УДК 004.451.46:005

Ю.П. Ехлаков, В.Ф. Тарасенко, О.И. Жуковский, П.В. Сенченко, Ю.Б. Гриценко

Цветные сети Петри в моделировании социально-экономических систем

Сети Петри как средство моделирования динамических систем позволяют визуально фиксировать текущее состояние моделируемых систем. Предложены алгоритмы анализа цветных сетей Петри, основанные на сохраняющем язык сети преобразовании цветных сетей в классические. Предложенные алгоритмы применены для построения конкретных вариантов управляющих структур. Рассмотрены преимущества цветных сетей Петри для моделирования и изучения структурных и динамических свойств социально-экономических систем.

Ключевые слова: моделирование, социально-экономические системы, сети Петри, динамические модели, бизнес-процесс.

При моделировании структур социально-экономических систем необходимо рассматривать не только собственно структуры управления, но и особенности их динамических свойств. В качестве одного из часто используемых вариантов динамических моделей применяются сети Петри. Классические или обычные сети Петри хорошо моделируют простые системы. Для увеличения мощности моделирования часто используют расширения и модификации известных общепринятых вариантов сетей Петри (СП), например, раскрашенные, цветные сети Петри (ЦСП), Е-сети и др.

При моделировании управленческих структур социально-экономических процессов для описания их динамических свойств и фиксации переходов из одних состояний в другие предлагается использовать вариант ЦСП, позволяющий представлять в графическом виде важную содержательную информацию и имеющий преимущества, по сравнению с другими вариантами ЦСП, раскрашенными сетями Петри, описанными в [1], где содержательная часть модели вынесена в специальные таблицы.

К социально-экономическим системам относятся бизнес-процессы [2]. Для полного описания и изменения таких систем необходимо построить множество моделей с использованием разных профессиональных языков моделирования. Одним из таких языков является язык сетей Петри, позволяющий строить динамические модели систем.

В работе рассмотрены преобразования ЦСП, сохраняющие их язык (динамические особенности). В процессе преобразования может быть существенно упрощена структура сети при сохранении в ЦСП-моделях бизнес-процессов содержательной информации.

1. Вариант цветных сетей Петри. При моделировании структур управления таких объектов, как, например, бизнес-процессы [3], с помощью сетей Петри в модель приходится вводить места [1] (позиции [4]), которые не являются образами элементов процесса, а служат для упорядочения запусков переходов сети. Таким образом, формально одинаковые элементы модели несут различную смысловую нагрузку, что требует дополнительного словесного описания, усложняет пространственную структуру модели, затрудняет ее интерпретацию. Ниже вводится понятие обобщенных сетей Петри, которые позволяют упрощать пространственную структуру модели. Сделаем это на основе нескольких определений, придерживаясь терминологии, используемой в [4].

Определение 1. Помеченная (цветная) сеть Петри (ЦСП) C является четверкой:

$$C=(P,T,I,O), \tag{1}$$

где $P=\{p_1,p_2,\dots,p_N\}$ – конечное множество позиций, $N\ge 0$; $T=\{t_1,t_2,\dots,t_M\}$ – конечное множество переходов, $M\ge 0$; $P\bigcap T=\varnothing$; $I:T\to P^{\infty}$ – входная функция-отображение множества переходов в помеченные комплекты позиций $I=(I_1,I_2,\dots,I_L)$; $O:T\to P^{\infty}$ – выходная функция-отображение множества переходов в помеченные комплекты позиций; $O=(O_1,O_2,\dots,O_L)$, $L=|D|$; $D=\{d_1,d_2,\dots,d_L\}$ – множество пометок (цветов).

В случае $|D|=1$ имеем определение сетей Петри согласно [4]. Мощность множества P есть число N, а мощность множества T есть число M. Произвольный элемент T обозначается символом t_j, а произвольный элемент $P - p_i, i = \overline{1,N}$. Позиция p_i является входной позицией перехода t_j в том случае, если $\exists l : l = \overline{1,L}$ такое, что $p_i \in I_l(t_j)$. Позиция p_i является выходной позицией перехода t_j, если $\exists l : l = \overline{1,L}$ такое, что $p_i \in O_l(t_j)$. Входы и выходы переходов представляют собой совокупность помеченных позиций.

Кратность входной позиции $p_i \in I_l(t_j)$ из *l*-го комплекта позиций $(P^\infty)^l$ для перехода t_j есть число появлений позиции в данном входном комплекте перехода и обозначается $\#(p_i, I^l(t_j))$. Аналогично $\#(p_i, O^l(t_j))$ – кратность выходной позиции в *l*-м комплекте.

Для иллюстрации помеченных сетей Петри удобно графическое представление.

Определение 2. Граф *G* помеченной сети Петри есть двудольный ориентированный мультиграф

$$G = (V, A), \tag{2}$$

где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_S\}$ – множество вершин, $S = |V|$; $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ – множество помеченных направленных дуг; $r = |A|$, $a_i = (v_j, v_k, d_e)$, где v_j, $v_k \in V$, $d_e \in D$, $D = (d_1, d_2, \ldots, d_L)$ – множество пометок, $L = |D|$.

Множество *V* может быть разбито на два непересекающихся подмножества *P* и *T*, таких, что $V = P \cup T$, $P \cap T = \varnothing$, и для каждой направленной помеченной дуги $a_i \in A$ справедливо утверждение: если $a_i = (v_j, v_k, d_e)$, тогда либо $v_j \in P$ и $v_k \in T$, либо $v_j \in T$ и $v_k \in P$.

Маркировка μ есть присвоение (установление принадлежности) помеченных фишек позициями сети Петри. Количество, положение и пометка (цвета) фишек меняются при выполнении сети Петри. Фишки используются для управления выполнением сети Петри.

Определение 3. Маркировка μ помеченной сети Петри $C = (P, T, I, O)$ есть функция, отображающая множество позиций в множество векторов с неотрицательными целыми компонентами.

Определение 4. Маркировка μ есть матрица размерности

$$N \times L : \mu = \{\mu_{il}\},$$

где $N = |P|$ и каждое μ_{il} принадлежит множеству неотрицательных целых чисел, $i = \overline{1,N}$, $l = \overline{1,L}$.

Определение 5. Маркированная помеченная сеть Петри $M = (C, \mu)$ есть совокупность структуры помеченной сети Петри $C = (P, T, I, O)$ и маркировки μ и может быть записана в виде $M = (P, T, I, O, \mu)$.

Выполнение помеченной сети Петри осуществляется с учетом количества, пометок и распределения фишек в сети. Сеть Петри выполняется посредством запусков переходов. Переход запускается удалением фишек из его входных позиций и образованием новых фишек, помещаемых в его выходные позиции. Переход может запускаться только в том случае, когда он разрешен.

Определение 6. Переход $t_j \in T$ в маркированной помеченной (цветной) сети Петри $M = (P, T, I, O, \mu)$ с маркировкой $\mu = \{\mu_{il}\}$ является разрешенным, если $\forall p_i \in I^l(t_j)$ выполняется условие

$$\mu_{il} \ge \#(p_i, I^L(t_j)), \quad l = \overline{1,L}.$$

Переход запускается удалением разрешающих фишек из его входных позиций и последующим помещением в каждую выходную позицию по одной фишке для каждой дуги. Запуск перехода меняет маркировку μ сети Петри на новую маркировку μ'. Если какая-либо входная позиция перехода не обладает достаточным количеством фишек с нужной пометкой, то переход не разрешен и не может быть запущен.

Переход t_j в маркированной помеченной сети Петри с маркировкой $\mu = \{\mu_{il}\}$ может быть запущен всякий раз, когда он разрешен. В результате запуска разрешенного перехода t_j образуется новая маркировка $\mu' = \{\mu'_{il}\}$, определяемая соотношением

$$\mu'_{il} = \mu_{il} - \#\left(p_i, I^l(t_j)\right) + \#\left(p_i, O^l(t_j)\right), \quad l = \overline{1, L}. \tag{3}$$

При раскрытии понятия языков сетей Петри в [4] уже использовался термин «помеченные» сети Петри. Этот термин относится к переходам. Во избежание путаницы в понятиях «помеченные переходы» и «помеченные фишки» далее будем говорить о раскраске дуг и фишек. Для иллюстрации цветных сетей Петри удобно использовать цветные дуги и фишки.

Образно говоря, цветные дуги, идущие в переход, определяют требования к «цветам» соответствующих разрешающих фишек во входных позициях, а выходные дуги перехода являются «красителями» фишек, которые должны появиться в выходных позициях перехода после его запуска, если переход разрешен. Переход является разрешенным, если комплектность и цвета фишек во входных позициях перехода соответствуют комплектности и цветам входящих в переход дуг.

Рассмотрим простой пример применения цветных сетей Петри для оптимизации структуры модели (рис. 1), когда условия задачи требуют введения избыточных элементов в СП-модели.

На рис. 1, *а* запуск перехода t_3 возможен в случае наличия в позиции P двух фишек, которые могут появиться в позиции P в результате одной из следующих подпоследовательностей запусков переходов: t_1t_1; t_2t_2; t_1t_2; t_2t_1.

На рис. 1 позиция P обозначает некоторый моделируемый объект. Требование запуска перехода t_3 в случае варианта t_1t_2 или t_2t_1 может быть представлено моделями на рис. 1, *б* и *в*. При этом в случае, изображенном на рис. 1, *б*, невозможно представить моделируемый объект одной позицией, и нам необходимо интерпретировать различные позиции P_1 и P_2 как отвечающие одному и тому же объекту. Случай, представленный на рис. 1, *в*, требует введения в модель вспомогательных позиций P_1' и P_2'. При этом оказывается, что формально одинаковые элементы модели (позиции) получают различную интерпретацию.

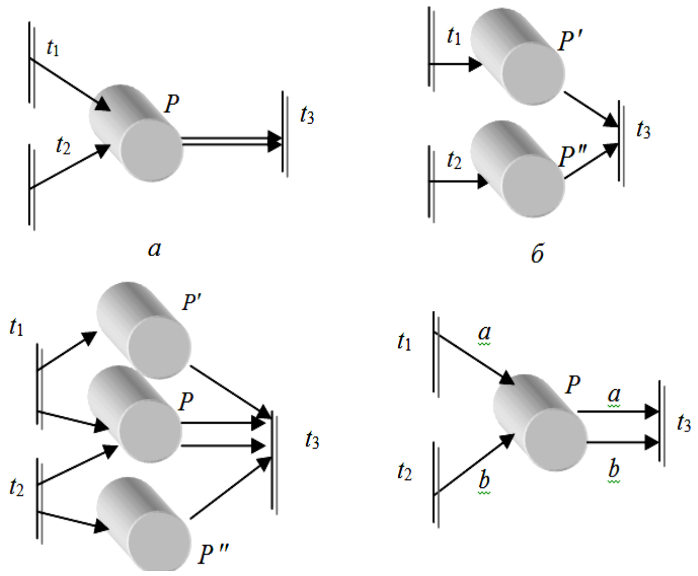

Рис. 1. Моделирование простой ситуации запуска перехода: *а* – без учета предыстории запусков переходов (СП-модель с одной позицией); *б* – с учетом предыстории запусков переходов (СП-модель с двумя позициями); *в* – с учетом предыстории запусков переходов (СП-модель с тремя позициями); *г* – с учетом предыстории запусков переходов (ЦСП-модель)

Ситуация изменяется при использовании ЦСП-модели. В этом случае условия задачи полностью обеспечиваются средствами самой модели без дополнительного описания (рис. 1, *г*). Этими средствами являются цвет a и цвет b.

Таким образом, на данном этапе можно заключить, что применение ЦСП при моделировании систем позволяет, по крайней мере, в некоторых случаях упрощать пространственную структуру ЦСП-моделей и уменьшать затраты на их интерпретацию вне самой модели.

Другими словами, ЦСП обладают по терминологии [5] большей выразительной мощностью. Далее покажем, что цветные сети Петри обладают рядом свойств, заслуживающих специального рассмотрения.

2. Свойства цветных сетей Петри и методы анализа

2.1. Основные свойства цветных сетей Петри

Выше рассмотрено определение ЦСП, основанное на введении многомерных функций-отображений I и O множества переходов T в комплекты P^{∞} позиций. При моделировании реальных процессов от СП-моделей в большинстве случаев требуется обеспечение одного из трех свойств – безопасности, ограниченности и сохранения – или их сочетания. Рассмотрим аналогичные свойства у ЦСП.

Определение 7. Для цветной сети Петри $C=(P,T,I,O)$ с начальной маркировкой μ_0 позицию $p_j \in P$ назовем безопасной относительно цвета l $(l=\overline{1,L})$, если для любой маркировки μ', достижимой из μ_0, выполняется $\mu'^l(p_i)=1$.

Определение 8. ЦСП $M=(C,\mu_0)$ является безопасной относительно цвета l $(l=\overline{1,L})$, если безопасной относительно цвета l является каждая ее позиция $p_i \in P$. Таким образом, ЦСП может являться безопасной относительно одного или нескольких цветов, но не обязательно относительно всех, что дает новые возможности при интерпретации и реализации моделей реальных систем.

Определение 9. Для ЦСП $M=(C,\mu_0)$ позицию $p_i \in P$ назовем K-безопасной относительно цвета l, если для любой маркировки μ', достижимой из μ_0, выполняется $\mu'^l(p_i)=K$. Если при этом $K' \geq K$, то позиция $p_i \in P$ является также и K'-безопасной.

Определение 10. ЦСП $M=(C,\mu_0)$ является K-безопасной относительно цвета l, если K-безопасной относительно цвета l является каждая ее позиция $p_i \in P$.

K-безопасную относительно цвета l ЦСП назовем также ограниченной относительно этого же цвета.

Определение 11. Сеть Петри $M=(C,\mu_0)$ назовем сохраняющей относительно цвета l, если для любой достижимой из μ_0 маркировки μ', выполняется $\sum\limits_{p_i \in P} \mu'^l(p_i)=\sum\limits_{p_i \in P} \mu'(p_i)$.

Для выполнения этого условия достаточно и необходимо, чтобы $\forall t_j \in T$, который может быть запущен хотя бы один раз, выполнялось

$$\sum_{p_i \in P} \#\left(p_i, I^l(t_j)\right)=\sum_{p_i \in P} \#\left(p_i, O^l(t_j)\right), \tag{4}$$

т.е. количество входных и выходных позиций из комплектов, соответствующих цвету l, для перехода t_j должно быть равно. Иначе количество фишек данного цвета вследствие запуска перехода t_j изменилось бы.

Определение 12. ЦСП $M=(C,\mu_0)$ является безопасной, если она безопасна относительно всех l ($l=\overline{1,l}$, $L=|D|$, D – множество цветов или размерность функций I и O). ЦСП $M=(C,\mu_0)$ является ограниченной, если она ограничена относительно всех l. ЦСП $M=(C,\mu_0)$ является сохраняющей, если она сохраняющая относительно всех l.

ЦСП может являться ограниченной и сохраняющей необязательно для всех цветов. Таким образом, появляется возможность строить модели процессов, которым присуще свойство сохранения, отделяя при этом компоненты модели процесса от компонентов, влияющих на ход процесса, но не обязательно обладающих свойством сохранения. Это повышает степень наглядности и соответствия моделей реальным процессам, что доказывает актуальность исследования данного класса ЦСП.

Представляется необходимым подчеркнуть тот факт, что свойства безопасности, ограниченности, сохраняемости ЦСП существенным образом зависят от начальной маркировки μ_0, т. е. при некоторой начальной маркировке $\mu_1=\mu_0$ свойства одной и той же ЦСП-модели могут существенно различаться. Поэтому выше, при рассмотрении свойства сохраняемости относительно какого-либо цвета, утверждается, что условие (4) должно выполняться для таких переходов t, которые могут быть запущены хотя бы один раз при начальной маркировке μ_0. При этом могут существовать переходы t, которые не удовлетворяют условию (4) и не могут быть запущенными ни разу при данной начальной маркировке μ_0. Тем не менее такая маркированная ЦСП будет обладать свойством сохранения относительно рассматриваемого цвета. Поэтому если не ограничивать «активность» перехода t, то (4) является достаточным, но не необходимым условием сохраняемости.

Ценными для анализа ЦСП-моделей могут оказаться свойства «активности» переходов. Для СП-моделей определяются пять уровней активности перехода (0÷4) в зависимости от возможного числа запусков перехода: может ли переход быть запущен вообще (уровень 0); может ли переход быть запущен хотя бы один раз (уровень 1), может ли он быть запущен заданное число раз (уровень 2), может ли он быть запущен бесконечное число раз (уровень 3), может ли он быть запущен бесконечное число раз в любой момент (уровень 4). Мы здесь не приводим точных формулировок этих уровней активности переходов ЦСП, поскольку, как показано далее в п. 2.2, любой ЦСП-модели можно поставить в соответствие единственную СП-модель, более сложную по пространственной структуре элементов, чем ЦСП-модели, но с эквивалентным множеством переходов (заметим, что обратное утверждение единственности соответствующей ЦСП-модели неверно (см. далее в п. 2.3). Поэтому отличие в формулировках будет заключаться лишь в размерности функции μ. По этой же причине здесь не рассматриваются вопросы, связанные с языками ЦСП (язык для СП и ЦСП определяется как множество допустимых последовательностей запусков переходов), поскольку соответствующие друг другу ЦСП-модель и СП-модель эквивалентны в смысле языка, что является следствием, в частности, эквивалентности множеств переходов этих моделей. Все проблемы языков СП относятся и к языкам ЦСП. Свойства активности переходов и языка ЦСП также существенным образом зависят от начальной маркировки μ_0.

Из сказанного следует, что задачи анализа ЦСП можно решать по следующей схеме:

1) построение ЦСП-модели реального процесса (предполагается, что такая модель в ряде случаев более наглядна и адекватна, чем СП-модель);

2) преобразование ЦСП-модели однозначным образом в СП-модель в соответствии с алгоритмом, представленном в п. 2.2;

3) анализ полученной СП-модели известными для сетей Петри способами.

Однако можно путем введения ограничений на класс используемых ЦСП-моделей пытаться решить задачи анализа непосредственно в терминах ЦСП.

2.2. *Метод перехода от цветных сетей Петри к обычным сетям*

Пусть цветная сеть Петри представлена четверкой $C=(P,T,I,O)$ [см. (1)].

Метод перехода от ЦСП к обычным СП, описанный ниже, представляет собой итерационный процесс, применяемый последовательно к каждой из позиций $p\in P$, и состоит в поэтапном формировании множества P^{∇} и описании входной I^{∇} и выходной O^{∇} функций соответствующей СП, которую определим как

$$C^{\nabla}=\left(P^{\nabla},T^{\nabla},I^{\nabla},O^{\nabla}\right),$$

где T^{∇} – множество переходов для C^{∇}, совпадающее с множеством переходов для C, т.е. $T^{\nabla} = T$. Состояние множества P^{∇} на i-м шаге будет обозначать $P^{\nabla}[i]$. Описание входной функции I^{∇} для перехода t будем обозначать $I^{\nabla}[i](t)$, описание входной функции O^{∇} для перехода t будем обозначать $O^{\nabla}[i](t)$. Опишем процесс в виде последовательности шагов.

Шаг 0. Пусть $i = 0$; $P^{\nabla}[i] = \varnothing$; $I^{\nabla}[i](t) = \varnothing$, $O^{\nabla}[i](t) = \varnothing$, $\forall t \in T^{\nabla}$.

Шаг 1. Пусть $i := i + 1$, если $i > N$, то перейти к шагу 4.

Шаг 2. Пусть $t_{j1},t_{j2},\ldots,t_{jk},\ldots,t_{jm}$ – множество переходов, для которых позиция $p_i\in I^l(t_{ik})$ или $p_i\in O^l(t_{ik})$, т.е. позиция p_i является входной или выходной, где $m\le M<\infty$, $k=\overline{1,m}, l=\overline{1,m}.$

Пусть

$$k_i=\sum_{l=1}^{L}\sigma_l(p_i),$$

где $\sigma_l(p_i)=\begin{cases}1, \text{если } \exists l, \text{такое, что } p_i\in I^l(t_{jk}),\\ 0, \text{в противном случае.}\end{cases}$.

Другими словами, k_i есть число цветов дуг, входящих и выходящих в позицию p_i. Тогда $P^{\nabla}[i]=\left(\bigcup_{j=1}^{k_i} p_{ij}\right)\bigcup P^{\nabla}[i-1]$, где позиция p_{ij} добавляется к множеству P^{∇} на i-й итерации. Таких добавляемых позиций всего k_i. Индекс j соответствует некоторому цвету, но не совпадает с ним, если $k_i\ne 1$. Если p_i содержит некоторое число фишек какого-либо цвета, т.е. $\mu_l=n\ne 0$, то в соответствующей позиции p_{ij} помещается такое же число обычных фишек, что можно записать следующим образом:

$$\mu^{\nabla}(p_{ij}) = n;$$

$$I^{\nabla}[i](t_j) = \left(\bigcup_{l=1}^{L} I^l(t_{ij})\right) \bigcup I^{\nabla}[i-1](t_{ij}); \quad O^{\nabla}[i](t_j) = \left(\bigcup_{l=1}^{L} O^l(t_{ij})\right) \bigcup O^{\nabla}[i-1](t_{ij}).$$

Эта процедура применяется ко всем переходам t_{jl}, для которых $p_i \in I^l(t_{ijl})$ или $p_i \in O^l(t_{ijl})$.

Шаг 3. Перейти к шагу 1.

Шаг 4. В результате имеем

$$\left(P^{\nabla}[N], T, I^{\nabla}[N], O^{\nabla}[N]\right) = \left(P^{\nabla}, T^{\nabla}, I^{\nabla}, O^{\nabla}\right) = C^{\nabla},$$

где C^{∇} является обычной СП, $\left|P^{\nabla}\right| = \sum_{i=1}^{N} k_i$, $\left|T^{\nabla}\right| = M$,

$$\left|I^{\nabla}(t_j)\right| = \sum_{l=1}^{L} \left|I^l(t_j)\right|, \ \forall t_j \in T \text{ и } \left|O^{\nabla}(t_j)\right| = \sum_{l=1}^{L} \left|O^l(t_j)\right|, \ \forall t_j \in T^{\nabla}. \quad (5)$$

Данный метод может применяться как к маркированным, так и к немаркированным ЦСП. Простейшим примером применения метода являются ЦСП, представленные на рис. 1, *г*, и *б*.

Покажем эквивалентность в смысле языка ЦСП C и СП C^{∇}, так как именно это обстоятельство дает возможность исследовать динамические свойства C^{∇} и распространять результаты этого исследования на C.

Определение 13. Элементарной подсетью

$$C_i = \left(p_i, \left\{t_j / t_j \in I^l(p_i) \vee t_j \in O^l(p_i)\right\}, I, O\right)$$

цветной сети Петри $C = (P, T, I, O)$ называется совокупность любой позиции $p_i \in P$ сети, всех ее входных и выходных переходов, т.е. переходов, отвечающих условиям $t_j \in I^l(p_i)$ и $t_j \in O^l(p_i)$, и входных I и выходных O функций этих переходов.

Вся сеть состоит из элементарных подсетей, таких, что $\bigcup p_i = P$, $\bigcap p_i = \varnothing$.

Алгоритм дераскраски применяется последовательно к каждой позиции, т.е. к каждой элементарной подсети C_i. Элементарная подсеть C_i имеет свой язык $\alpha(C_i)$. Очевидно, что если после дераскраски язык элементарной подсети сохраняется, то сохраняется и язык всей сети.

Теорема 1. Дераскраска элементарной подсети ЦСП C_i не изменяет язык подсети.

Доказательство теоремы 1.

Пусть C_i – элементарная подсеть с языком $\alpha(C_i)$. Применение алгоритма дераскраски дает элементарную подсеть C_i^{∇} с языком $\alpha(C_i^{\nabla})$. Необходимо показать, что $\alpha(C_i) = \alpha(C_i^{\nabla})$.

Множество допустимых последовательностей запусков переходов (язык) определяется условиями срабатывания каждого перехода или условиями разрешенности запуска перехода. Дераскраска сохраняет множество переходов элементарной подсети. На активность входных переходов $t_j \in I^l(p_i)$ позиции p_i элементарной подсети дераскраска элементарной подсети не влияет, так как разрешенность таких переходов определяется внешними условиями. Таким образом, остается показать, что дераскраска элементарной подсети не влияет на разрешенность выходных переходов $t_j \in O^l(p_i)$ позиции p_i.

Разрешенность перехода определяется его входной функцией. В соответствии со вторым шагом алгоритма дераскраски входная функция любого перехода t_i элементарной подсети определяется как

$$I^{\nabla}(t_j) = \left(\bigcup_{l=1}^{L} I^l(t_j)\right).$$

При этом сохраняется общее число фишек, требуемых для срабатывания перехода, и дуг, входящих в переход:

$$\left|I^{\nabla}(t_j)\right| = \sum_{l=1}^{L}\left|I^{l}(t_j)\right|, \ \forall t_j \in O^{l}(p_j); \qquad \left|\mu^{\nabla}(p_i)\right| = \sum_{l=1}^{L}\left|(\mu^{l} p_i)\right|,$$

т.е. условия срабатывания перехода t_i при применении алгоритма дераскраски не изменяются, т.е. не изменяется язык α сети Петри: $\alpha(C_i) = \alpha(C_i^{\nabla})$.

Для всей сети в целом можно записать, что $\alpha(C) = \alpha\big(f(C)\big)$, где α – язык сети Петри; C – ЦСП; f – алгоритм дераскраски.

Таким образом, применение преобразования f к ЦСП позволяет при абстрагировании от конкретной интерпретации ЦСП осуществлять анализ СП $f(C)$ известными методами. При этом если C обладает свойствами частичной безопасности, ограниченности, сохранения относительно некоторого множества цветов, то $f(C)$ может не обладать аналогичными свойствами для СП.

2.3. Метод перехода от обычных сетей Петри к цветным сетям

Для удобства изложения будем рассматривать не входную и выходную функции переходов, а входную и выходную функции позиций.

Пусть сеть Петри представлена четверкой $C = (P, T, I, O)$ [см. (1)].

Определим ЦСП C^{∇} как $\left(P, T, I^{\nabla}, O^{\nabla}\right)$, где $I^{\nabla} = \left(I^1, I^2, \ldots, I^N\right)$; функция I^j определена только для позиции $p_i \in P$, $I^j(p_i) = \left\{t_{j1}, t_{j2}, \ldots, t_{jm}\right\}$, $m \le M$; $O^{\nabla} = \left(O^1, O^2, \ldots, O^N\right)$. Функция O^i определена только для позиции $p_i \in P$:

$$O^i(p_i) = \{t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{ik}\},\ k = M;$$

$\mu_i^{\nabla}(p_i) = \mu(p_i), |P| = N; |T| = M; |D| = L;$ D – множество цветов.

Определим ЦСП $C^{\nabla\nabla}$ как $\left(P^{\nabla}, T, I^{\nabla}, O^{\nabla}\right)$, где $P^{\nabla} = \{p\}, \left|P^{\nabla}\right| = 1.$ Граф этой ЦСП состоит из множества переходов *T*, совпадающего с множеством переходов первоначальной СП, и одной позиции *p*, из которой выходят и в которую входят цветные дуги, соединяющие позицию *p* с переходами (рис. 2, *в*). Поскольку каждой позиции p_i в исходной СП ставится в соответствие уникальный цвет, то в $C^{\nabla\nabla}$ нет кратных цветных дуг, если не было кратных дуг в исходной СП. Задачу эквивалентности таких ЦСП можно рассматривать как задачу эквивалентности (с точностью до обозначений) входных и выходных функций, что может оказаться полезным и для задач сравнения СП.

По тем же соображениям, приведенным в п. 2.2, в данном случае тоже сохраняется язык сетей Петри:

$$\alpha(C) = \alpha(C^{\nabla}) = \alpha(C^{\nabla\nabla}).$$

Если в определении C^{∇} не требовать, чтобы функции $I^l(p_i)$ и $O^l(p_i)$ были определены только для $p_i = p$, то граф $C^{\nabla\nabla}$ может иметь кратные цветные дуги (рис. 2, *б*) при цвете *b*, совпадающем с цветом *C*. Тогда при применении метода перехода от ЦСП к СП (п. 2.2) ЦСП на рис. 2, *в* будет соответствовать СП на рис. 2, *г*. Для того чтобы этого не происходило, необходимо ставить в соответствие одинаковые цвета позициям, у которых не пересекаются комплекты входных переходов и не пересекаются комплекты выходных переходов. Другой способ состоит в переопределении P^{∇} для $C^{\nabla\nabla}$ таким образом, чтобы $\left|P^{\nabla}\right| \ne 1$ и, если p_i и $p_j (j \ne i)$ принадлежат P^{∇}, то их выходные (входные) комплекты переходов, соответствующие одному цвету, не пересекались (рис. 2, *д*). Заметим, что при этом входные и выходные комплекты могут пересекаться между собой.

Таким образом, из вышесказанного следует, что различные ЦСП могут иметь на нижнем уровне одинаковую структуру. Конкретные цвета, их сочетания и структура ЦСП несут смысловую нагрузку в моделях конкретных реальных систем или процессов.

Для ЦСП и СП со сдерживающими дугами рассмотренные методы используются без каких-либо поправок и дополнений. Фактом, который интересно здесь отметить, является то, что в сетях

Петри кратность сдерживающей дуги не может превышать 1, в цветных сетях Петри число сдерживающих дуг, соединяющих позицию с переходом, может быть больше 2, но их цвета не совпадают.

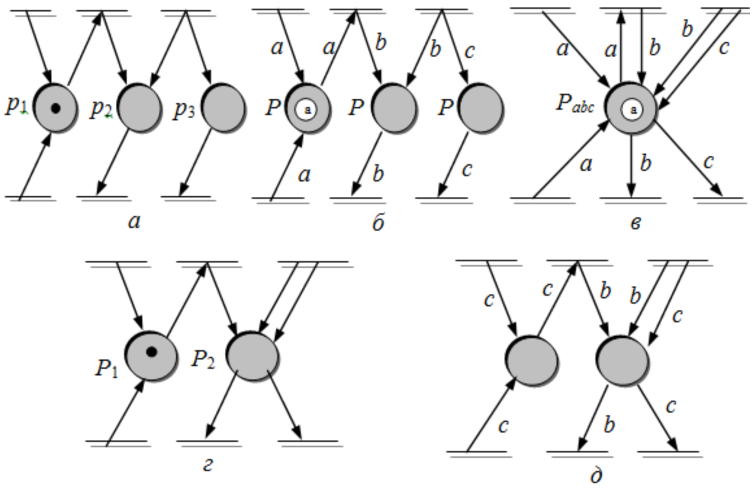

Рис. 2. Эквивалентные в смысле языка модели: СП – *а*;
ЦСП-модели – *б*, *в*, *д* и не эквивалентная им СП-модель – *г*

2.4. Элементы моделей структур управления, основанных на цветных сетях Петри

Моделирование с помощью СП рассмотрено, например, в [6–8]. Упрощение структуры (сокращение числа позиций) графа СП с помощью раскраски (ЦСП), рассмотренное в п. 2.3, не является единственным следствием применения аппарата ЦСП. Тот факт, что существуют эквивалентные в смысле языка обычные СП, говорит о преемственности подхода с использованием ЦСП. Кроме того, для анализа определенного класса систем появляется возможность отказаться от непосредственного выполнения сети, как это требуется при построении дерева достижимости или для записи матричных уравнений. Динамические свойства системы в этом случае изучаются посредством анализа ее структуры. При этом имеется возможность одинаковой трактовки одинаковых элементов модели без дополнительного словесного описания, что позволяет строить модели, более полно и корректно описывающие реальные процессы.

Часто модели бизнес-процессов строятся в терминах аппарата СП и ЦСП. Такие модели позволяют описывать не только структуру процесса, но и его динамику. Естественно требовать, чтобы формально одинаковые элементы модели соответствовали одинаковым элементам реальной системы. В нашей трактовке позиции соответствуют условиям, в результате выполнения которых должен быть осуществлен выбор тех или иных действий, которые затем будут выполняться.

При сложных взаимодействиях между элементами системы в СП-модель приходится вводить дополнительные позиции для отображения «тонких» моментов, которые необходимо учитывать при управлении процессом. Кроме затруднения интерпретации модели, это приводит к усложнению ее пространственной структуры, что отрицательно сказывается на процессе построения самой модели, поскольку перед проектировщиком стоит проблема графического представления модели. Для устранения этих недостатков нами был разработано и исследовано одно из расширений обычных СП – ЦСП. Построение модели осуществляется изначально в терминах ЦСП. Построенная таким образом модель бизнес-процесса позволяет проектировщику выбрать абстрактные типы подпроцессов, которые затем конкретизируются. Сочетание таких типов представляет собой конкретную реализацию правил выполнения процесса, а вместе с содержимым этапов работ является собственно моделью бизнес-процесса.

При этом следует иметь в виду, что мы имеем дело лишь с моделью процесса. Если нас интересуют вопросы активности моделируемой сети, то в целях упрощения ее графического представления однотипные относительно структуры процесса конструкции могут быть представлены в модели лишь в одном экземпляре. Если ЦСП-модель структуры бизнес-процесса в целом построена, то в этой модели можно выделить переходы, которые запускаются автоматически по мере выполнения сети, и переходы, которые должны быть запущены извне. Как правило, в последнем случае разрешаются конфликтные ситуации сети. Разрешение таких конфликтных ситуаций есть управление выполнением сети и в конечном счете это управление моделью.

Приведем здесь наиболее часто употребляемые модели подструктур, из которых строятся общие модели систем. Простейшим примером является структура на рис. 3, *а*. Переход t является единственным выходным переходом позиции P и запускается после выполнения условия, моделируемого позицией P. Событие запуска перехода t фиксируется в позиции P_1. Если дальнейшее продолжение процесса требует принятия решения, то запуск перехода t можно интерпретировать как процедуру выбора. На рис. 3, *в* и *г* представлены более сложные структуры, в которых условия разрешенности переходов могут динамически меняться в процессе выполнения сети.

Аппарат СП и ЦСП позволяет строить модели, которые описывают систему с различной степенью детализации. Так, каждая позиция и/или переход могут быть представлены подсетью, которая более подробно представляет структуру подпроцесса.

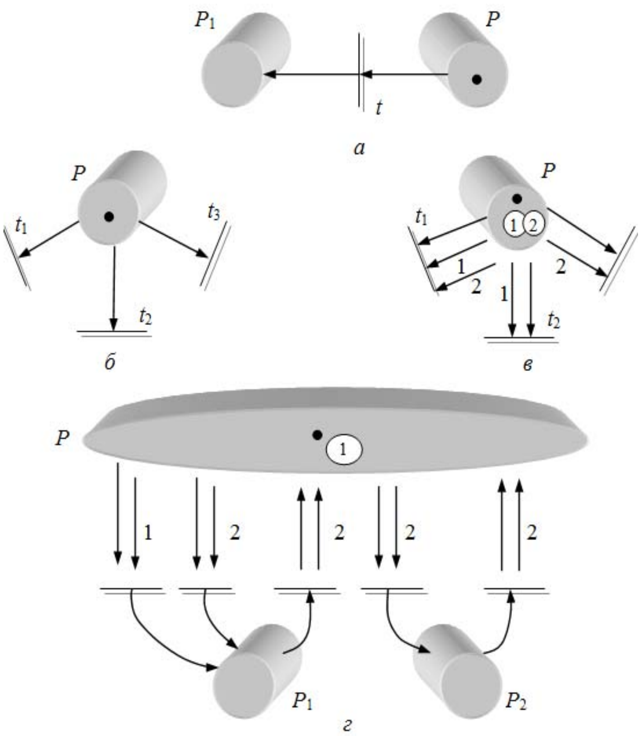

Рис. 3. Модели некоторых подструктур управления: *а* – вырожденная структура; *б* – «свободный выбор»; *в* – зависимый выбор; *г* – условия динамичны

Заключение. Любая целенаправленная деятельность требует использования моделей. Модели содержат информацию, знания о системе, опыт взаимодействия с системой, которой мы желаем управлять. Именно модели системы позволяют нам искать нужное управление ею, «проигрывать» различные варианты воздействия на нее и находить оптимальный вариант управления.

Особый интерес вызывают вопросы построения и исследования моделей для социально-экономических систем как наиболее сложных, поскольку их элементами являются субъекты (люди и группы людей). При этом стоит задача повышения наглядности моделей бизнес-процессов.

Упрощение структуры (сокращение числа позиций) графа СП с помощью раскраски, рассмотренное в п. 2.2, не является единственным следствием применения аппарата ЦСП. Тот факт, что существуют эквивалентные в смысле языка обычные СП, говорит о преемственности подхода с использованием ЦСП. Кроме того, для анализа определенного класса систем (п. 2.2) появляется возможность отказаться от непосредственного выполнения сети, как это требуется при построении дерева достижимости или для записи матричных уравнений [4]. Динамические свойства системы в этом случае изучаются посредством анализа ее структуры. При этом имеется возможность одинаковой трактовки одинаковых элементов модели без дополнительного словесного описания, что позволяет строить модели, более полно и корректно описывающие динамику реальных бизнес-процессов [9].

Работа выполнена в рамках проекта «Методы и средства информационно-аналитической поддержки принятия решений в сфере территориального социально-экономического развития и управления по результатам» Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Литература

1. Котов В.Е. Сети Петри. – М.: Наука, 1984. – 158 с.

2. Хамер М. Реинжиниринг корпорации: Манифест революции в бизнесе / М. Хамер, Дж. Чампи. – СПб. : Изд. дом «Манн, Иванов и Фербер», 2005. – 287 с.

3. Силич В.А. Реинжиниринг бизнес-процессов / В.А. Силич, М.П. Силич. – Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2007. – 200 с.

4. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 264 с.

5. Применение микропроцессорных средств в системах передачи информации / Б.Я. Советов, О.И. Кутузов, Ю.А. Головин, Ю.В. Аветов. – М. : Высш. шк., 1987. – 256 с.

6. Шакирова Н.Ф. Моделирование сетями Петри поведения игроков на финансовом рынке // Исследовано в России. – М.: МФТИ, 2006 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/185.pdf.

7. Ломазова И.А. Вложенные сети Петри для адаптивного управления потоками работ // Параллельные вычисления и задачи управления: тр. III Междунар. конф. 2–4 октября 2006 г. – М.: ИПУ РАН, 2006. – С. 1300–1308.

8. Petri Net Model View of Decision-Making: an Operational Management Analysis / A. Mehrez, M. Muzumdar, W. Acar, G. Weinroth // OMEGA. The International Journal of Management Science. – 1995. – Vol. 23, № 1. – P. 63–79.

9. Мещеряков Р.В. Подходы к внедрению ERP-систем на крупных предприятиях / Р.В. Мещеряков, М.В. Савчук // Бизнес-информатика. – 2011. – № 2. – С. 63–68.

Ехлаков Юрий Поликарпович
Д-р техн. наук, профессор, зав. каф. автоматизации обработки информации (АОИ) ТУСУРа
Тел.: 8 (382-2) 41-41-31
Эл. почта: upe@tusur.ru

Тарасенко Владимир Феликсович
Д-р техн. наук, профессор каф. государственного и муниципального управления НИ ТГУ
Тел.: 8 (382-2) 70-15-91
Эл. почта: vtara54@mail.ru

Жуковский Олег Игоревич
Канд. техн. наук, с.н.с., доцент каф. АОИ ТУСУРа
Тел.: 8 (382-2) 41-41-31
Эл. почта: ol@muma.tusur.ru

Сенченко Павел Васильевич
Канд. техн. наук, доцент каф. АОИ ТУСУРа
Тел.: 8 (382-2) 41-41-31
Эл. почта: pvs@tusur.ru

Гриценко Юрий Борисович
Канд. техн. наук, доцент каф. АОИ ТУСУРа
Тел.: 8 (382-2) 41-41-31
Эл. почта: ubg@muma.tusur.ru

Ehlakov Yu.P., Tarasenko V.F., Zhukovskiy O.I., Senchenko P.V., Gritsenko Yu.B.

Color Petri Nets in Modeling of Socio-Economic Systems

The Petri nets are adequate tools for modeling the dynamics of various systems. We suggested the algorithms of transformation of a coloured Petri net into a classic one, keeping the language of the net. The algorithms are applied to design of certain management systems. Some advantages of the colored Petri nets in modeling and studying of dynamic processes in socio-economic systems are presented and discussed.

Key words: modeling, socio-economic systems, Petri net, dynamic models, business-process.