УДК 519.872

С.А. Матвеев, А.Н. Моисеев, А.А. Назаров

Применение метода начальных моментов для исследования многофазной системы массового обслуживания GI/(M/∞)^K

Представлено исследование многофазной системы массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком, неограниченным числом приборов и экспоненциальным обслуживанием на фазах. Получены начальные моменты первого и второго порядков для числа заявок, находящихся на фазах системы в стационарном режиме. Проведено сравнение с полученными ранее асимптотическими формулами для многофазных систем с высокоинтенсивным входящим потоком.

Ключевые слова: многофазная система массового обслуживания, рекуррентный поток, метод начальных моментов, неограниченное число обслуживающих приборов.

Системы и сети массового обслуживания [1] являются одним из самых популярных инструментов для моделирования и анализа современных телекоммуникационных сетей [2] и систем распределенной обработки информации [3]. В настоящей работе рассматривается многофазная система с рекуррентным входящим потоком, которая предполагает последовательную обработку сообщений на устройствах (фазах) системы. Применение такой модели к описанию реальной системы обработки данных представлено в [3].

В работе [4] получена многомерная гауссовская аппроксимация для распределения вероятностей числа заявок на фазах системы в стационарном режиме функционирования в условиях высокой интенсивности входящего рекуррентного потока. В настоящей работе проведено сравнение допредельных результатов с асимптотическими для случая экспоненциального распределения времени обслуживания на фазах, определена область применимости гауссовской аппроксимации.

Математическая модель. Рассмотрим *K*-фазную систему массового обслуживания с входящим рекуррентным потоком, неограниченным числом приборов и экспоненциальным обслуживанием на фазах системы. Заявка входящего потока поступает на обслуживание на первую фазу системы. На *k*-й фазе заявка обслуживается в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ_k ($k=\overline{1,K}$). По окончании обслуживания на *k*-й фазе заявка переходит на следующую, ($k+1$)-ю, фазу системы для дальнейшего обслуживания ($k=\overline{1,K-1}$). По окончании обслуживания на последней, *K*-й, фазе заявка покидает систему.

Пусть $A(x)$ – функция распределения длин интервалов между последовательным поступлением заявок входящего рекуррентного потока. Интенсивность такого потока λ определяется выражением [4]

$$\lambda=\left\{\int_0^\infty\left[1-A(x)\right]dx\right\}^{-1}.$$

Обозначим через $i_k(t)$ количество заявок, обслуживающихся на *k*-й фазе системы в момент времени t ($k=\overline{1,K}$). Ставится задача определения начальных моментов первого и второго порядков для многомерного случайного процесса $\mathbf{i}(t)=\left(i_1(t)\ \ldots\ i_K(t)\right)^T$ в стационарном режиме функционирования системы.

Система уравнений Колмогорова. Пусть $z(t)$ – длина интервала времени от момента t до момента поступления следующей заявки входящего потока. Тогда многомерный случайный процесс $\{\mathbf{i}(t), z(t)\}$ будет марковским [5]. Для его распределения вероятностей $P(\mathbf{i},z,t)=\mathrm{P}\left\{\mathbf{i}(t)=\mathbf{i}, z(t)<z\right\}$ можно записать следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(\mathbf{i},z,t)}{\partial t}=\frac{\partial P(\mathbf{i},z,t)}{\partial z}-\frac{\partial P(\mathbf{i},0,t)}{\partial z}-\sum_{k=1}^{K}P(\mathbf{i},z,t)\cdot i_k\mu_k+\frac{\partial P(\mathbf{i}-\mathbf{e}_1,0,t)}{\partial z}A(z)+$$

$$+\sum_{k=1}^{K-1} P(\mathbf{i}+\mathbf{e}_k-\mathbf{e}_{k+1},z,t)\cdot(i_k+1)\mu_k+P(\mathbf{i}+\mathbf{e}_K,z,t)\cdot(i_K+1)\mu_K \quad (1)$$

для всех неотрицательных значений **i** и z (предполагается $P(\mathbf{i},z,t)=0$, если хотя бы одна компонента вектора **i** отрицательна). Здесь через $\mathbf{e}_k$ обозначен вектор-столбец, все элементы которого равны нулю, кроме элемента под номером k, равного единице.

Введем частичную характеристическую функцию $H(\mathbf{u},z,t)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_K=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1+\ldots+ju_K i_K}P(\mathbf{i},z,t)$ векторного аргумента **u** (здесь $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица). Для нее (1) перепишется в виде уравнения

$$\frac{\partial H(\mathbf{u},z,t)}{\partial t}=\frac{\partial H(\mathbf{u},z,t)}{\partial z}+\frac{\partial H(\mathbf{u},0,t)}{\partial z}\left[e^{ju_1}A(z)-1\right]+j\sum_{k=1}^{K-1}\mu_k\frac{\partial H(\mathbf{u},z,t)}{\partial u_k}\left[1-e^{ju_{k+1}-ju_k}\right]+j\mu_K\frac{\partial H(\mathbf{u},z,t)}{\partial u_K}\left[1-e^{-ju_K}\right].$$

В стационарном режиме функционирования системы для функции $H(\mathbf{u},z)\equiv H(\mathbf{u},z,t)$ это уравнение примет вид

$$\frac{\partial H(\mathbf{u},z)}{\partial z}+\frac{\partial H(\mathbf{u},0)}{\partial z}\left[e^{ju_1}A(z)-1\right]+j\sum_{k=1}^{K-1}\mu_k\frac{\partial H(\mathbf{u},z)}{\partial u_k}\left[1-e^{ju_{k+1}-ju_k}\right]+j\mu_K\frac{\partial H(\mathbf{u},z)}{\partial u_K}\left[1-e^{-ju_K}\right]=0. \quad (2)$$

Моменты первого порядка. Для нахождения начальных моментов воспользуемся методикой, изложенной в [6]. Введем функции $\varphi_k(z)$, определяемые выражениями

$$\left.\frac{\partial H(\mathbf{u},z)}{\partial u_k}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}}=j\cdot\varphi_k(z) \quad (3)$$

для $k=\overline{1,K}$. Известно [6], что начальные моменты первого порядка $m_k^{(1)}$ определяются выражениями $m_k^{(1)}=\varphi_k(\infty)$. Для их нахождения продифференцируем уравнение (2) по каждой из переменных u_k, получим следующую систему из K дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},z)}{\partial z\partial u_1}+\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},0)}{\partial z\partial u_1}\left[e^{ju_1}A(z)-1\right]+j\frac{\partial H(\mathbf{u},0)}{\partial z}e^{ju_1}A(z)+j\sum_{k=1}^{K-1}\mu_k\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},z)}{\partial u_k\partial u_1}\left[1-e^{ju_{k+1}-ju_k}\right]+$$

$$+j^2\mu_1\frac{\partial H(\mathbf{u},z)}{\partial u_1}e^{ju_2-ju_1}+j\mu_K\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},z)}{\partial u_K\partial u_1}\left[1-e^{-ju_K}\right]=0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},z)}{\partial z\partial u_l}+\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},0)}{\partial z\partial u_l}\left[e^{ju_1}A(z)-1\right]+j\sum_{k=1}^{K-1}\mu_k\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},z)}{\partial u_k\partial u_l}\left[1-e^{ju_{k+1}-ju_k}\right]+j^2\mu_l\frac{\partial H(\mathbf{u},z)}{\partial u_l}e^{ju_{l+1}-ju_l}-$$

$$-j^2\mu_{l-1}\frac{\partial H(\mathbf{u},z)}{\partial u_{l-1}}e^{ju_l-ju_{l-1}}+j\mu_K\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},z)}{\partial u_K\partial u_l}\left[1-e^{-ju_K}\right]=0,\ 2\le l\le K-1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},z)}{\partial z\partial u_K}+\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},0)}{\partial z\partial u_K}\left[e^{ju_1}A(z)-1\right]+j\sum_{k=1}^{K-1}\mu_k\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},z)}{\partial u_k\partial u_K}\left[1-e^{ju_{k+1}-ju_k}\right]-j^2\mu_{K-1}\frac{\partial H(\mathbf{u},z)}{\partial u_{K-1}}e^{ju_K-ju_{K-1}}+$$

$$+j\mu_K\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},z)}{\partial u_K^2}\left[1-e^{-ju_K}\right]+j^2\mu_K\frac{\partial H(\mathbf{u},z)}{\partial u_K}e^{-ju_K}=0. \quad (6)$$

Подставляя сюда $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ и учитывая, что [4] $\left.\frac{\partial H(u,z)}{\partial z}\right|_{\substack{\mathbf{u}=\mathbf{0}\\ z=0}}=\lambda$, с использованием выражений (3) получаем следующую систему дифференциальных уравнений относительно функций $\varphi_k(z)$:

$$\begin{cases}\varphi_1'(z)+\varphi_1'(0)\left[A(z)-1\right]+\lambda A(z)-\mu_1\varphi_1(z)=0,\\ \varphi_k'(z)+\varphi_k'(0)\left[A(z)-1\right]+\mu_{k-1}\varphi_{k-1}(z)-\mu_k\varphi_k(z)=0,\ \overline{k=2,K}.\end{cases}$$

Для этой системы применим преобразования Лапласа–Стилтьеса

$$A^*(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha z}dA(z),\qquad \varphi_k^*(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha z}d\varphi_k(z),\ k=\overline{1,K}, \quad (7)$$

получим

$$\begin{cases}(\alpha-\mu_1)\varphi_1^*(\alpha)+\varphi_1'(0)\left[A^*(\alpha)-1\right]+\lambda A^*(\alpha)=0,\\ (\alpha-\mu_k)\varphi_k^*(\alpha)+\varphi_k'(0)\left[A^*(\alpha)-1\right]+\mu_{k-1}\varphi_{k-1}^*(\alpha)=0, \overline{k=2,K}.\end{cases} \tag{8}$$

Подставляя сюда $\alpha=0$ и учитывая, что $A^*(0)=1$, $\varphi_k^*(0)=\varphi_k(\infty)=m_k^{(1)}$, получаем выражения для первых начальных моментов состояния рассматриваемой системы массового обслуживания:

$$m_k^{(1)}=\frac{\lambda}{\mu_k},\ k=\overline{1,K}. \tag{9}$$

Моменты второго порядка. Введем функции $\psi_{kl}(z)$, определяемые выражениями

$$\left.\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},z)}{\partial u_k\,\partial u_l}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}}=j^2\cdot\psi_{kl}(z) \tag{10}$$

для $k,l=\overline{1,K}$. Известно [6], что начальные моменты второго порядка $m_{kl}^{(2)}$ определяются равенствами $m_{kl}^{(2)}=\psi_{kl}(\infty)$. Для их нахождения выполним процедуру, аналогичную описанной выше, а именно продифференцируем каждое уравнение системы (4)–(6) по каждой из переменных u_k, $k=\overline{1,K}$. В результате получим систему из K^2 дифференциальных уравнений, которую здесь опустим для краткости изложения. В ней также выполним подстановку $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ и воспользуемся обозначениями (10). Далее применим преобразования (7), а также преобразование Лапласа–Стилтьеса

$$\psi_{kl}^*(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha z}d\psi_{kl}(z),\ k,l=\overline{1,K}.$$

Подставляя $\alpha=0$ и учитывая, что $\psi_{kl}^*(0)=\psi_{kl}(\infty)=m_{kl}^{(2)}$, получаем следующие рекуррентные выражения для начальных моментов второго порядка:

$$m_{11}^{(2)}=\frac{m_1^{(1)}}{1-A^*(\mu_1)},$$

$$m_{12}^{(2)}=\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\left[\frac{\mu_1\varphi_1^*(\mu_2)}{1-A^*(\mu_2)}+\frac{\lambda A^*(\mu_1)}{1-A^*(\mu_1)}\right],$$

$$m_{1l}^{(2)}=\frac{1}{\mu_1+\mu_l}\left[\frac{\mu_{l-1}\varphi_{l-1}^*(\mu_l)}{1-A^*(\mu_l)}+\mu_{l-1}m_{1,l-1}^{(2)}\right]\ \text{для}\ l=\overline{3,K}, \tag{11}$$

$$m_{kl}^{(2)}=\frac{1}{\mu_k+\mu_l}\left[\mu_{k-1}m_{k-1,l}^{(2)}+\mu_{l-1}m_{k,l-1}^{(2)}-\lambda\left(\delta_{k,l-1}+\delta_{k,l+1}\right)\right]\ \text{для}\ k,l=\overline{2,K}\ \text{и}\ k\neq l,$$

$$m_{kk}^{(2)}=\frac{\mu_{k-1}}{\mu_k}m_{k-1,k}^{(2)}+m_k^{(1)}\ \text{для}\ k=\overline{2,K},$$

$$m_{kl}^{(2)}=m_{lk}^{(2)}\ \text{для любых}\ k\ \text{и}\ l.$$

Здесь δ_{kl} – символ Кронекера, а функции $\varphi_k^*(\alpha)$ достаточно просто выражаются в явном виде из (8).

Нетрудно показать, что для простейшего входящего потока, полученные выражения дают известные в теории массового обслуживания результаты [1, 7]. В частности, многомерное распределение состояния системы факторизуется, т.е. значения числа заявок в системе на разных фазах являются независимыми. А само число заявок на каждой фазе описывается распределением Пуассона. Действительно, в случае простейшего входящего потока $A(x)=1-e^{-\lambda x}$ и соответственно $A^*(\alpha)=\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}$. Тогда из (8) получаем $\varphi_1^*(\alpha)=\frac{\lambda^2}{\mu_1(\lambda+\alpha)}$. Подставляя эти выражения в (11), получаем

$$m_{11}^{(2)} = \frac{\lambda^2}{\mu_1^2} + \frac{\lambda}{\mu_1} = \left(m_1^{(1)}\right)^2 + m_1^{(1)},$$

$$m_{12}^{(2)} = \frac{\lambda}{\mu_1} \cdot \frac{\lambda}{\mu_2} = m_1^{(1)} \cdot m_2^{(1)}$$

и т.д.

Сравнение с асимптотическими результатами. В работе [4] показано, что в условиях высокой интенсивности входящего потока многомерное распределение вероятностей состояний многофазной системы массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком и произвольным распределением времени обслуживания на фазах в стационарном режиме функционирования аппроксимируется многомерным гауссовским распределением со следующими параметрами. Компоненты вектора средних равны

$$a_k = \lambda b_k, \tag{12}$$

где b_k – среднее время обслуживания на k-й фазе системы. Значения дисперсий определяются выражениями

$$D_k = a_k + \kappa \int_0^\infty \left[B_k^*(t) - B_{k-1}^*(t)\right]^2 dt, \tag{13}$$

где $B_k^*(t) = \left(B_1 * ... * B_k\right)(t)$ есть свертка функций распределения времени обслуживания $B_k(t)$, $B_0^*(t) = 1$, $B_1^*(t) = B_1(t)$. Величина κ определяется выражением

$$\kappa = \lambda^3\left(\sigma^2 - a^2\right),$$

где a и σ^2 – соответственно математическое ожидание и дисперсия длин интервалов между поступлением заявок входящего потока. Ковариации числа заявок на разных фазах равны

$$R_{kl} = \kappa \int_0^\infty \left[B_k^*(t) - B_{k-1}^*(t)\right]\left[B_l^*(t) - B_{l-1}^*(t)\right] dt. \tag{14}$$

Выполним сравнение полученных в настоящей работе допредельных результатов с результатами асимптотической гауссовской аппроксимации для многофазной системы с экспоненциальным распределением времени обслуживания. Очевидно, что в этом случае формулы для средних (9) и (12) дают одинаковый результат.

Произвести сравнение выражений для вторых моментов (11) и (13)–(14) в аналитической форме не представляется возможным. Поэтому оценим погрешности значений асимптотических вторых моментов по сравнению с допредельными, выполнив численные реализации. Для этого рассмотрим четырёхфазную систему массового обслуживания с входящим рекуррентным потоком, длины интервалов между последовательными поступлениями заявок в котором имеют гамма-распределение с параметрами формы и масштаба, соответственно равными α (его значение определим позже) и $\beta = N \cdot \alpha$, где $N > 0$ – некоторый числовой параметр. Для такого потока интенсивность составляет $\lambda = \frac{\beta}{\alpha} = N$. Таким образом, увеличивая значение N, мы можем увеличить интенсивность входящего потока без изменения общего характера (формы) распределения длин интервалов между поступлением заявок. Длительность обслуживания на каждой фазе системы распределена по экспоненциальному закону с соответствующим параметром:

$$\mu_1 = 0{,}5, \qquad \mu_2 = 1, \qquad \mu_3 = 2, \qquad \mu_4 = 4.$$

Численные расчеты по формулам (11), (13), (14) показывают, что для параметра формы $\alpha > 0{,}4$ относительная погрешность асимптотических вторых моментов не превышает 2% даже для входящего потока низкой интенсивности ($N = 1$). При уменьшении параметра α погрешность асимптотических вторых моментов сильно увеличивается при низкой интенсивности входящего потока. В таблице приведены максимальные значения относительной погрешности вычисления вторых моментов по аппроксимационным формулам (13)–(14) для входящего потока с параметрами $\alpha = 0{,}1$ и $\alpha = 0{,}01$.

Динамика изменения погрешности аппроксимационных формул для вторых моментов при увеличении интенсивности входящего потока

Интенсивность входящего потока N	1	5	10	20	50	100
Относительная погрешность при $\alpha = 0{,}1$, %	21,10	3,71	1,34	0,43	0,09	0,03
Относительная погрешность при $\alpha = 0{,}01$, %	102,62	43,84	25,60	12,97	4,13	1,46

Заключение. В работе представлено исследование многофазной системы массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком, неограниченным числом приборов и экспоненциальным распределением времени обслуживания на фазах, выполненное методом начальных моментов. Получены формулы для вычисления первых и вторых начальных моментов числа заявок на фазах системы в стационарном режиме функционирования. Проведено сравнение этих результатов с полученными ранее асимптотическими формулами для многофазных систем с высокоинтенсивным входящим рекуррентным потоком. Показано, что асимптотические формулы для первых моментов дают точный результат. Для вторых моментов получены значения погрешностей асимптотических результатов для различных числовых примеров. Аналогичные исследования могут быть выполнены для многофазных систем и с другими типами входящих потоков – MMPP [8], MAP [9], полумарковским [10].

Полученные в работе результаты могут использоваться для вычисления первого и второго начальных моментов стационарного распределения числа заявок в системе, значения которых необходимы для расчета оптимального числа приборов систем распределенной обработки данных на основе гауссовской аппроксимации [11].

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 1.511.2014/К.

Литература

1. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – 4-е изд., испр. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 400 с.

2. Вишневский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.

3. Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных / В.В. Грачев, А.Н. Моисеев, А.А. Назаров, В.З. Ямпольский // Доклады ТУСУРа. – 2012. – № 2 (26), ч. 2. – С. 248–251.

4. Моисеев А.Н. Асимптотический анализ многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком / А.Н. Моисеев, А.А. Назаров // Автометрия. – 2014. – Т. 50, № 2. – С. 67–76.

5. Назаров А.А. Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособие / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.

6. Назаров А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, С.П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

7. Бочаров П.П. Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.

8. Moiseev A. Investigation of the High Intensive Markov-Modulated Poisson Process / A. Moiseev, A. Nazarov // Proc. Of The International Conference On Application Of Information And Communication Technology And Statistics In Economy And Education (ICAICTSEE-2012). – Sofia: University Of National and World Economy, 2012. – P. 72–77.

9. Моисеев А.Н. Исследование высокоинтенсивного MAP-потока / А.Н. Моисеев, А.А. Назаров // Изв. Том. политех. ун-та. – 2013. – Т. 322, № 2. – С. 16–18.

10. Моисеев А.Н. Асимптотический анализ высокоинтенсивного полумарковского потока событий / А.Н. Моисеев, А.А. Назаров // Доклады ТУСУРа. – 2013. – № 3 (29). – С. 109–115.

11. Nazarov A. Calculation of the probability that a Gaussian vector falls in the hyperellipsoid with the uniform density / A. Nazarov, A. Moiseev // Proc. of the 3rd International Conference On Application Of Information And Communication Technology And Statistics In Economy And Education (ICAICTSEE-2013). – Sofia: University Of National and World Economy, 2013. – P. 519–526.

Матвеев Сергей Александрович
Ведущий специалист ООО «Инком», г. Томск
Тел.: 8 (382-2) 51-75-30
Эл. почта: incom@cc.tpu.edu.ru

Моисеев Александр Николаевич
Канд. техн. наук, доцент каф. программной инженерии
Национального исследовательского Томского государственного университета (НИТГУ)
Тел.: 8 (382-2) 52-94-96
Эл. почта: moiseev.tsu@gmail.com

Назаров Анатолий Андреевич
Д-р техн. наук, профессор, зав. каф. теории вероятностей и математической статистики НИТГУ
Тел.: 8 (382-2) 52-95-99
Эл. почта: nazarov.tsu@gmail.com

Matveev S.A., Moiseev A.N., Nazarov A.A.

Investigation of the multi-stage queueing system $GI/(M/\infty)^K$ by means of the raw moment method

The paper presents an investigation of the multi-stage queueing system with renewal arrival process, infinite number of servers and exponential service times at the system stages. Expressions for the first- and the second-order raw moments for the number of customers at the system stages are obtained. We compared the obtained results with the results of previous investigations under asymptotic conditions.

Keywords: multistage queueing system, renewal arrival process, method of raw moments, infinite-server system.