

УДК 681.511.2

А.Н. Корюкин, А.А. Воевода

Наибольшая степень устойчивости двухмассовой системы для регуляторов пониженного порядка

Эта работа о наибольшей (максимальной, предельной) степени устойчивости произвольной одноканальной двухмассовой системы, управляемой ПИД-регулятором и его обобщением, числитель передаточной функции которого – полином степени не более чем 2, а знаменатель – полином степени 1. Управляющая сила приложена к массе, ближайшей к неподвижному основанию. Выход – отклонение той же массы. Трением пренебрегаем. Исследование проводилось для любого объекта из всего класса перечисленных выше управляемых объектов. Для обобщенного ПИД-регулятора при поиске наибольшей устойчивости можно ограничиться регуляторами, для которых на правой вертикали характеристического полинома находится четырёхкратный корень; ПИД-регуляторами с двукратной комплексной парой на правой вертикали. Приведен пример вычисления наибольшей степени устойчивости, корней характеристического полинома, самого полинома, регулятора, обеспечивающего наибольшую устойчивость. В работе изложена методика исследования наибольшей степени устойчивости и регуляторов пониженного порядка, обеспечивающих эту устойчивость, которая может помочь при исследовании устойчивости и для других классов управляемых одноканальных систем пониженного порядка.

Ключевые слова: модальный синтез, регуляторы пониженного порядка, устойчивость по Гурвицу, наибольшая степень устойчивости, максимальная степень устойчивости, предельная степень устойчивости.

Наиболее разработанной частью теории автоматического управления является теория линейных систем, изучающая управление объектами, для которых связь состояний и управляющих сил описывается системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Несмотря на относительную простоту постановки и почтенный возраст, линейная теория управления далеко не закончена, и в ней по-прежнему много нерешённых задач. Некоторое представление о проблемах линейной теории управления может дать обзор [1].

Одно из основных направлений теории линейных систем, опирающееся ещё на работу Ляпунова [2] и развитое в первой половине XIX в. (1892 г.), – обеспечение устойчивости движения. Работ по устойчивости очень много.

В инженерной практике всегда было важно использовать как можно более простые регуляторы: ведь их дешевле и проще изготовлять, и поэтому около 95% промышленных регуляторов составляют ПИД-регуляторы. При управлении же с помощью простых регуляторов чаще всего сразу даже неясно, можно ли обеспечить устойчивость вообще.

Одно из основных и давних направлений линейной теории управления – регуляторы пониженного порядка [3] и их обеспечение устойчивости [4]. С этим связано понятие «степень устойчивости» (модуль максимума вещественных частей устойчивого характеристического полинома).

Часто требуется подобрать параметры регулятора так, чтобы колебания затухали наиболее быстро. В линейной теории это можно попытаться сделать, сдвинув на комплексной плоскости корни характеристического полинома как можно левее. В этой ситуации часто говорят о максимальной степени устойчивости. Существуют сотни публикаций о максимальной степени устойчивости. Одна из наиболее цитируемых из них – работа [5].

Обычно задачу обеспечения устойчивости решают для конкретного объекта, предлагая при изменении параметров объекта искать регулятор по образцу (следуя по указанному пути). Но изменение параметров объекта может существенно изменить ситуацию, и поэтому не всегда нужно следовать указанному образцу. Поэтому важно качественно рассматривать задачи устойчивости не для конкретного объекта управления, а для класса похожих объектов. Эта задача не новая, но существенно труднее.

Основные работы авторов по поиску максимальной степени устойчивости: [6–12]. В этих работах максимальная степень устойчивости ищется для некоторых классов объектов. Им предшествует работа [13], в которой исследование проводится для конкретных объектов.

Данная работа поясняет и продолжает исследование [6, 7] наибольшей степени устойчивости для произвольной одноканальной двух массовой системы без трения, в случае, когда управляющая сила действует на массу, ближайшую к неподвижной основе, и наблюдаем за отклонением этой же массы, для ПИД-регулятора и его обобщения, обеспечивающих эту устойчивость. Из этого изложения понятно, как вычислить наибольшую степень устойчивости и регуляторы, обеспечивающие эту устойчивость.

Изложена также инструкция по вычислению наибольшей степени устойчивости и регуляторов, обеспечивающих эту устойчивость, на конкретных примерах.

Данная работа и исследования [6, 7] могут служить образцом основной методики исследования и вычисления наибольшей степени и регулятора пониженного порядка, обеспечивающих эту устойчивость, и для других классов управляемых одноканальных систем пониженного порядка.

Постановка задачи: от объекта до характеристического полинома. К неподвижной основе пружинкой жесткости k_1 прикреплена точечная масса m_1 , а к ней пружинкой жесткости k_2 прикреплена точечная масса m_2 . Далее x_1 , x_2 – отклонения масс от положения равновесия; u_1 , u_2 – управляющие силы. Это одноканальная система: управляющая сила действует только на первую массу ($u_2 = 0$); выход – отклонение той же массы от положения равновесия. Трение пренебрежительно мало.

Объект управляется обобщённым ПИД-регулятором, или регулятором 2/1, числитель передаточной функции которого – полином степени не более чем 2, знаменатель – полином степени 1. Цель данной работы – качественное исследование и поиск ПИД- и 2/1-регуляторов, обеспечивающих наибольшую устойчивость по Гурвицу двухмассовой системы. То есть для каждого объекта нужно подобрать параметры регулятора так, чтобы максимум вещественных частей корней характеристического полинома был наименьшим.

Так как $u_2 = 0$ и нет трения, то при отсутствии возмущений движение двухмассовой системы удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = u_1, \quad m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0,$$

или $(s^2 m_1 + k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = u_1, \quad -k_2 x_1 + (s^2 m_2 + k_2) x_2 = 0.$

Здесь символ s действует на функции от времени дифференцированием по времени. Подействуем на первое из двух последних равенств полиномом $s^2 m_2 + k_2$; последнее помножим на $-k_2$. Получившиеся равенства сложим. Получим $D_{ob} x_1 = N_{ob} u_1$, где $D_{ob} = s^4 + (p_2 + p_0 + p_1) s^2 + p_1 p_0$ – знаменатель передаточной функции объекта (полином от s); $N_{ob} = n_1 (s^2 + p_0)$ – числитель передаточной функции объекта (полином от s); $n_1 = 1/m_1$, $n_2 = 1/m_2$ – обратные к массам;

$$p_0 = n_2 k_2, \quad p_1 = n_1 k_1, \quad p_2 = n_1 k_2. \quad (1)$$

Числитель передаточной функции регулятора: $N_c = b_0 + b_1 s + b_2 s^2$ (произвольный полином от s степени 2); знаменатель: $D_c = s + c$ (произвольный полином от s степени 1 со старшим коэффициентом 1). Частный случай регулятора, при $c = 0$, называют ПИД-регулятором. Характеристический полином

$$f(s) = D_{ob} D_c + N_{ob} N_c = s^5 + (n_1 b_2 + c) s^4 + (p_1 + p_2 + n_1 b_1 + p_0) s^3 + (p_1 c + n_1 p_0 b_2 + p_0 c + p_2 c + n_1 b_0) s^2 + (n_1 p_0 b_1 + p_1 p_0) s + n_1 p_0 b_0 + p_1 p_0 c.$$

Связи коэффициентов характеристического полинома. Введём обозначения коэффициентов характеристического полинома:

$$f(s) = s^5 + k_1 s^4 + k_2 s^3 + k_3 s^2 + k_4 s + k_5.$$

Приравняем коэффициенты полинома в двух последних формулах. Получим систему пяти уравнений, линейную относительно параметров регулятора (их четыре). Исключим из этой системы

параметры регулятора. Получим 4 формулы для вычисления параметров регулятора через параметры объекта и коэффициенты k_i :

$$c = -\left(p_0^2 k_1 + k_5 - k_3 p_0\right) / \left(p_2 p_0\right), \quad (2)$$

$$b_0 = \frac{p_1 p_0^2 k_1 + p_1 k_5 - p_1 k_3 p_0 + k_5 p_2}{p_2 n_1 p_0}, \quad b_1 = \frac{-p_1 p_0 + k_4}{n_1 p_0}, \quad b_2 = \frac{p_0^2 k_1 + p_2 k_1 p_0 + k_5 - k_3 p_0}{p_2 n_1 p_0} \quad (3)$$

и единственную связь коэффициентов характеристического полинома

$$-p_0^2 - p_2 p_0 - k_4 + k_2 p_0 = 0. \quad (4)$$

Полиномы $f(s)$ – произвольные со старшим коэффициентом единица и с единственной связью (4) на коэффициенты. Теперь задача поиска наилучшей устойчивости по Гурвицу сводится к тому, чтобы при фиксированных параметрах объекта в классе этих полиномов найти тот, у которого корни располагаются как можно левее.

Заметим, что в единственной связи коэффициентов полинома $f(s)$ используется только два параметра объекта, хотя сам объект четырёхмерный. То есть наилучшее управление нашим четырёхмерным объектом определяется двумя параметрами.

На самом деле число параметров, используемых для поиска наилучшего управления, можно сократить до одного. А именно, все используемые параметры, переменные и коэффициенты имеют размерность. Размерность переменной s обратна времени. Вполне естественно выбрать единицу a измерения переменной s , связанную с объектом управления. Тогда $s = S a$, где S – безразмерная величина, $\frac{1}{a^5} f(s) = \frac{1}{a^5} f(Sa) = S^5 + \frac{k_1}{a} S^4 + \frac{k_2}{a^2} S^3 + \frac{k_3}{a^3} S^2 + \frac{k_4}{a^4} S + \frac{k_5}{a^5}$.

Последний полином обозначим через $F(S)$, а его коэффициенты – через K_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$):

$$F(S) = S^5 + K_1 S^4 + K_2 S^3 + K_3 S^2 + K_4 S + K_5. \quad (5)$$

Имеем: $k_i = K_i a^i$, а связь (4) коэффициентов полинома $f(s)$ равносильна следующей связи коэффициентов полинома $F(S)$:

$$-p_0^2 - p_2 p_0 - K_4 a^4 + K_2 a^2 p_0 = 0, \quad \text{или} \quad -\left(p_0^2 + p_2 p_0\right) / a^4 - K_4 + K_2 p_0 / a^2 = 0. \quad (6)$$

Полиномы $F(S)$ – произвольные со старшим коэффициентом 1 и с единственной связью (6) на коэффициенты. Теперь задача поиска наилучшей устойчивости по Гурвицу сводится к тому, чтобы при фиксированных параметрах объекта в классе этих полиномов найти полином, у которого корни располагаются как можно левее.

Для упрощения связи (6) выберем единицу измерения $a = \sqrt{p_0}$. Тогда связь (6) будет выглядеть так:

$$-t - K_4 + K_2 = 0, \quad \text{или} \quad K_4 - K_2 + t = 0, \quad (7)$$

где $t = (p_0 + p_2) / p_0 = 1 + p_2 / p_0 = 1 + (n_1 k_2) / (n_2 k_2) = 1 + n_1 / n_2 = 1 + m_2 / m_1$ – параметр объекта. Очевидно, что t – произвольное вещественное число такое, что $t > 1$.

Теперь при поиске наилучшей устойчивости можно и не вспоминать о самом объекте, а иметь дело только с полиномом $F(S)$, с единственной связью на коэффициенты (7) и единственным фиксированным числом $t > 1$ (от объекта остался только один параметр $t > 1$). И только после нахождения наилучшей устойчивости можно вернуться к исходным параметрам (вычислив их по приведённым выше формулам).

Сделаем теперь в формуле (2) замену $k_i = K_i a^i$, $a = \sqrt{p_0}$. Получим $c = -a^3 (K_1 - K_3 + K_5) / p_2$. Для регулятора ПИД $c = 0$, т.е.

$$K_1 - K_3 + K_5 = 0. \quad (8)$$

Итак, при управлении регулятором 2/1 на коэффициенты полинома $F(S)$ накладывается единственная связь (7), а при управлении регулятором ПИД накладывается две связи – (7), (8).

На правую вертикаль не менее четырёх корней. Правой вертикалью любого полинома назовём вертикаль комплексной плоскости такую, что хотя бы один из корней полинома лежит на этой вертикали, а правее вертикали корней нет. Довольно большой объём работы с корнями в [6, 7] проделан с единственной целью – двигая правую вертикаль влево, собрать на ней как можно больше корней.

Лемма 1. Для произвольной двухмассовой системы, при поиске регулятора 2/1 [6, с. 81] (регулятора ПИД [6, с. 83]), обеспечивающего наилучшую устойчивость по Гурвицу, можно ограничиться регуляторами, у которых на правой вертикали корней характеристического полинома по крайней мере четыре корня.

А затем правую вертикаль с собранным на ней наибольшим числом корней двигаем влево, и эти корни начинают «склеиваться».

Лемма 2. При управлении двухмассовой системой регуляторами 2/1 [6, теорема 1, с. 85] (ПИД-регуляторами [6, теорема 2, с. 86]), у которых на правой вертикали 4 корня, при поиске наиболее устойчивых можно ограничиться теми, у которых на правой вертикали либо двукратная комплексная пара, либо двукратный вещественный корень и комплексная пара.

Лемма 3. При управлении двухмассовой системой регуляторами 2/1 [6, с. 87] (ПИД-регуляторами [6, с. 88]), у которых все корни на одной вертикали, при поиске наиболее устойчивых можно ограничиться теми, у которых на вертикали корней либо трёхкратный вещественный корень и комплексная пара, либо вещественный корень и двукратная комплексная пара.

Теорема 4 [6, теорема 4, с. 88]. Как в классе регуляторов 2/1, так и для ПИД при поиске наиболее устойчивых можно ограничиться двумя случаями: на правой вертикали – двукратная комплексная пара; на правой вертикали – двукратный вещественный корень и комплексная пара.

Контроллер 2/1: пятикратные корни. Рассмотрим полином $F(S)$ вида (5) со связью коэффициентов (7), у которого все корни совпадают, т.е. этот полином имеет пятикратный корень. Понятно, что этот корень вещественный. Обозначим его через x . Нас интересует только область устойчивости, т.е. $x < 0$. Тогда $F(S) = (S-x)^5 = S^5 - 5S^4x + 10S^3x^2 - 10S^2x^3 + 5Sx^4 - x^5$. Выпишем связь коэффициентов этого полинома: $5x^4 - 10x^2 + t = 0$. Видим, что полином в левой части полученного равенства составлен из чётных степеней x . Значит,

$$5X^2 - 10X + t = 0, \text{ где } X = x^2 > 0. \quad (9)$$

Равенство (9) можно переписать так:

$$5(X-1)^2 + t - 5 = 0, \text{ или } (X-1)^2 = (5-t)/5.$$

Очевидно, последнее равенство при $t > 5$ неразрешимо; при $t = 5$ есть только одно решение: $X = 1$, т.е. $x = -1$. Остаётся случай $t < 5$. В этом случае есть два решения $X = 1 \pm \sqrt{1-t/5}$. Оба они больше нуля. Поэтому для x также существует два решения: $x = -\sqrt{1 \pm \sqrt{1-t/5}}$. Наилучшая устойчивость достигается при $x = -\sqrt{1 + \sqrt{1-t/5}}$.

Лемма 5 [6, с. 89]. Регуляторы 2/1, для которых полином $F(S)$ имеет пятикратный корень, существуют только при $t \leq 5$, т.е. при $m_2/m_1 \leq 4$ (ведь $t = 1 + m_2/m_1$). При $t = 5$ в области устойчивости существует единственный полином $F(S)$, имеющий пятикратный корень. Этот корень $x = -1$. При $t < 5$ в области устойчивости существует ровно два полинома $F(S)$ с пятикратными корнями; наилучшая устойчивость достигается при $x = -\sqrt{1 + \sqrt{1-t/5}}$.

Контроллер ПИД: пятикратные корни. Рассмотрим полином $F(S)$ вида (5) со связями коэффициентов (7), (8), у которого все корни совпадают, т.е. этот полином имеет пятикратный корень. Понятно, что этот корень вещественный. Обозначим его через x . Нас интересует только область устойчивости, т.е. $x < 0$.

Полином имеет вид $F(S) = (S-x)^5$. Связи его коэффициентов: $5x^4 - 10x^2 + t = 0$, $-5x + 10x^3 - x^5 = 0$. Случай $x = 0$ нас не интересует. Поэтому связи выглядят так:

$$5x^4 - 10x^2 + t = 0, \quad 5 - 10x^2 + x^4 = 0. \quad (10)$$

Второе из уравнений (10) имеет два вещественных отрицательных решения: $x = -\sqrt{5-2\sqrt{5}} \approx -0,727$ и $x = -\sqrt{5+2\sqrt{5}} \approx -3,08$. Вычтем из первого из равенств (10) второе, помноженное на 5. Получим $40x^2 + t - 25 = 0$, или $t = 25 - 40x^2$. По этой формуле для каждого из двух найденных значений x вычислим значение параметра t . Получим соответственно: $t = -175 + 80\sqrt{5} \approx 3,9$ и $t = -175 - 80\sqrt{5}$. Видим, что второе из этих значений параметра t не подходит (оно отрицательное), а первое подходит: $t > 1$.

Лемма 6 [6, с. 90]. При управлении двухмассовой системой регулятором ПИД, в области устойчивости точки управления, для которых все корни полинома $F(S)$ сливаются в пятикратный корень, есть только при $t = -175 + 80\sqrt{5} \approx 3,9$ (т.е. при $m_2/m_1 = -176 + 80\sqrt{5} \approx 2,9$). Эта точка управления единственна и определяется пятикратным корнем: $x = -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \approx -0,727$.

На правой вертикали четырёхкратный вещественный корень. Введём обозначения: x – вещественное число, являющееся вещественной частью правой вертикали полинома $F(S)$; p – расстояние от пятого корня до правой вертикали; $P = -px$.

Теорема 7 [6, с. 91–92]. При управлении регулятором 2/1 среди полиномов $F(S)$, у которых на правой вертикали находится как минимум четырёхкратный корень, в области устойчивости при $t \leq 5$ (т.е. при $m_2/m_1 \leq 4$) достижимо управление, обеспечивающее наилучшую устойчивость по Гурвицу; предел устойчивости $x = -\sqrt{1 + \sqrt{1 - t/5}}$ тот же, что и у пятикратного корня. При $t = 5$ этот предел $x = -1$ достигается при любом $P \geq 0$. При $t > 5$ устойчивость, в отличие от случая пятикратных корней, есть. При этом $x > -1$, а наиболее устойчивое управление достигается только в пределе – при больших P (т.е. когда пятый корень убегает на минус бесконечность). И в пределе $x = -1$.

Теорема 8 [6, с. 95–96]. Для любой двухмассовой системы регуляторы ПИД с четырёхкратным корнем на правой вертикали существуют в точности при $t > -175 + 80\sqrt{5} \approx 3,884$. Нижняя граница – это значение параметра t , для которого существует пятикратный корень. Если для двухмассовой системы существует точка управления, для которой на правой вертикали находится четырёхкратный корень, то она единственна. При этом четырёхкратный корень x меняется в интервале $-0,727 \approx -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} < x < 1 - \sqrt{2} \approx -0,414$; зависимость параметра t от правой вертикали x есть рациональная функция $t(x) = -x^2(10 + 5x^2 + 4x^4 + x^6)/(1 - 6x^2 + x^4)$.

Все корни на одной вертикали: комплексная пара и трёхкратный вещественный корень. Введём обозначения: x , y – вещественная и мнимая компонента комплексной пары корней; $X = x^2$, $Y = y^2$.

Лемма 9 [6, с. 97–98]. Для регулятора 2/1:

- 1) при $t \leq 5$ устойчивость по сравнению со случаем пятикратного корня не лучше;
- 2) при $t > 5$ устойчивость в отличие от случая пятикратных корней есть с оценкой $X < 1/3$, т.е. $-0,577 \approx -\sqrt{3}/3 < x$. Эта оценка устойчивости недостижима: к ней можно только приближаться при достаточно больших Y . Но устойчивость всё равно будет хуже, чем в случае четырёхкратного корня на правой вертикали.

Лемма 10 [6, с. 100]. 1) При управлении двухмассовой системой регулятором ПИД точки управления, для которых все корни характеристического полинома находятся в области устойчивости и на одной вертикали, причём 3 из них сливаются в трёхкратный корень, существуют в точности при $5/3 < t < -175 + 80\sqrt{5} \approx 3,886$.

2) На правом конце этого интервала – двухмассовые системы, для которых существуют точки управления, у которых все корни характеристического полинома сливаются в пятикратный корень.

3) Для любого значения параметра t из этого интервала существует в точности одна точка управления, для которой корни характеристического полинома лежат на одной вертикали, причём 3 из них сливаются в трёхкратный корень. Эта точка определяется правой вертикалью x ; x – единственное решение уравнения $t = T(x)$, лежащее в интервале $(x_0, 0)$, где $x_0 = -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \approx 0,727$; $T(x) = (2x^6 + 6x^4 + 5x^2 + 5)/(3 - x^2)$ – монотонно убывающая на интервале $(x_0, 0)$ функция [5, с. 99] на рис. 1.

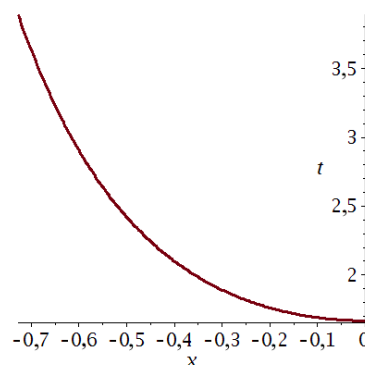


Рис. 1. Функция $t = T(x)$

2/1: на правой вертикали комплексная пара и двукратный вещественный корень

Лемма 11 [6, с. 103]. При выборе управления среди регуляторов 2/1, для которых на правой вертикали находится двукратный вещественный корень и комплексная пара, можно ограничиться

теми, для которых на правой вертикали будет или трёхкратный вещественный корень и комплексная пара, или четырёхкратный вещественный корень, и устойчивость управления от этого не ухудшится.

При этом ранее показано, что при выборе управления среди точек, для которых на правой вертикали трёхкратный вещественный корень и комплексная пара, устойчивость управления не лучше, чем среди точек, для которых на правой вертикали находится четырёхкратный вещественный корень.

Теорема 12. При выборе управления среди регуляторов 2/1, для которых на правой вертикали находится двукратный вещественный корень и комплексная пара, для обеспечения наилучшей устойчивости можно ограничиться теми из них, для которых на правой вертикали будет четырёхкратный вещественный корень.

ПИД: на правой вертикали комплексная пара и двукратный вещественный корень

Теорема 13 [7, параграф 20].

1) Для любого значения параметра $t > 1$ в классе полиномов $F(S)$ с двумя связями для регулятора ПИД существует устойчивый полином, у которого на правой вертикали ровно 4 корня: двукратный вещественный и комплексная пара.

2) При $1 < t \leq T_1$ для $T_1 = 80\sqrt{2} - 111 \approx 2,137$, наиболее левое положение правой вертикали – это единственное решение уравнения $t = t_1(x)$ на интервале $x_1 < x < 0$, где

$$t_1(x) = -(4x^5 + 8x^3 - x^2 + 6x - 1)/(1-x)^2, \quad x_1 = 1 - \sqrt{2} \approx -0,414.$$

3) При $T_1 \leq t \leq T_0$ для $T_0 = 80\sqrt{5} - 175 \approx 3,886$ наиболее левое положение правой вертикали – это единственное решение уравнения $t = t_0(x)$ на интервале $x_0 < x < x_1$, где

$$t = (2x^6 + 6x^4 + 5x^2 + 5)/(3-x^2), \quad x_0 = -\sqrt{5-2\sqrt{5}} \approx -0,727.$$

В этом положении на вертикали собираются все пять корней: трёхкратный вещественный корень и комплексная пара.

4) При $T_0 \leq t$ наиболее левое положение правой вертикали – это единственное решение уравнения $t = t_p(x)$ на интервале $x_0 < x < x_1$, где

$$t_p(x) = -x^2(x^6 + 4x^4 + 5x^2 + 10)/(x^4 - 6x^2 + 1).$$

В этом положении на корни на правой вертикали «сливаются» в четырёхкратный корень.

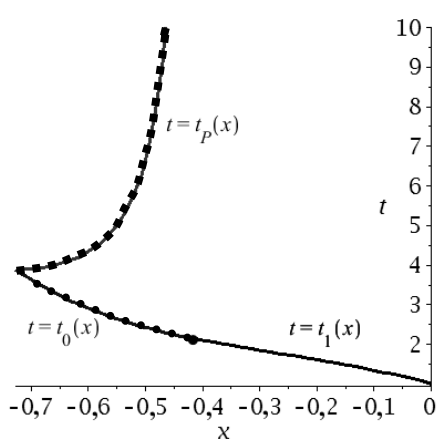


Рис. 2. Функции $t = t_1(x)$, $t = t_0(x)$, $t = t_p(x)$

Утверждения последней теоремы изображены на рис. 2.

Все корни на одной вертикали: двукратная комплексная пара и вещественный корень

Теорема 14 [7, с. 26–27]. 1) Для любой двух массовой системы, регуляторы 2/1, для которых все корни характеристического полинома находятся на одной вертикали, причём 4 корня образуют двукратную комплексную пару, существуют только при $t \leq 5$, т.е. при $m_2/m_1 \leq 4$.

2) Среди них наилучшее управление достигается, когда все корни характеристического полинома сливаются в пятикратный корень.

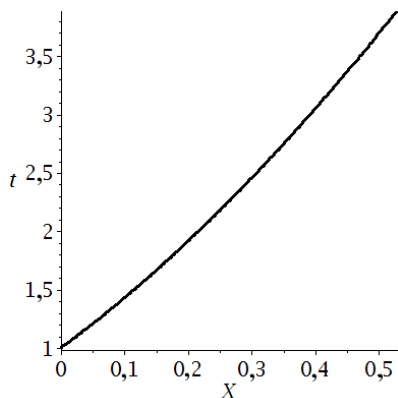


Рис. 3. $t = -7 - 8X + 8(1+X)^{3/2}$

3) Положение правой вертикали в случае пятикратного корня: $x = -\sqrt{1 + \sqrt{1-t/5}}$.

Теорема 15 [7, с. 30]. Для любой двухмассовой системы, регуляторы ПИД, обеспечивающие устойчивое движение, для которых все корни характеристического полинома находятся на одной вертикали, причём 4 из них образуют двукратную комплексную пару, существуют в точности при $1 < t \leq T_0 = -175 + 80\sqrt{5} \approx 3,884$, т.е. если параметр t не превосходит тот, что нужен для существования пятикратного корня. Такая точка управления единственна. Вертикаль её корней: $x = -\sqrt{X}$, где X – единственное вещественное число из интервала $0 < X \leq X_0$, где $X_0 = 5 - 2\sqrt{5} \approx 0,528$, удовлетворяющее уравнению $t = -7 - 8X + 8(1+X)^{3/2}$.

Полином из правой части последнего равенства изображён на рис. 3.

На правой вертикали двукратная комплексная пара

Лемма 16 [7, с. 31–32]. Среди регуляторов 2/1, для которых на правой вертикали характеристического полинома находится двукратная комплексная пара, при поиске наилучшего управления можно ограничиться регуляторами, для которых эта комплексная пара вырождается, т.е. когда на правой вертикали будет четырёхкратный корень.

Теорема 17 [7, с. 32]. При управлении регулятором 2/1, для обеспечения наибольшей устойчивости можно ограничиться теми, у которых на правой вертикали четырёхкратный корень.

Теорема 18 [7, с. 40]. При любом значении параметра $T = m_2/m_1$ существует регулятор ПИД, для которого на правой вертикали корней характеристического полинома находится двукратная комплексная пара. Среди них наибольшая устойчивость по Гурвицу достигается (в пределе) в единственной точке. При $T < 80\sqrt{5} - 176 \approx 2,886$ это точка, для которой все корни характеристического полинома находятся на одной вертикали (и 4 из них образуют двукратную комплексную пару). При $T = 80\sqrt{5} - 176 \approx 2,886$ это точка пятикратного корня. При $T > 80\sqrt{5} - 176 \approx 2,886$ это точка, для которой на правой вертикали характеристического полинома находится четырёхкратный корень (двукратная комплексная пара вырождается).

Наибольшая устойчивость

Теорема 19 [7, с. 43]. При одноканальном управлении двухмассовой системой регулятором 2/1, в случае, когда управляющая сила действует на ближайшую к основанию массу, наблюдаем за отклонением той же массы:

- 1) Для любой двухмассовой системы существует регулятор 2/1, обеспечивающий устойчивость.
- 2) У регуляторов 2/1, обеспечивающих наибольшую устойчивость двухмассовой системы, на правой вертикали характеристического полинома находится четырёхкратный корень.
- 3) При $m_2/m_1 \leq 4$ наибольшей устойчивости можно достичь, когда корни характеристического полинома сливаются в пятикратный корень, и это корень

$$x = -\sqrt{1 + \sqrt{1 - t/5}} \quad (11)$$

($t = 1 + m_2/m_1$; в единицах измерения $a = \sqrt{p_0} = \sqrt{n_2 k_2} = \sqrt{k_2/m_2}$).

- 4) При $m_2/m_1 > 4$ пределом устойчивости является $x = -1$ (в единицах измерения $\sqrt{k_2/m_2}$). К этому пределу можно приближаться, когда 4 корня характеристического полинома «сливаются» в четырёхкратный корень, а пятый корень стремится к минус бесконечности.

Теорема 20 [7, с. 43–44]. При одноканальном управлении двухмассовой системой регулятором 2/1, в случае, когда управляющая сила действует на ближайшую к основанию массу, наблюдаем за отклонением той же массы:

- 1) Для любой двухмассовой системы существует регулятор ПИД, обеспечивающий устойчивость.
- 2) Наибольшую устойчивость любой двухмассовой системы можно обеспечить регулятором ПИД, для которого на правой вертикали корней характеристического полинома находится двукратная комплексная пара.
- 3) Среди этих регуляторов ПИД наибольшую устойчивость обеспечивают: при $m_2/m_1 \leq 80\sqrt{5} - 176 \approx 2,886$ – регулятор, для которого все корни характеристического полинома находятся на одной вертикали (и 4 из них образуют двукратную комплексную пару); при $m_2/m_1 \geq 80\sqrt{5} - 176 \approx 2,886$ – регулятор, для которого на правой вертикали характеристического полинома находится четырёхкратный корень.

Методика исследований. Из приведённых выше утверждений виден следующий путь поиска наибольшей степени устойчивости:

1. Выписать передаточную функцию объекта, регулятора и характеристический полином.
2. Характеристические полиномы образуют некоторое множество полиномов с линейными связями. Выписать связи.
3. За счёт подбора единицы измерения корней упростить связи.
4. В классе полиномов со связями, двигая правую вертикаль влево, собрать на ней как можно больше корней. В данном случае на правой вертикали можно собрать 4 корня.

5. В классе полиномов со связями, двигая правую вертикаль с собранными корнями влево, «склеить» их, насколько удастся (сделать корни как можно большей кратности). В данном случае корни на правой вертикали могут склеиваться, например, в четырёхкратный корень, в пятикратный; в двукратную комплексную пару и вещественный корень на той же вертикали.

6. В каждом из полученных классов полиномов найти наиболее устойчивый.

7. Перебирая полученные классы полиномов, сравним их наиболее устойчивые и выберем среди них самый устойчивый.

8. Вернуться к исходным параметрам объекта и управления.

Вычисления: регулятор 2/1; $m_2/m_1 \leq 4$.

Рассмотрим пример: $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_2 = 1$.

1. Вычислим отношение масс и убедимся, что оно небольшое: $m_2/m_1 = 1 \leq 4$.

2. Вычислим параметр t : $t = 1 + m_2/m_1 = 1 + 1 = 2$.

3. По формуле (11) вычислим пятикратный корень: $x = -\sqrt{1 + \sqrt{1 - t/5}} = -\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2/5}} = -\sqrt{1 + \sqrt{3/5}} \approx -1,332$.

4. Вычислим полином $F(S)$: $F(S) = (S - x)^5 \approx S^5 + 6,66 S^4 + 17,74 S^3 + 23,63 S^2 + 15,74 S + 4,192$.

5. Вычислим обратные к массам: $n_1 = 1/m_1 = 1$, $n_2 = 1/m_2 = 1$.

6. По формуле (1) вычислим параметры p_i : $p_0 = n_2 k_2 = 1$, $p_1 = n_1 k_1 = 1$, $p_2 = n_1 k_2 = 1$.

7. Вычислим единицу измерения корней: $a = \sqrt{p_0} = 1$.

8. Перейдём к исходным корням характеристического полинома: $s = Sa = S$.

9. По формуле $f(s) = a^5 F(S) = a^5 F(s/a)$ выпишем исходный характеристический полином:

$$f(s) = F(S) = (S - x)^5 \approx S^5 + 6,66 S^4 + 17,74 S^3 + 23,63 S^2 + 15,74 S + 4,192.$$

10. Выпишем коэффициенты характеристического полинома:

$$k_1 = 6,66, k_2 = 17,74, k_3 = 23,63, k_4 = 15,74, k_5 = 4,192.$$

11. Воспользуемся формулами (2), (3) и найдём коэффициенты контроллера 2/1:

$$c = 12,778, b_0 = -8,586, b_1 = 14,74, b_2 = -6,118.$$

12. Выпишем регулятор: $N_c/D_c = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{s + c} = \frac{-8,586 + 14,74 s - 6,118 s^2}{s + 12,778}$.

Заключение. Это исследование – о максимальной степени устойчивости произвольной одноканальной двухмассовой системы при управлении ПИД-регулятором и его обобщением (числитель передаточной функции которого – полином степени не более чем 2, знаменатель – полином степени 1), в случае, когда управляющая сила действует на массу, ближайшую к основанию, и контролируем отклонение той же массы. Приведён пример вычисления максимальной степени устойчивости и обеспечивающего её регулятора. Данное исследование и работы [6, 7] могут служить образцом и основой методики исследования и вычисления наибольшей степени и регулятора пониженного порядка, обеспечивающего эту устойчивость, и для других классов управляемых одноканальных систем пониженного порядка.

Литература

1. Поляк Б.Т. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 7–46.
2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов. – Л.; М.: ОНТИ, 1935. – 391 с.
3. Шоба Е.В. Модальный синтез многоканального регулятора пониженного порядка с использованием «обратной» производной / Е.В. Шоба, А.А. Воевода, В.В. Вороной // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 1(46). – С. 15–22.
4. Киселев О.Н. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H^∞ и по критерию максимальной робастности / О.Н. Киселев, Б.Т. Поляк // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 3. – С. 119–130.

5. Шубладзе А.М. Достаточные условия оптимальности структур в системах максимальной степени устойчивости произвольного вида // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 4. – С. 43–57.
6. Корюкин А.Н. Предел устойчивости по Гурвицу двухмассовой системы с ПИД-регулятором. Ч. 1. // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 3(69). – С. 71–104.
7. Корюкин А.Н. Предел устойчивости по Гурвицу двухмассовой системы с ПИД-регулятором. Ч. 2. // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 4(70). – С. 13–44.
8. Корюкин А.Н. Предел устойчивости двухмассовой системы с обобщённым ПИД-регулятором // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 3(48). – С. 178–184.
9. Корюкин А.Н. Наибольший запас устойчивости для одноканальной двухмассовой системы с обобщённым ПИД-регулятором // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 4 (49). – С. 178–185.
10. Корюкин А.Н. Наибольший запас устойчивости трёхмассовой системы с регулятором третьего порядка. Ч. 1 // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 3(73). – С. 4–40.
11. Корюкин А.Н. Наибольший запас устойчивости трёхмассовой системы с регулятором третьего порядка. Ч. 2 // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 4(74). – С. 13–50.
12. Корюкин А.Н. Обобщённый ПИД-регулятор двухмассовой системы с наибольшим запасом устойчивости // Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 3(52). – С. 10–17.
13. Воевода А.А. О понижении порядка стабилизирующего управления на примере двойного перевёрнутого маятника / А.А. Воевода, А.Н. Корюкин, А.В. Чехонадских // Автометрия. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 69–83.

Корюкин Анатолий Николаевич

Канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник Института математики им. Соболева, г. Новосибирск

Тел.: 8 (383-3) 46-56-88

Эл. почта: koryukin@sibmail.ru

Воевода Александр Александрович

Д-р техн. наук, профессор каф. автоматки Новосибирского государственного технического университета

Тел.: 8 (383-3) 46-56-88

Эл. почта: ucit@ucit.ru

Koryukin A.N., Boevoda A.A.

The greatest degree of the stability of a two-mass system for regulators of the lowered order

This work continues a research of the greatest (optimum, limiting, maximum) degrees of stability of any single-channel two mass systems. The management is carried out by a PID-control and its generalization, the numerator of transfer function is a degree polynom no more than 2, and a denominator – a polynom of degree 1. The operating force is attached to the mass closest to the motionless basis.

The exit is a deviation of the same mass. The friction is small. The research was carried out for any object from all class of operated objects listed above. For generalized PID-controls by search of the greatest stability it is possible to be limited to controls, for which on the right vertical of the characteristic polynom there is a quadruple root; for PID-controls with double complex pair on the right vertical. It is given an example calculations of the greatest degree of stability, roots of a characteristic polynom, the polynom, the control providing the greatest stability. This work can form a sample and a basis of a methodology of research and calculation of the greatest degree of stability and the controls of the lowered order providing this stability, and for other classes of operated single-channel systems of the lowered order.

Keywords: modal synthesis, regulators of the lowered order, stability according to Gurvits, the greatest degree of stability, maximum degree of stability, limiting degree of stability.