

УДК 629.7.054

П.Е. Гавриш, С.Г. Михальченко, Г.Я. Михальченко

## Математические модели скоростных подсистем электроприводов силового гироскопического прибора

Рассматриваются численно-аналитические модели электроприводов двигателя-маховика и угла поворота рамы двухстепенного силового гироскопического прибора. Отличительной особенностью моделей являются использование в правых частях дифференциальных уравнений обобщенных функций и вычисление ЭДС вращения ротора на каждом шаге интегрирования.

**Ключевые слова:** стабилизация частоты вращения, широтно-импульсная модуляция, решение системы нелинейных дифференциальных уравнений.

В современных системах ориентации и стабилизации космических аппаратов применяются силовые гироскопические приборы, представляющие собой гироскопы с двумя степенями свободы. В них электропривод двигателя-маховика, стабилизируя частоту вращения, создает точку опоры в инерциальной системе координат, а электропривод поворотной части обеспечивает повороты корпуса космического аппарата путем создания момента гироскопической реакции, пропорционального углу поворота рамы двигателя-маховика.

В целом структура такого гироскопа включает в себя две скоростные подсистемы (электроприводов двигателя-маховика и поворота рамы), а также информационную подсистему измерения угла поворота. Для анализа скоростных подсистем целесообразно использовать декомпозицию сложной системы с учетом взаимовлияния возмущающих воздействий приведенных моментов. Рассмотрим подробнее каждую из скоростных подсистем.

### Скоростная подсистема электродвигателя-маховика.

Структурная схема двухконтурной скоростной подсистемы электропривода двигателя-маховика представлена на рис. 1.

Здесь  $\Gamma_{р.н}$ ,  $\Gamma_{р.с}$  – генераторы нарастающего и спадающего развертывающих напряжений; ШИМ1, ШИМ2 – широтно-импульсные модуляторы; И1, И2 – инверторы;  $E_0$  – напряжение питания;  $i_1$ ,  $i_2$  – токи обмоток статора;  $R$ ,  $L$  – активное сопротивление и индуктивность обмоток статорной цепи;  $E_{\phi 1}$ ,  $E_{\phi 2}$  – ЭДС вращения; Рег – регулятор;  $U_y$  – сигнал управления; ФП – функциональный преобразователь; ДПР – датчик положения ротора;  $\Phi_\delta$  – магнитный поток ротора;  $\Omega$  – частота вращения ротора;  $M$  – создаваемый момент на валу.

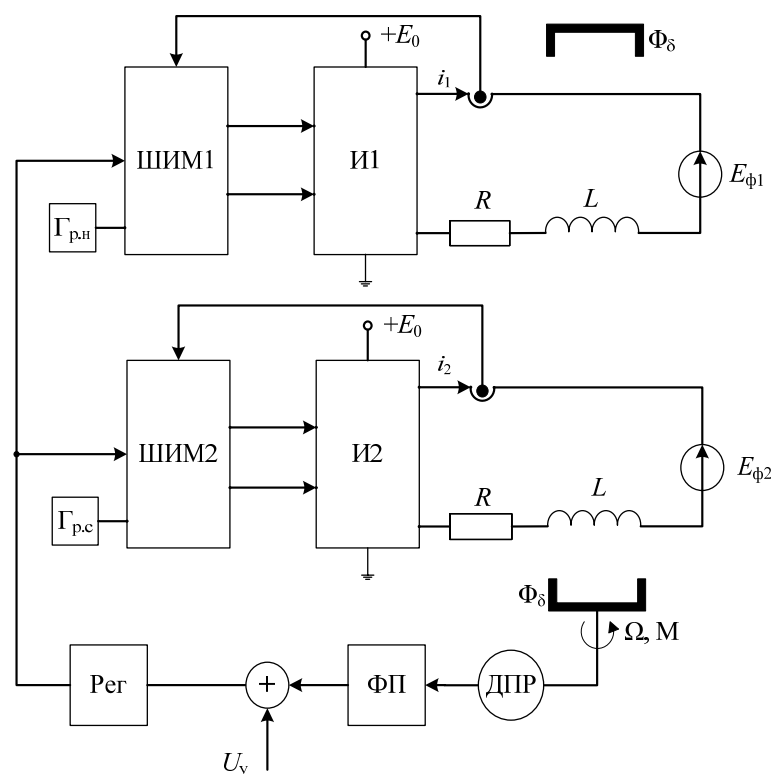


Рис. 1. Структурная схема двухконтурной скоростной подсистемы электропривода двигателя-маховика

Математическая модель, описывающая схему (см. рис. 1), представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно токов соответствующих фаз двигателя и угловой скорости вентильного двигателя [1–3]:

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \frac{-R}{L}i_1 - \frac{1}{L}E_{\phi 1} + \frac{E_0KF_1}{L}; \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{-R}{L}i_2 - \frac{1}{L}E_{\phi 2} + \frac{E_0KF_2}{L}; \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Phi_{\delta} \sin \varphi}{J}i_1 + \frac{\Phi_{\delta} \cos \varphi}{J}i_2 - \frac{M_c}{J}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $KF_1$ ,  $KF_2$  – коммутационные функции соответствующих фаз;  $J$  – момент инерции двигателя-маховика;  $\varphi$  – угловое положение ротора двигателя (фаза);  $M_c$  – момент сопротивления.

ЭДС обмоток двигателя  $E_{\phi 1}$ ,  $E_{\phi 2}$  выражаются через частоту вращения и фазу ротора следующим образом:

$$E_{\phi 1} = \Phi_{\delta}\Omega \sin \varphi; \quad E_{\phi 2} = \Phi_{\delta}\Omega \cos \varphi. \quad (2)$$

В матричном виде системы уравнений (1), (2) могут быть записаны как

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(\varphi)\mathbf{X} + \mathbf{B}(KF_1, KF_2) \quad (3)$$

посредством следующих матриц:

$$\mathbf{A}(\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 & \frac{-\Phi_{\delta}\Omega \sin \varphi}{L} \\ 0 & \frac{-R}{L} & \frac{-\Phi_{\delta}\Omega \cos \varphi}{L} \\ \frac{\Phi_{\delta} \sin \varphi}{J} & \frac{\Phi_{\delta} \cos \varphi}{J} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}(KF_1, KF_2) = \begin{bmatrix} \frac{E_0KF_1}{L} \\ \frac{E_0KF_2}{L} \\ \frac{-M_c}{J} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \Omega \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Система уравнений (3) с начальными условиями  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$  представляет собой задачу Коши, имеющую однозначное решение вида

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{KF})) - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{KF}) \quad (5)$$

на любом участке непрерывности матриц  $\mathbf{A}(\varphi)$  и  $\mathbf{B}(KF_1, KF_2)$ .

Последовательность этих участков непрерывности определяется видом широтно-импульсной модуляции и описывается коммутационной функцией  $\mathbf{KF} = [KF_1(t, \mathbf{X}), KF_2(t, \mathbf{X})]$  для каждой фазы [3, 4, 6]. На рис. 2 показан принцип формирования импульсной последовательности  $\mathbf{KF}$  для одной фазы преобразователя. Каждая из составляющих вектора  $\mathbf{KF}$  определяются по формуле

$$KF_j(t, \mathbf{X}) = \frac{1}{2}(KF_{Hj}(t, \mathbf{X}) + KF_{Cj}(t, \mathbf{X})) \quad \text{при } j = 1, 2 \quad (6)$$

как полусуммы коммутационных функций  $KF_{Hj}(t, \mathbf{X})$  и  $KF_{Cj}(t, \mathbf{X})$  от каждого из развертывающих напряжений – нарастающего  $U_{p.n}(t)$  и спадающего  $U_{p.c}(t)$  для каждой фазы  $j = 1, 2$  соответственно:

$$U_{p.n}(t) = U_{\text{оп}} \left( -\frac{1}{2} + \frac{t}{\tau} - \text{floor} \left( \frac{t}{\tau} \right) \right); \quad U_{p.c}(t) = -U_{\text{оп}} \left( -\frac{1}{2} + \frac{t}{\tau} - \text{floor} \left( \frac{t}{\tau} \right) \right). \quad (7)$$

Здесь  $U_{\text{оп}}$  – опорное напряжение;  $\tau$  – тактовый период коммутации ШИМ;  $\text{floor}(x)$  – функция, вычисляющая целую часть числа.

Каждое развертывающее напряжение (нарастающее и спадающее) формирует свою коммутационную функцию  $KF_{Hj}(t, \mathbf{X})$  и  $KF_{Cj}(t, \mathbf{X})$  как знак соответствующей функции обратной связи:  $\xi_{Hj}(t, \mathbf{X})$  или  $\xi_{Cj}(t, \mathbf{X})$ .

То есть

$$KF_{Hj}(t, \mathbf{X}) = \text{sign}\{\xi_{H1}(t, \mathbf{X})\}; \quad KF_{Cj}(t, \mathbf{X}) = \text{sign}\{\xi_{C1}(t, \mathbf{X})\} \quad \text{при } j = 1, 2. \quad (8)$$

Функция обратной связи представляет собой разность сигнала ошибки  $U_{er,j}(t, \mathbf{X})$  и нарастающего или спадающего развертывающего напряжения:

$$\xi_{Hj}(t, \mathbf{X}) = U_{er,j}(t, \mathbf{X}) - U_{p.n}(t); \quad \xi_{Cj}(t, \mathbf{X}) = U_{er,j}(t, \mathbf{X}) - U_{p.c}(t) \quad \text{при } j = 1, 2, \quad (9)$$

где функция сигнала ошибки для каждой фазы  $j = 1, 2$  может быть записана следующим образом:

$$U_{er1}(t, \mathbf{X}) = \alpha(U_3 \sin \Omega t - \beta x_1); \quad U_{er2}(t, \mathbf{X}) = \alpha(U_3 \cos \Omega t - \beta x_2). \quad (10)$$

Здесь  $\alpha$  – коэффициент усиления пропорционального регулятора цепи обратной связи;  $U_3$  – амплитуда колебаний гармонического сигнала задания на ток;  $\beta$  – масштабирующий коэффициент сигнала датчика тока.

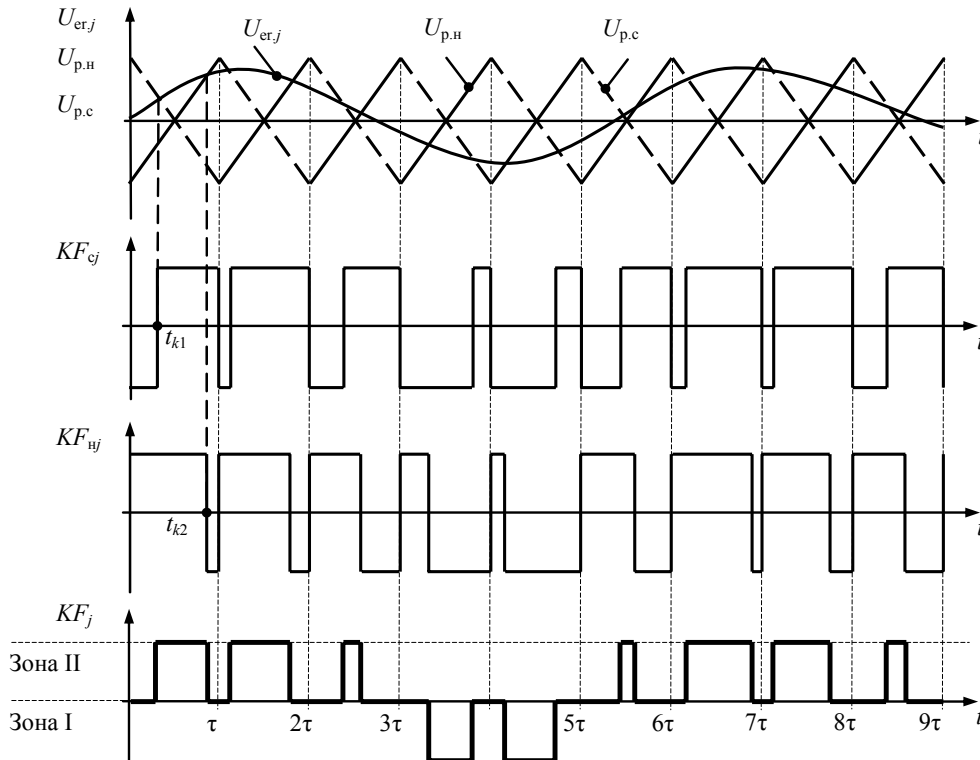


Рис. 2. Диаграммы, иллюстрирующие формирование напряжения одной фазы преобразователя с однополярной реверсивной модуляцией

Сигнал ошибки вычисляется в уравнениях (10) как разность задания на ток  $U_3 \sin \Omega t$  или  $U_3 \cos \Omega t$  и сигнала датчика тока  $\beta x_1$  или  $\beta x_2$  соответственно. Равенство нулю функции обратной связи  $\xi_{nj}(t, \mathbf{X})$  или  $\xi_{cj}(t, \mathbf{X})$  согласно уравнениям (10) однозначно определяет момент коммутации  $t_{k1}^j$  или  $t_{k2}^j$  соответственно.

Анализ алгоритма формирования коммутационной функции (6)–(10) показывает, что каждый тактовый интервал ШИМ для каждой фазы  $j = 1, 2$  разбивается моментами коммутации  $t_{k1}^j$  и  $t_{k2}^j$  на три участка постоянства структуры [4]:

- первый:  $(k-1)\tau < t < t_{k1}^j, KF_j = 0$ ;
- второй:  $t_{k1}^j < t < t_{k2}^j, KF_j = (-1)^N$ ;
- третий:  $t_{k2}^j < t < k\tau, KF_j = 0$ ,

где  $k$  – номер тактового интервала.

На первом и третьем участках, как видно на рис. 2, коммутационная функция всегда принимает нулевые значения. Номер зоны  $N$ , в которой находится сигнал управления на втором участке, зависит от знака сигнала:  $N = \text{sign}\{U_{erj}(t, \mathbf{X})\}$ .

Решение задачи Коши (3), (4) на каждом из участков постоянства структуры. При этом будем полагать, что последовательность коммутационных функций  $KF_j(t, \mathbf{X}), j = 1, 2$  строится отдельно для каждой фазы преобразователя и соответственно моменты коммутации  $t_{k1}^j$  и  $t_{k2}^j$  для каждой фазы  $j = 1, 2$  свои, а значит, могут не совпадать.

В зависимости от взаимного расположения моментов коммутации  $t_{k1}^j$  и  $t_{k2}^j$  первой и второй фаз вектор правых частей  $\mathbf{B}(\mathbf{KF})$  может иметь вид

$$\mathbf{B}(0,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E_0(-1)^N}{L} \\ \frac{-M_c}{J} \end{bmatrix}; \mathbf{B}(1,0) = \begin{bmatrix} \frac{E_0(-1)^N}{L} \\ 0 \\ \frac{-M_c}{J} \end{bmatrix} \text{ или } \mathbf{B}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-M_c}{J} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

**Численно-аналитический метод построения решения.** Для поиска решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4) разработан численно-аналитический метод [3, 4, 6], состоящий в следующем:

1. На каждом тактовом интервале  $k = 1 \dots k_{\max}$  задается равномерная сетка  $t_i = t_0 + ih$ ,  $i = 0 \dots n$  вычисления узлов по времени  $t_i$  с шагом  $h = \tau/n$ , где  $n$  – число разбиений тактового периода.

2. Задаются начальные условия вектора переменных состояния  $\mathbf{X}_0$  момента времени  $t_0$ . На первом тактовом интервале  $k = 1$  начальное условие  $\mathbf{X}_0 = [0, 0, 0]^T$ , для последующих интервалов  $k > 1$  в качестве значения  $\mathbf{X}_0$  необходимо брать вычисленное значение вектора переменных состояния  $\mathbf{X}(t_n)$  в конце предыдущего интервала.

3. В цикле  $i = 0 \dots n$  при переходе от  $t_i$  к  $t_{i+1}$  вычисляется угловое положение ротора двигателя  $\varphi(t_{i+1})$ , строится матрица  $\mathbf{A}(\varphi)$  и находится точное решение  $\mathbf{X}(t_{i+1})$  задач (3), (4) по формуле (5) с начальными условиями  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$ . Вектор  $\mathbf{V}$  выбирается из выражения (11), номер зоны  $N$  определяется по знаку функции ошибки:  $N = \text{sign}\{U_{\text{er},j}(t_i, \mathbf{X}(t_i))\}$ .

4. На каждом шаге цикла (отдельно для каждой фазы  $j = 1, 2$ ) вычисляется значение функций обратной связи  $\xi_{Hj}(t_{i+1}, \mathbf{X}(t_{i+1}))$  или  $\xi_{Cj}(t_{i+1}, \mathbf{X}(t_{i+1}))$ . Изменение знака функций обратной связи однозначно определяет момент коммутации  $t_{k1}^j$  или  $t_{k2}^j$  соответственно. Точность определения моментов коммутации в данном случае не превосходит  $h = \tau/n$ , однако она может быть повышена методом дихотомии при изменении шага расчетов.

5. Если какая-то из точек  $t_i$  расчетной сетки оказывается моментом коммутации, то вектор правых частей  $\mathbf{V}(\mathbf{KF})$  принимает новое значение из выражения (11), а вектор начальных условий  $\mathbf{X}_0$  принимает текущее значение вектора переменных  $\mathbf{X}(t_i)$ . Эти изменения характеризуют переход к новому участку непрерывности матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{V}$ . Значение вектора  $\mathbf{X}(t_{i+1})$  в следующей точке  $t_{i+1}$  необходимо рассчитывать по выражению (5) уже для нового значения вектора правых частей  $\mathbf{V}(\mathbf{KF})$  и относительно новых начальных условий  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_{k1}^j) = \mathbf{X}_{k1}^j$  или  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_{k2}^j) = \mathbf{X}_{k2}^j$ . Номер зоны  $N = \text{sign}\{U_{\text{er},j}(t_i, \mathbf{X}(t_i))\}$ .

6. Осуществляется переход к расчету на следующем тактовом интервале (возвращение к пункту 1 настоящего алгоритма).

Последовательность выбора начальных условий и вектора  $\mathbf{V}(\mathbf{KF})$  осуществляется по выражению (11).

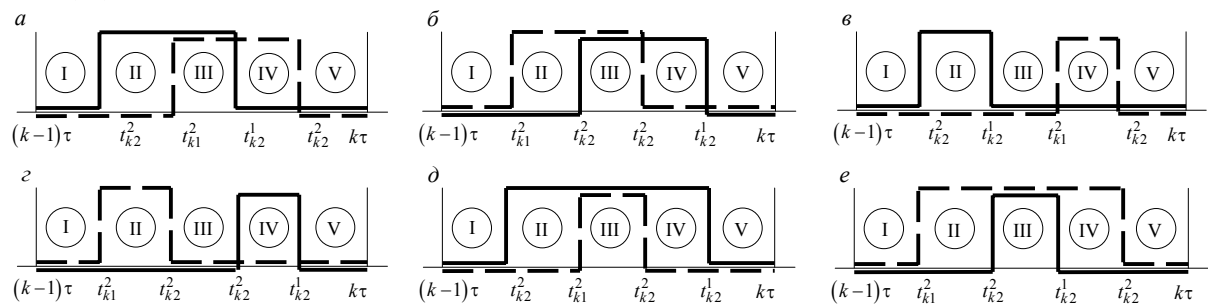


Рис. 3. Коммутационные функции на тактовом интервале двухфазной системы (на примере одной фазы)

Очевидно, что при полной независимости каналов управления каждой фазой моменты коммутации  $t_{k1}^1$ ,  $t_{k2}^1$ ,  $t_{k1}^2$  и  $t_{k2}^2$  не зависят друг от друга. При этом некоторые моменты коммутации могут совпадать и, следовательно, некоторых из участков I–V на интервале (рис. 3) может не существовать [4].

**Скоростная подсистема электропривода поворота рамы.** Привод поворота рамы [1, 2, 5, 7], включает в себя регулятор напряжения, датчик положения ротора и вентильный двигатель, к валу которого присоединен вход редуктора, передающего вращательное движение на раму подвеса. Схема (рис. 4) и математическая модель силовой части привода вращения рамы также представляются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1)–(11). Кроме того, скорость и направление вращения ротора двухфазного вентильного двигателя и, следовательно, рамы подвеса задается цифровым управляющим кодом, который поступает в цифровой модулятор и преобразуется в кодовые гармонические сигналы « $\sin\Omega_y t$ » и « $\cos\Omega_y t$ », где  $\Omega_y$  – угловая частота сигнала управления.

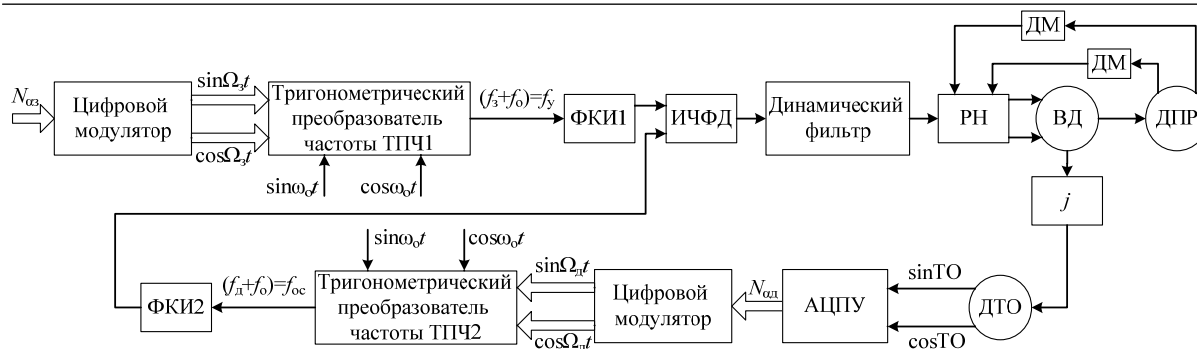


Рис. 4. Структурная схема подсистемы привода поворота рамы

Здесь  $N_{\alpha 3}$  – заданный код скорости;  $\sin \Omega_3 t$ ;  $\cos \Omega_3 t$  – сигнал, соответствующий заданному коду скорости;  $f_3$  – заданная частота;  $f_0$  – опорная частота;  $f_y$  – частота управления; ФКИ1, ФКИ2 – формирователи коротких импульсов; ИЧФД – импульсный частотно-фазовый дискриминатор; РН – регулятор напряжения; ВД – вентильный двигатель; ДПР – датчик положения ротора; ДМ – демодулятор;  $j$  – редуктор; ДТО – точный отсчет датчика угла поворота рамы;  $\sin \theta_0$ ,  $\cos \theta_0$  – выходные сигналы точного отсчета датчика угла поворота рамы; АЦПУ – аналогово-цифровой преобразователь угла;  $N_{\alpha d}$  – действующий код скорости;  $f_d$  – действующая частота;  $f_{oc}$  – частота обратной связи.

Основным звеном регулятора скорости вентильного двигателя является импульсный частотно-фазовый дискриминатор, осуществляющий синхронизацию частоты управления  $f_y$  и частоты обратной связи  $f_{oc}$ , пропорциональной скорости вращения. Частота  $f_{oc}$  определяется по сигналам с точного отсчета датчика угла. Для обеспечения быстродействия и устойчивости широкодиапазонного регулятора скорости с малоинерционным исполнительным двигателем частота управления задается как сумма опорной  $f_0$  и заданной  $f_3$  частот, также частота обратной связи является суммой  $f_0$  и  $f_d$  [5].

Формирование суммарных частот осуществляется тригонометрическими преобразователями частоты, где происходят вычисления по тригонометрическим формулам:

$$\sin(\omega_0 + \Omega)t = \sin \omega_0 t \cos \Omega t + \cos \omega_0 t \sin \Omega t ; \quad (12)$$

$$\cos(\omega_0 + \Omega)t = \cos \omega_0 t \cos \Omega t - \sin \omega_0 t \sin \Omega t , \quad (13)$$

где  $\omega_0$  – опорная угловая частота;  $\Omega$  – угловая частота.

Гармонические опорные сигналы  $\sin \omega_0 t$  и  $\cos \omega_0 t$  формируются генератором опорной частоты и так же, как управляющие сигналы  $\sin \Omega_3 t$  и  $\cos \Omega_3 t$ , поступают на цифровые входы преобразователя ТПЧ1. Результирующие гармонические сигналы  $\sin(\omega_0 + \Omega)t$  и  $\cos(\omega_0 + \Omega)t$  преобразуются в прямоугольные импульсы, из которых в формирователях коротких импульсов формируются и логически складываются короткие импульсы. Выходные импульсы ФКИ1 частотой следования  $f_y = f_0 + f_3$  поступают на первый вход ИЧФД. Аналогично формируются импульсные последовательности обратной связи  $f_{oc} = f_0 + f_d$ , поступающие на второй вход ИЧФД. В результате сравнения  $f_y$  и  $f_{oc}$  ИЧФД обеспечивает их синхронизацию как по частоте, так и по фазе. Выходной широтно-импульсный сигнал ИЧФД, скважность которого зависит от величины ошибки регулирования и возмущающих воздействий (моментов сопротивления и упругости на выходном валу ВД), после фильтрации динамическим фильтром поступает на вход регулятора напряжения, где происходит операция перемножения с аналоговыми выходными сигналами демодуляторов ДПР. При переходе ИЧФД из зоны насыщения (при  $f_y \neq f_{oc}$ ) в зону регулирования амплитуда напряжений на входах РН уменьшается пропорционально сигналу по скорости и соответственно снижается электромагнитный момент двигателя. Стабилизация скорости происходит при равенстве электромагнитного момента моменту сопротивления на валу двигателя.

### Заключение

1. Аналитическое описание напряжения с однополярной реверсивной модуляцией предполагает тридцать возможных участков непрерывности системы, из которых на каждом тактовом интервале реализуется не более трех.

2. Представленные математические модели электроприводов двигателя-маховика и поворота рамы позволяют проводить бифуркационный анализ динамических режимов функционирования силовых гироскопических приборов.

*Литература*

1. Математическая модель маховичного электромеханического исполнительного органа / А.Н. Бутаков, В.Н. Булдаков, С.Ю. Филонова и др. // Электронные и электромеханические системы и устройства: сб. науч. тр. НПЦ «Полюс». – Томск: МГП «РАСКО» при изд-ве «Радио и связь», 2001. – С. 340–347.
2. Завьялова О.Ю. Разработка модели и синтез регулятора маховичного электромеханического исполнительного органа / О.Ю. Завьялова, А.Ф. Лекарев // Электронные и электромеханические системы и устройства: сб. науч. тр. – Томск: Изд-во НТЛ, 2011. – С. 389–398.
3. Нелинейная динамика полупроводниковых преобразователей / А.В. Кобзев, Г.Я. Михальченко, А.И. Андриянов, С.Г. Михальченко. – Томск: Том. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2007. – 224 с.
4. High-Feedback Operation of Power Electronic Converters / Zhanybai T. Zhusubaliyev, Erik Mosekilde, Alexey I. Andriyanov and Gennady Ya. Mikhail'chenko // Electronics. – 2013. – № 2. – P. 113–167.
5. Пат. 2291552 РФ, МПК Н 02 Р 6/08. Устройство для регулирования частоты вращения электродвигателя / Ю.Е. Муравяткин, С.В. Редькин, А.С. Авдиевич; заявл. 09.11.04; опубл. 10.01.07, Бюл. № 1. – 6 с.
6. Бородин К.В. Бифуркации в динамике инвертирующего преобразователя напряжения / К.В. Бородин, С.Г. Михальченко, Г.Я. Михальченко // Доклады Томского университета систем управления и радиоэлектроники №1(21), 2010. С. 86-92.
7. Управление позиционными электроприводами блока освещенности для термобарокамеры / Аржанов В.В., Мишин В.Н., Ракитин Г.А., Аржанов К.В. // Доклады Томского университета систем управления и радиоэлектроники №1(27), 2013. С. 21-23.

**Гавриш Павел Евгеньевич**

Аспирант каф. промышленной электроники ТУСУРа, инженер-электроник ОАО «НПЦ «Полюс»  
Тел.: 8 (382-2) 55-40-29  
Эл. почта: POLUS@online.tomsk.net

**Михальченко Сергей Геннадьевич**

Д-р техн. наук, доцент каф. промышленной электроники ТУСУРа  
Тел.: 8-913-826-09-07  
Эл. почта: msg@ie.tusur.ru

**Михальченко Геннадий Яковлевич**

Д-р техн. наук, профессор каф. промышленной электроники ТУСУРа  
Тел.: 8 (382-2) 41-32-32  
Эл. почта: mail@comprel.ru

Gavrish P.E., Mikhailchenko S.G., Mikhailchenko G.Ya.

**Mathematical models of velocity subsystems of electrodrives of the**

The paper deals with numeric-analytical models of electrodrives of the engine – a momentum wheel and angle measurement system of control moment gyroscope. The distinctive feature of the models is the usage of generalized functions in the right sides of differential equations and calculation of EMF rotor spinning at an each step of integration.

**Key words:** rotation speed stabilization, pulse-width modulation, solving of nonlinear differential equation system.