5)

$$x_{k-n/2} \leq \dots \leq x_k \leq \dots \leq x_{k+n/2}$$

и из (6)

$$y_k = x_k = \text{med}(x_{k-n/2}, \dots, x_k, \dots, x_{k+n/2}). \quad (7)$$

В результате приходим к широко известному в теории и практике нелинейному медианному фильтру [3].

Вернемся к соотношению (2) и выберем для $f(x)$ степенную зависимость вида

$$f(x) = \frac{1}{x^m}, \quad m > 0.$$

Тогда из (2) для выхода фильтра будем иметь

$$y_k = \left(\frac{n+1}{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} \frac{1}{x_i^m}} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (8)$$

Рассмотрим свойства этого фильтра в случае, когда мешающий шум $n(t)$ является аддитивной смесью независимых стационарной гауссовской $\xi(t)$ и импульсной $\eta(t)$ помех. При этом полагаем, что $\xi(t)$ имеет нулевое среднее значение и дисперсию σ^2 , а $\eta(t)$ принимает два значения: 0, $A > 0$ с вероятностями соответственно p , $q = 1 - p$.

Используя известную формулу полной вероятности [5], для плотности распределения входного сигнала x_i при сделанных предположениях относительно модели входного сигнала можно получить

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left(p \exp\left\{-\frac{(x-s_i)^2}{2\sigma^2}\right\} + q \exp\left\{-\frac{(x-s_i-A)^2}{2\sigma^2}\right\} \right), \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (9)$$

Согласно центральной предельной теореме теории вероятностей [5], будем считать, что при $n \gg 1$ случайная величина

$$Z_k = \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} \frac{1}{x_i^m} \quad (10)$$

из (8) распределена по нормальному закону с параметрами $M(Z_k) = m_k, D(Z_k) = \sigma_k^2$.

Используя (9), при условии слабого гауссовского шума, когда $\frac{s_i}{\sigma} \gg 1$, можно получить

$$m_k = (n+1) \left(\frac{p}{s_k^m} + \frac{q}{(s_k+A)^m} \right), \quad (11)$$

$$\sigma_k^2 = (n+1) pq \left(\frac{1}{s_k^m} - \frac{1}{(s_k+A)^m} \right)^2. \quad (12)$$

Зная теперь плотность вероятностей и числовые характеристики (11), (12), величины Z_k , можно по известным соотношениям [5] найти плотность вероятностей выходного сигнала фильтра (8):

$$p_1(x) = \frac{m(n+1)}{\sqrt{2\pi\sigma_k} x^{m+1}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2} \left(\frac{n+1}{x^m} - m_k \right)^2\right\}, \quad x > 0. \quad (13)$$

Используя распределение (13), при $h_k = \frac{A}{s_k} \gg 1$ можно найти математическое ожидание и дисперсию выхода фильтра (8):

$$M(y_k) = \frac{s_k}{\sqrt[m]{p + \frac{1}{h_k^m}}} \left[1 + \frac{m+1}{2m^2} \frac{pq}{(n+1) \left(p + \frac{1}{h_k^m} \right)^2} \right]. \quad (14)$$

$$D(y_k) = \frac{s_k^2}{m^2} \frac{pq h_k^2}{(n+1) \left(p + \frac{1}{h_k^m} \right)^{\frac{2}{m} + 2}}. \quad (15)$$

Из (14) следует, что выбранной модели входного сигнала $M(y_k) \geq s_k$. Так как в (14) при $p \neq 0$ имеют место соотношения

$$\sqrt[m]{p + \frac{1}{h_k^m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1, \quad 1 + \frac{m+1}{2m^2} \frac{pq}{(n+1) \left(p + \frac{1}{h_k^m} \right)^2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1,$$

то очевидно $M(y_k) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} s_k$. Последнее означает, что если импульсным шумом искажаются не все отсчеты полезного сигнала, то преобразованием (8) полезный сигнал s_k можно восстановить за счет увеличения параметра нелинейности m .

Из (15) видно также, что с увеличением параметра m уменьшается дисперсия сигнала на выходе фильтра.

Алгоритм (8) можно обобщить на случай фильтрации двумерных сигналов.

Пусть y_{kl} – значение выхода фильтра, которое соответствует входному сигналу x_{kl} . Апертуру фильтра выберем в виде квадрата с длиной стороны $n+1$. Тогда согласно (8) будем иметь

$$y_{kl} = \left(\frac{(n+1)^2}{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} \sum_{j=l-n/2}^{l+n/2} \frac{1}{x_{ij}^m}} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (16)$$

Моделирование. Фильтр (16) был промоделирован численно для обработки как черно-белых, так и цветных изображений. Для этого на тестовое изображение «Lenna» [6] наносились аддитивно смоделированные численно гауссовский и импульсный шумы. При этом гауссовский шум имел нулевое математическое ожидание и изменяемую дисперсию σ^2 , а импульсный шум мог принимать только два значения 0, A с вероятностями соответственно p , $q=1-p$.

Результат фильтрации характеризовался среднеквадратичной погрешностью

$$R = \frac{1}{NM} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M \left(\frac{y_{kl} - s_{kl}}{s_{kl}} \right)^2,$$

где $N \times M$ – размер изображения, s_{kl} , y_{kl} – значения пикселей соответственно тестового и профильтрованного изображений.

Работа фильтра (16) сравнивалась с работой широко известных алгоритмов: медианный фильтр [3], фильтр Винера [2], гауссовский фильтр низких частот (ГФНЧ) [1]. Результаты работы данных алгоритмов показаны в таблице, где приведены погрешности фильтрации R .

Так как линейный фильтр Винера плохо удаляет импульсный шум, то в таблице для этого фильтра даны только результаты фильтрации гауссовского шума. Последний столбец в таблице показывает среднеквадратичное отклонение зашумленного изображения от исходного.

Погрешности фильтрации изображения «Lenna»

Гауссовский шум с дисперсией 20	Апертура	Медианный фильтр	Фильтр Винера	Гармонический фильтр при $m = 100$	Параметр ГФНЧ	ГФНЧ	Без фильтрации
	3	0,013	0,011	0,009	75	0,023	0,05
	5	0,012	0,01	0,012	100	0,02	
	7	0,016	0,012	0,018	150	0,19	
					200	0,023	
Импульсный шум с вероятностью появления 0,2 и амплитудой 255	3	0,1		0,008	50	0,101	0,852
	5	0,021		0,014	30	0,06	
	7	0,03		0,02	10	0,088	

Как следует из приведенных данных, в случае гауссовского шума практически одинаковые результаты дают все сравниваемые алгоритмы. В случае импульсного шума лучшие результаты дают медианный фильтр и фильтр со степенным преобразованием. Для них при слабой интенсивности импульсного шума погрешности фильтрации близки, а с ростом вероятности появления импульсного шума лучшими сглаживающими свойствами обладает фильтр со степенным преобразованием.

На рис. 1 для изображения «Lenna» показаны результаты зашумления и последующей фильтрации различными алгоритмами. Здесь a – изображение «Lenna» с импульсным шумом ($p=0,2$); b – результат обработки медианным фильтром; $в$ – результат обработки ГФНЧ; $г$ – результат обработки исследуемым фильтром.

На рис. 2, 3 показаны исходный сигнал с «естественным» шумом и результат обработки этого сигнала фильтром (16).



Рис. 1. Зашумленное и профильтрованные изображения «Lenna»

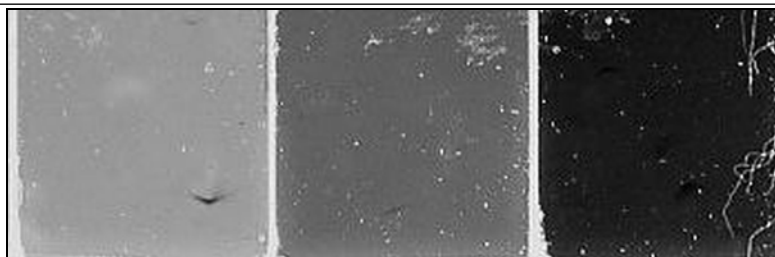


Рис. 2. Изображения с «естественным» шумом

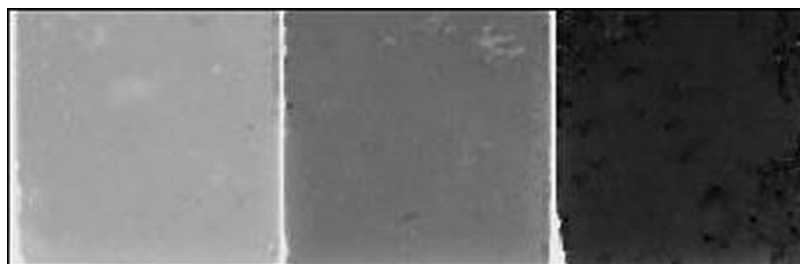


Рис. 3. Результат фильтрации изображений на рис. 2 фильтром (16)

Заключение. Таким образом, использованный в работе подход к построению цифрового фильтра позволил получить алгоритм, сглаживающие свойства которого не хуже, а при интенсивном импульсном шуме лучше свойств ряда широко известных фильтров.

Литература

1. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.
2. Цифровая обработка изображений в информационных системах: учеб. пособие / И.С. Грузман, В.С. Киричук, В.П. Косых и др. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. – 168 с.
3. Хуанг Т. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений. – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.
4. Толстунов В.А. Нелинейный усредняющий фильтр с экспоненциальным преобразованием / В.А. Толстунов, П.В. Степанец // Доклады ТУСУРа. – 2009. – Т. 2(20). – С. 43–47.
5. Боровков А.А. Теория вероятностей / А.А. Боровков. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
6. PicLab – Picture Laboratory [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.piclab.ru>, свободный (дата обращения: 24.04.2012).

Толстунов Владимир Андреевич

Канд. техн. наук, доцент каф. автоматизации исследований и технической кибернетики
Кемеровского госуниверситета
Тел.: (384-2) 54-25-09
Эл. почта: vat@bk.ru

Tolstunov V.A.

Nonlinear filtering on the base of degree transformation

It is offered algorithm digital smoothing filter with slithering window, using degree processing of input values of the signal. The offered algorithm is researched analytically when disturbing noise is an amount of the normal end pulsed components. The results of digital modeling of the given filter are shown when processing the monochrome images.

Keywords: filter, disturbing noise, inaccuracy of filtering, digital modeling.