УДК 621.372.2

**Р.И. Аширбакиев, А.О. Мелкозеров, Ев.В. Лежнин**

# Математический метод моделирования печатных цепей с помощью графов

Разработан математический метод моделирования цепей печатных плат с помощью графов. Описаны построение модели, гомеоморфное преобразование и тестирование моделей. Выполнена проверка моделей различных печатных трасс печатной платы. Метод позволяет автоматизировать построение принципиальной схемы для квазистатического анализа печатных цепей.

**Ключевые слова:** печатная плата, графы, гомеоморфное преобразование, тестирование.

Необходимость моделирования печатных плат обусловлена тем, что выполнять натурные испытания становится всё более дорого (необходимы оборудование, дополнительный персонал, помещение). Математическое моделирование цепей печатных плат предполагает построение математических моделей цепей, с помощью которых можно исследовать электрофизические явления в печатных цепях. Математические модели позволяют создать принципиальную схему с учетом всех необходимых параметров цепи для расчета формы сигнала. Обзор существующих исследований показывает [1], что вопросы моделирования цепей печатных плат для квазистатического анализа освещены недостаточно полно.

Цель работы – усовершенствовать процесс квазистатического анализа путем разработки математического метода моделирования цепей печатных плат с помощью графов.

Цепь печатной платы представляет собой набор соединенных последовательно отрезков проводников с разветвлениями. Для контроля паразитных явлений в цепи с помощью квазистатического анализа необходимо при моделировании учитывать проводники, которые не соединены с рассматриваемой цепью, но проходят в непосредственной близости от отрезков цепи [2]. Для этого вдоль цепи выполняется нарезка печатной платы на поперечные сечения. Ширина поперечного сечения определяет, на каком расстоянии от рассматриваемой цепи проводники учитываются при анализе. На рис. 1, *а* представлена цепь, нарезанная на поперечные сечения (ширина задается параметром *s*), шаг нарезки задается параметром *d* (расстояние, на котором поперечные сечения находятся друг от друга). Таким образом, учитываются все проводники, которые находятся в пределах задаваемого параметра *s*. Полученную модель цепи с проводниками, которые влияют на цепь, можно математически описать с помощью графа. Однако, как видно на рис. 1, *а*, некоторые поперечные сечения повторяются. Эти поперечные сечения можно объединить в одну линию передачи. Таким образом, математическую модель в виде графа нужно преобразовать в модель, которая содержит лишь уникальные поперечные сечения (рис. 1, *б*).

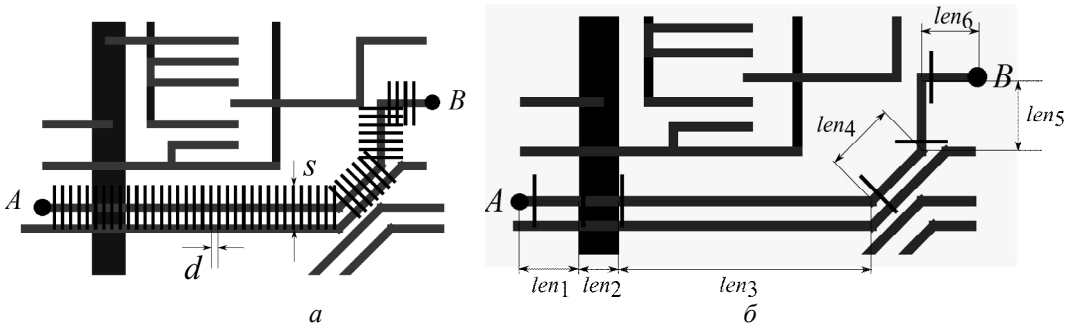


Рис. 1. Цепь, нарезанная на поперечные сечения для учета проводников в пределах параметра *s* – *а*; нарезанная на уникальные поперечные сечения – *б*

Для получения итоговой математической модели для исходного графа будут использованы уравнения, справедливые для транспортных сетей (flow network) [3]. Пусть сеть задается ориентирован-

ным графом $G = (V, E)$, в котором каждое ребро, принадлежащее множеству $E$, имеет пропускную способность $c(u, v) > 0$. Если ребро не принадлежит множеству $E$, то пропускная способность равна нулю. В сети выделяют источник $s$ и сток $t$. Каждая вершина, принадлежащая множеству $V$, лежит на пути от источника к стоку. Потоком является действительная функция $f: V \times V \to \mathbf{R}$, которая удовлетворяет следующим условиям: ограниченность пропускной способности

$$f(u, v) \le c(u, v), \text{ где } v, u \in V,$$

асимметричность

$$f(u, v) = -f(v, u), \text{ где } v, u \in V,$$

сохранение потока

$$\sum_{v \in V} f(u,v) = 0, \text{ где } u \in V - \{s, t\}.$$

Величина потока определяется как

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v),$$

где $|f|$ в данном случае обозначает величину потока. В задачах о максимальном потоке требуется по заданной сети определить величину максимального потока, идущего из вершины $s$ в вершину $t$. Исходя из этой математической модели сети будут выполняться математическое моделирование и гомеоморфное преобразование с целью построения итоговой математической модели.

Цепь печатной платы представима множеством прямых отрезков $SG = \{L_i \mid 1 \le i \le m\}$, соединенных между собой концами, где $m$ – количество простых отрезков в цепи, $L = (x, y, x_1, y_1, w, t)$ – кортеж, состоящий из компонентов, которые описывают координаты начала и конца отрезка, его толщину и ширину. Каждый отрезок цепи имеет уникальный идентификатор $id$.

Поперечные сечения делаются перпендикулярно отрезкам печатной цепи и представляют собой множество $SC = \{T_i \mid 1 \le i \le n\}$, элементы которого описывают пересекаемые отрезки, где $n$ – количество отрезков, которые пересекает поперечное сечение, $T = (id, i, x, y, t, w)$ – кортеж, который описывает сечение одного отрезка в поперечном сечении, где $id$ – уникальный идентификатор отрезка; $i$ – номер слоя; $x$, $y$ – координаты левого нижнего угла сечения отрезка в поперечном сечении; $t$ – толщина проводника; $w$ – ширина проводника.

Таким образом, печатная цепь представляется множеством упорядоченных поперечных сечений $SSC = \{P_i \mid 1 \le i \le N\}$, где $N$ – количество всех поперечных сечений; $P = (j, d, SC)$ – кортеж, который состоит из следующих компонентов: $j$ – номер отрезка цепи; $d$ – расстояние от начала $j$-го отрезка; $SC$ – множество элементов поперечного сечения.

Поскольку объектов математического моделирования множество и между ними существуют связи, то целесообразно использовать графы. Зададим общий граф $G = (V, E)$, где $V$ – множество вершин, $E$ – множество ребер. Каждая вершина соответствует сечению отрезка в отдельности. Поэтому чтобы отделить вершины различных поперечных сечений, будем использовать множества $V_i$, где $1 \le i \le |SSC|$. При этом существует биективная функция $f: V_i \leftrightarrow T$, где $T \in P_i$. Таким образом, множество всех вершин $V$ и ребер $E$ определяется как

$$V = \bigcup_{1 \le i \le |SSC|} V_i, \quad E = \left\{(u,v) \mid u \in V_i, v \in V_{i+1}, id_i = id_{i+1}, id_i \in f^{-1}(u), id_{i+1} \in f^{-1}(v)\right\}.$$

Рассмотрим пример моделирования печатной цепи (однослойной печатной платы), представленной на рис. 2, где вертикальными линиями показаны места поперечных сечений, а печатные трассы оканчиваются круглыми контактными площадками.

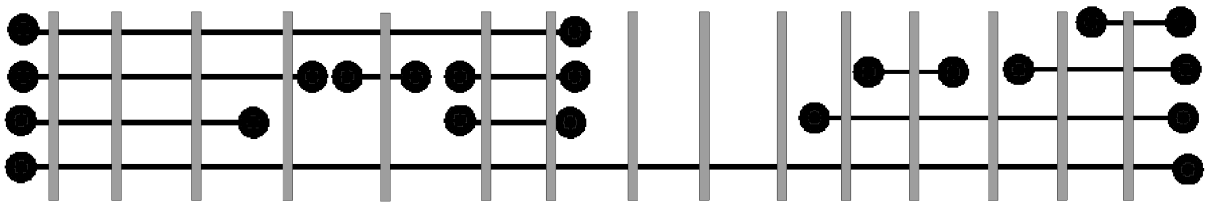

Рис. 2. Геометрическая модель печатной цепи с сечениями (выбрана нижняя цепь)

На рис. 3 представлена графовая модель печатной цепи из рис. 2, пунктирными прямоугольниками выделены подмножества вершин графа. Между всеми соседними подмножествами существуют ребра. Граф является ориентированным, все компоненты связности топологически отсортированы.

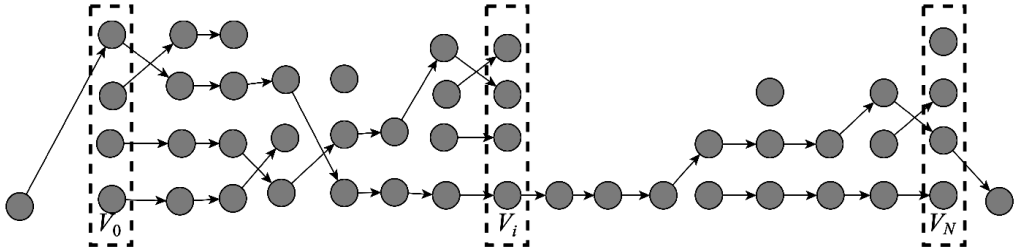


Рис. 3. Графовая модель печатной цепи

Таким образом, общая математическая модель печатной цепи представляется ориентированным графом

$$G = (V, E), \quad V = \bigcup_{1 \le i \le |SSC|} V_i, \quad E = \left\{(u,v) \mid u \in V_i, v \in V_{i+1}, id_i = id_{i+1}, id_i \in f^{-1}(u), id_{i+1} \in f^{-1}(v)\right\}.$$

На рис. 4 схематично представлен процесс моделирования, где $L$ – входной параметр, который описывает отрезки печатной цепи; $G^1$ – математическая модель, полученная в ходе моделирования.

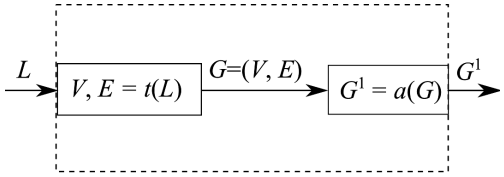


Рис. 4. Процесс моделирования печатной цепи

Первый этап моделирования заключается в установлении связей между объектами и формировании математической модели в виде графа $G$ (с помощью функции $t$). Далее полученный граф преобразуется в сжатый гомеоморфный граф $G^1$ (с помощью функции $a$).

Сформулируем задачу в математической постановке. Пусть дан граф $G = (V, E)$, где $V = \bigcup_{1 \le i \le |SSC|} V_i$ и всем ребрам множества $(v, u) \in E$ задана пропускная способность $c\ (v, u) = 1$. Тогда необходимо выполнить вершинное сжатие всех смежных вершин в соседних подмножествах $V_i$ и $V_{i+1}$, если величина максимального потока $\sum_{v \in V_i} \sum_{v \in V_{i+1}} \underset{(v,u) \in E}{f(v,u)}$ равна мощности обоих множеств (критерий сжатия). Рассмотрим различные варианты соседних множеств $V_i$ и $V_{i+1}$ из рис. 5.

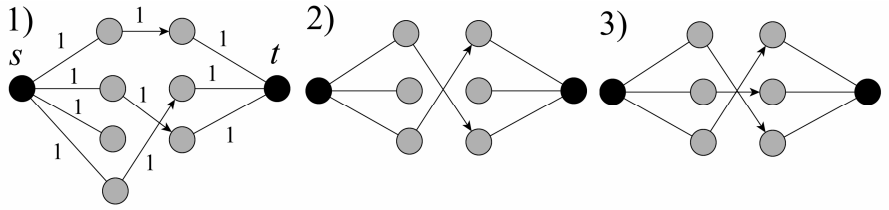


Рис. 5. Разные варианты сетей

Сначала к каждому из множеств добавляется фиктивная вершина, которая смежна всем вершинам соответствующего множества. При этом добавляемые ребра не ориентированы. Левая фиктивная вершина называется источником $s$, а правая – стоком $t$. Далее запускается алгоритм поиска максимального потока для нахождения величины $f(s, t)$. Если $f(s, t) = V_i$ и $f(s, t) = V_{i+1}$, то выполняется сжатие смежных вершин (vertex contraction) в одну, в результате из двух множеств остается только одно.

Так как на рис. 5 в первом случае поток равен 2, а мощность первого множества равна 4, то сжатие не будет произведено. Во втором случае поток равен 2, а мощность обоих множеств равна 3. В третьем случае величина потока равна мощности обоих множеств, значит, необходимо выполнить сжатие смежных нефиктивных вершин. Поскольку такое сжатие не нарушает изоморфности (graph

isomorphism) разбиений исходного и полученного графов, а удаляемые вершины не разветвляются, то граф $G$ и сжатый $G^1$ являются гомеоморфными (graph homeomorphism). Однако гомеоморфизм графов выполняется только до тех пор, пока соседние множества вершин $V_i$ сжаты минимум до двух равных по мощности соседних множеств, а величина потока между соседними множествами совпадает с мощностью множеств. Полученный граф является гомеоморфным только без учета фиктивных вершин, необходимых для поиска величин потока между множествами $V_i$.

Решение поставленной математической задачи рассмотрим на примере рис. 2 с ориентированным графом $G$ из рис. 3. На основе графа $G$ построим граф смешанного типа $GM = (G, U, A)$, где $U$ – множество фиктивных вершин, добавленных к каждому подмножеству $V_i$; $A$ – множество неориентированных ребер, которые соединяют фиктивные вершины с соответствующими вершинами множеств $V_i$ (рис. 6), а вершины $V_i$ соединены между собой ориентированными ребрами.

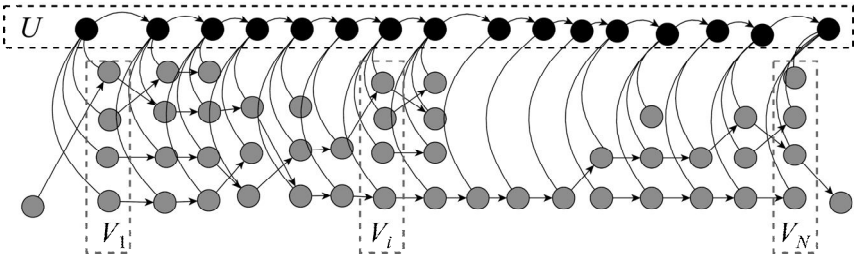


Рис. 6. Смешанный граф $GM$

После получения графа $GM$ необходимо сжать все соседние множества $V_i$ с учетом критерия сжатия. В качестве источника и стока нужно брать вершины $s, t \in U$ соответственно, также должно существовать ребро $(s, t) \in A$. В итоге сначала получим граф, гомеоморфный графу $GM$, а затем – сжатый гомеоморфный граф $GM^1$ (рис. 7).

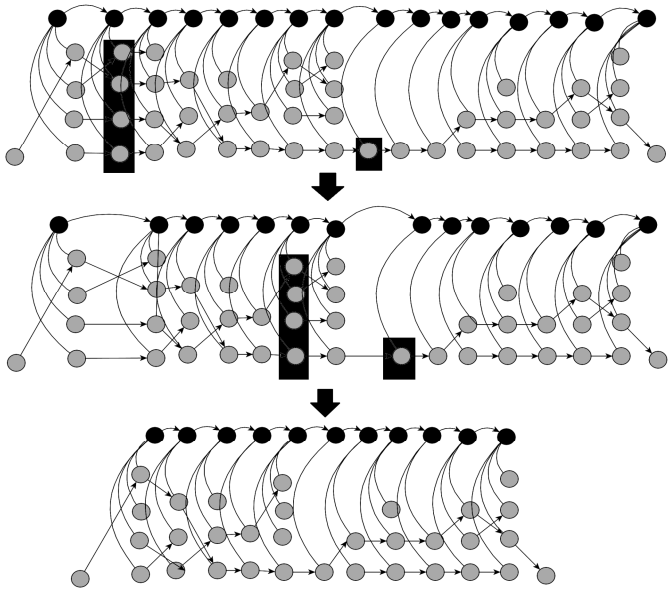

Рис. 7. Преобразование исходного графа в гомеоморфный граф и сжатый граф

Два верхних графа на рис. 7 являются гомеоморфными без учета фиктивных вершин, т.е. существует такой граф, что путем разбиения его вершин можно получить оба графа. Граф $GM^1$ (рис. 7) является решением поставленной задачи. Он содержит сжатый граф $G^1$, гомеоморфный графу $G$, т.е. $G^1 \in GM^1$ и $G^1 = GM^1 \setminus (U, A)$.

В результате по полученному графу можно построить принципиальную схему. На рис. 8 приведена принципиальная схема, полученная из геометрической модели, представленной на рис. 1, *б*. Каждый блок моделируется отрезком линии передачи. Отдельный отрезок многопроводной линии передачи описывается телеграфными уравнениями [4].

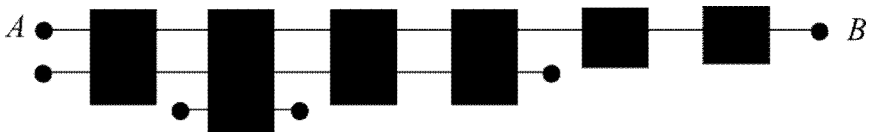


Рис. 8. Принципиальная схема

Рассмотрим разработанный алгоритм, который позволяет сжать граф с учетом гомеоморфизма. Алгоритм основан на поисках максимального потока (maximum flow). Для хранения множеств вершин и ребер используются списки смежности (adjacency list). Для обхода графа используется волновой алгоритм (breadth-first search, BFS). Алгоритм получения сжатого гомеоморфного графа:

$G = init$; $M = G \cup (U, A)$; $Q = U[0]$;
**WHILE** ($Q \neq \varnothing$)
$v = Q.front$ ();
Q.popfront ();
**FOR** ($u \in U, v \neq u, (v, u) \in E$)
valueFlow = getFlow ($v$, $u$);
**IF** ($valueFlow = (|\{(v, u) \in E| \ u \notin U\}| + |\{(u, u^1) \in E| \ u \notin U\}|) / 2$)
$E = E \setminus (v, u)$;
MAKE_RECONNECTION ($v$);
**FOR** ($(u, u^1) \in E, u^1 \in U$) $E = E \cup (v, u^1)$;
$Q.pushback$ ($v$);
**ELSE** $Q.pushback$ ($u$);
Функция **MAKE_RECONNECTION** удаляет заданное подмножество:
MAKE_RECONNECTION ($v$)
**FOR** ($(v, u) \in E, u \notin U$)
**FOR** ($(u, u_1) \in E, u_1 \notin U$)
$E = E \setminus (u, u_1)$;
**FOR** ($(u_1, u_2) \in E, u_2 \notin U$)
$E = E \cup (u, u_2)$;

В этом алгоритме: $Q$ – структура данных типа дек, которая позволяет брать первое значение (front), удалять его (popfront) и вставлять в конец очереди (pushback); WHILE – оператор, позволяющий выполнять блок инструкций, пока выполняется условие; IF, THEN и ELSE – условные операторы; getFlow ($s$, $t$) – функция, которая находит величину максимального потока между истоком s и стоком $t$. Так как поиск потока происходит в графах, которые относятся к двудольным, то использован алгоритм Куна для нахождения максимального паросочетания в двудольном графе. Поскольку ребра между долями графа ориентированы, то алгоритм будет работать за линейное время $O$ ($|V|$).

Корректность алгоритма следует из следующего инварианта: удаление вершины, которая имеет суммарную степень, равную двум, а смежные вершины к удаляемой не являются смежными между собой, не приводит к нарушению свойства гомеоморфизма полученного графа к исходному. Рассмотрим доказательство. Пусть заданы графы $G$, $G^1$, первый граф гомеоморфен второму, количество вершин может различаться. Тогда, следуя определению гомеоморфизма графов, получаем, что операция удаления вершины может быть компенсирована операцией разбиения ребра (но не наоборот). Таким образом, доказана корректность работы алгоритма.

Чтобы удостовериться в правильной работе алгоритма, был разработан алгоритм тестирования и выполнены тесты, показавшие корректность работы алгоритма. Окно приложения с примером тестирования печатной платы приведено на рис. 9.

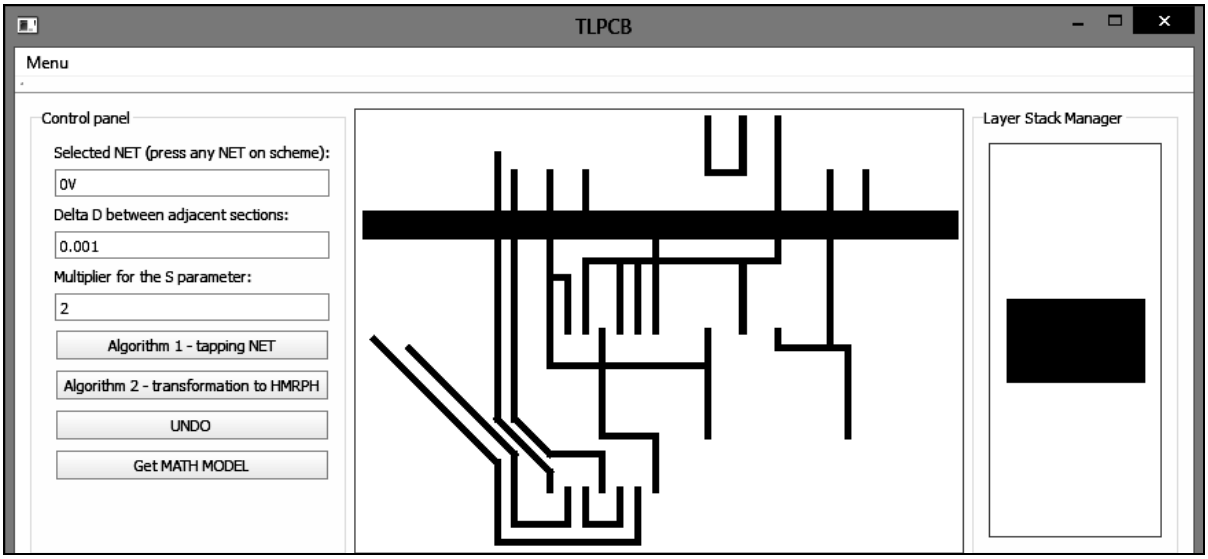


Рис. 9. Окно приложения с примером тестирования печатной платы

Таким образом, разработан математический метод моделирования печатных цепей с помощью графов, который позволяет автоматически получать из геометрической модели печатной платы принципиальную схему ее межсоединений, пригодную для квазистатического анализа целостности сигналов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-19-01232) в ТУСУРе.

*Литература*

1. Archambeault B. Review of Printed-Circuit-Board Level EMI/EMC Issues and Tools / B. Archambeault, C. Brench, S. Connor // IEEE Transactions on Electromagnetic compatibility. – 2010. – Vol. 52. – P. 455–461.

2. Газизов Т.Р. Уменьшение искажений электрических сигналов в межсоединениях / под ред. Н.Д. Малютина. – Томск: Изд-во НТЛ, 2003. – 212 с.

3. Introduction to Algorithms / T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein. – 3rd Edition. – Oxford, USA: MIT Press, 1312 p.

4. Заболоцкий А.М. Временной отклик многопроводных линий передачи / А.М. Заболоцкий, Т.Р. Газизов. – Томск: Изд-во ТУСУРа, 2007. – 152 с.

**Аширбакиев Ренат Ихсанович**
МНС каф. телевидения и управления ТУСУРа
Тел.: 8-923-419-40-29
Эл. почта: cr4cpp.2@gmail.com

**Мелкозеров Александр Олегович**
НС каф. телевидения и управления ТУСУРа
Тел.: 8-913-855-42-48
Эл. почта: alexander.melkozerov@gmail.com

**Лежнин Евгений Владимирович**
Лаборант каф. телевидения и управления ТУСУРа
Тел.: 8-962-777-00-59
Эл. почта: zlvlezhnin@gmail.com

Ashirbakiev R.I., Melkozerov A.O., Lejnin Ev.V.

**Mathematical method of printed circuits modeling using graphs**

Mathematical method of printed circuits modeling using graphs has been developed. Construction of a model, homeomorphic transformation and model testing has been described. Test of different printed traces of a printed circuit board has been done. The method allows automatizing the creation of circuit diagram for the quasi-static analysis of signal integrity.

**Keywords:** printed circuit board, graphs, homeomorphic transformation, validation.