

УДК 519.632.4:621.3.01

М.Г. Рубанович, Д.В. Вагин, В.А. Хрусталеv, П.Г. Богомолов, А.А. Столяренко

Использование метода конечных элементов для расчёта парциального распределения ёмкости микрополосковой линии

Рассмотрены два метода расчёта парциального распределения ёмкости в поперечном сечении микрополосковой линии: 1) непосредственное решение двумерной краевой задачи методом конечных элементов; 2) предварительное применение конформного отображения расчётной области. В обоих случаях для нахождения потенциала электрического поля решается эллиптическая краевая задача с оператором Лапласа. В первом случае используются прямоугольные конечные элементы с билинейными базисными функциями. Во втором случае из-за наличия в расчётной области сложной границы между воздухом и диэлектриком используются треугольные конечные элементы с линейными базисными функциями. По полученному распределению потенциала вычисляются значения напряженности электрического поля вблизи поверхности микрополосковой линии. Далее по теореме Гаусса определяется распределение заряда по поверхности микрополосковой линии. Разработанные алгоритмы позволяют определять парциальную ёмкость на любом дискретном интервале поперечного сечения несимметричной полосковой линии, расположенной на диэлектрической подложке. Для второго рассмотренного метода сделана оценка погрешности расчёта суммарной ёмкости. Такая же оценка сделана для расчёта суммарной ёмкости по предложенным авторами формулам.

Ключевые слова: микрополосковая линия, ёмкость, двумерная задача электростатики, эффективная диэлектрическая проницаемость, волновое сопротивление, краевая задача, метод конечных элементов, конформно отображённая область.

При проектировании радиотехнических устройств необходимо вычислять реактивные параметры микрополосковой линии передачи. Это позволяет рассчитывать её рабочие параметры. Для расчёта ёмкости на единицу длины микрополосковой линии существует ряд методов [1, 2]. Также существует ряд других специальных методов расчёта ёмкости [3]. Целью данной работы является качественная оценка метода расчёта парциального распределения ёмкости на основе конформного отображения на примере задачи расчёта ёмкости микрополосковой линии.

Для проверки полученных результатов в работе использован метод конечных элементов, являющийся методом точного численного моделирования [4]. Также приводится сравнение с результатами расчёта суммарной ёмкости для микрополосковой линии по формулам, предложенным авторами.

Математическая модель. Вычислить значение ёмкости металлического полоска можно, определив распределение потенциала электрического поля $u(x, y)$, такого, что $E = -\text{grad}u$ в области Ω (ввиду симметрии расчётной области рассматривается только ее половина), схематично изображенной на рис. 1. Граница S_5 является плоскостью симметрии, поэтому на ней должно быть задано однородное второе краевое условие на потенциал u . Границы S_3 и S_4 предполагаются достаточно удаленными, поэтому для них также будет справедливым однородное второе краевое условие для потенциала u . Граница S_2 является поверхностью металлического полоска.

Соответствующая дифференциально-краевая задача будет иметь вид

$$-\text{div}(\varepsilon \text{grad}u) = 0, \quad (1)$$

$$u|_{S_1} = 0, \quad u|_{S_2} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{S_3, S_4, S_5} = 0. \quad (2)$$

Для решения этой краевой задачи воспользуемся методом конечных элементов (МКЭ) с прямоугольными конечными элементами [4]. Выпишем для уравнения (1) с краевыми условиями (2) вариационную постановку в форме Галеркина. Для этого умножим левую и правую части уравнения (1) на пробные функции

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u)) w_0 d\Omega = 0, \quad u \in H_g^1, w_0 \in H_0^1, \quad (3)$$

где H_g^1 – это пространство функций, имеющих суммируемые с квадратом производные и удовлетворяющих заданным в (2) краевым условиям первого рода, а H_0^1 – пространство функций, имеющих суммируемые с квадратом производные и равные нулю на границах S_1 и S_2 . Уравнение (3) можно переписать в виде

$$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w_0 d\Omega + \int_S \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} w_0 dS = 0, \quad u \in H_g^1, w_0 \in H_0^1, \quad (4)$$

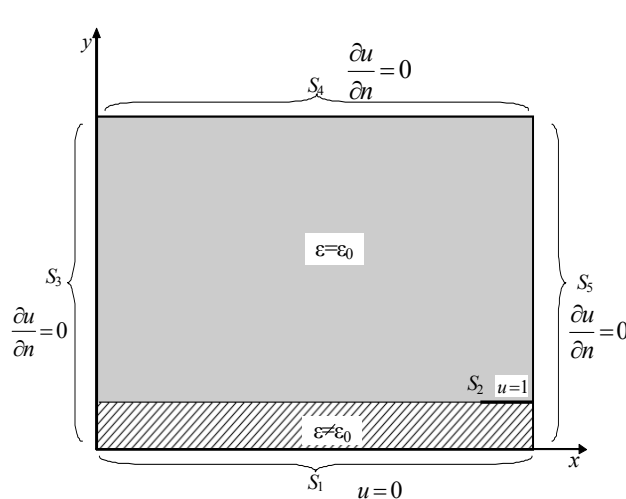


Рис. 1. Исходная расчётная область

где $S = \bigcup_{i=1}^5 S_i$. Если выбрать достаточно удаленные границы S_3 и S_4 , то на них будет справедливо краевое условие $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, таким образом, окончательно получаем уравнение

$$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w_0 d\Omega = 0, \quad u \in H_g^1, w_0 \in H_0^1. \quad (5)$$

Будем искать приближенное решение u^h потенциала u в виде линейной комбинации финитных базисных функций ψ_j с весами q_j

$$u^h = \sum_{j=1}^n q_j \psi_j, \quad (6)$$

где n – число узлов конечноэлементной сетки.

Выбирая в качестве пробных функций w_0 функции ψ_i , $i \in N^{bd}$, где N^{bd} – набор индексов, соответствующих узлам сетки, в которых заданы краевые условия первого рода, и подставляя (6) в (5), получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} \psi_j \cdot \operatorname{grad} \psi_i d\Omega \right) q_j = 0, \quad i \notin N^{bd}, \\ q_j = 0, \quad j \in N^{bd_0}, \\ q_j = 1, \quad j \in N^{bd_1}, \end{cases} \quad (7)$$

где N^{bd_0} и N^{bd_1} – это наборы индексов, соответствующих узлам сетки, расположенным на границах S_1 и S_2 соответственно, $N^{bd} = N^{bd_0} \cup N^{bd_1}$.

Парциальное распределение емкости или суммарная ёмкость C могут быть вычислены по полученному в результате решения задачи (1), (2) распределению электрического поля. Например, для определения суммарной ёмкости МПЛ надо проинтегрировать нормальную составляющую вектора напряженности электрического поля по поверхности полоска (по границе S_2):

$$C = \int_{S_2} \varepsilon E_n dS. \quad (8)$$

Математическая модель для решения задачи в конформно отображенной области. После конформного отображения расчетная область примет вид, схематично изображенный на рис. 2, где $\tilde{S}_1 - \tilde{S}_4$ – границы конформно отображенной расчетной области.

В этом случае краевые условия для потенциала электрического поля $u = u(\tilde{x}, \tilde{y})$ на соответствующих границах такие же, как и в исходной расчетной области. Для данной области удобнее использовать треугольные конечные элементы. В остальном метод численного расчета распределения потенциала u полностью совпадает с описанным выше алгоритмом расчёта в исходной области (рис. 1). Однако для вычисления емкости по описанному в работе методу интегрировать нормаль-

ную составляющую вектора напряженности электрического поля в данном случае нужно уже не по всей поверхности \tilde{S}_2 , а только по той ее части, которая соответствует реальному размеру металлического полоска. Причем для вычисления емкости полученное после интегрирования значение напряженности должно быть подставлено в формулу для расчёта ёмкости в выражение (8).

Результаты численного моделирования.

Ниже приведены результаты расчетов для двух моделей. Расчеты выполнялись на нескольких вложенных сетках. Погрешность результатов вычислений не превышает 1%.

В первой модели ширина полоска равна 1 мм, толщина полоска – 6 мкм, толщина диэлектрика – 1 мм, а значение диэлектрической проницаемости диэлектрика $\epsilon = 9,6\epsilon_0$. Во второй модели ширина полоска равна 6 мм, толщина полоска – 6 мкм, толщина диэлектрика – 4 мм, а значение диэлектрической проницаемости диэлектрика $\epsilon = 6,6\epsilon_0$.

На рис. 3 показано распределение удельного значения заряда Q^{ud} , Кл/(В·м²) по нижней (со стороны диэлектрика) и по верхней (со стороны воздуха) поверхностям металлического полоска для обеих моделей.

На рис. 4 показано распределение удельного значения заряда \tilde{Q}^{ud} , Кл/(В·м²) на границах \tilde{S}_1 и \tilde{S}_2 в конформно отображенной расчетной области.

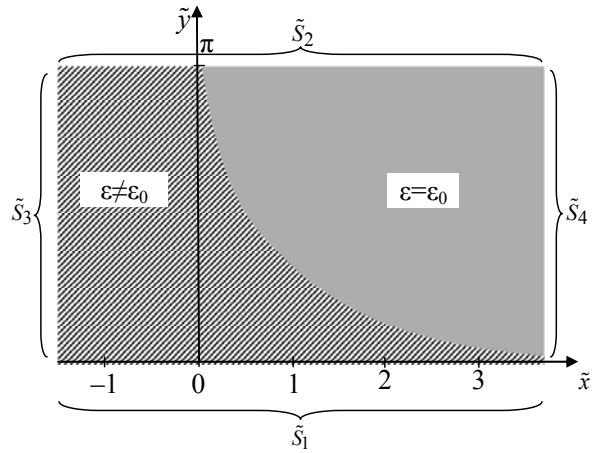


Рис. 2. Часть конформно отображенной расчетной области вблизи раздела воздуха и диэлектрика

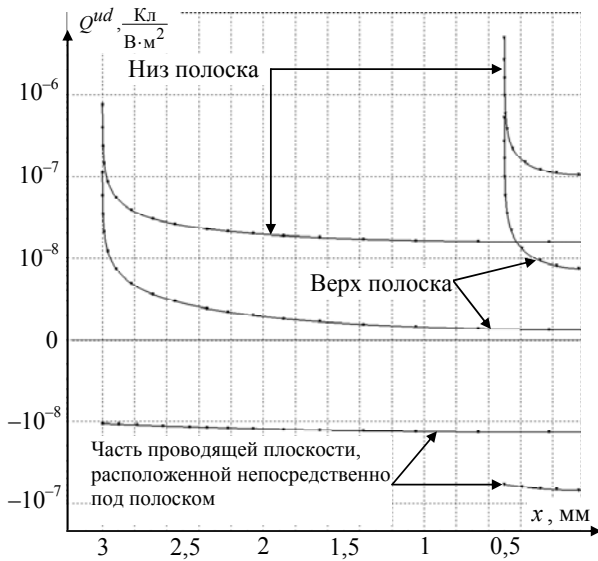


Рис. 3. Распределение удельного значения заряда по поверхности полоска и на медном основании под полоском

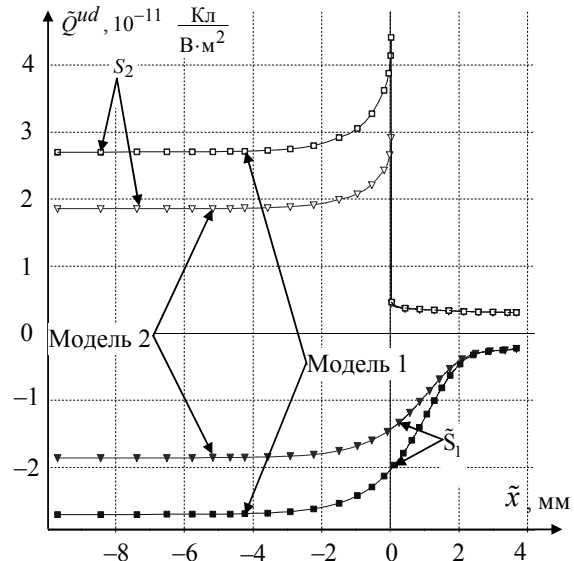


Рис. 4. Распределение удельного значения заряда на границах \tilde{S}_1 и \tilde{S}_2

Сравнение точности значений суммарной ёмкости, полученных методом конечных элементов, с соответствующими ёмкостями, полученными по предложенным формулам. Значение $\epsilon_{эфф}$ определяется отношением емкостей C_d к $C_{бд}$ [5]:

$$\epsilon_{эфф} = \frac{C_d}{C_{бд}}, \tag{9}$$

где $C_{бд}$ – погонная ёмкость МПЛ без диэлектрика; C_d – погонная ёмкость МПЛ с диэлектриком.

Расчётное $\epsilon_{эфф}$ определяется по формуле [6]:

$$\varepsilon_{\text{эфф}} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{10 \cdot H}{W_{\text{эфф}}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

где H – толщина диэлектрика; $W_{\text{эфф}}$ – эффективная ширина МПЛ.

Эффективная ширина МПЛ $W_{\text{эфф}}$ по формуле [5]:

$$W_{\text{эфф}} = W + \left(\frac{\delta}{\pi}\right) \left[1 + \ln\left(\frac{2H}{\delta}\right)\right], \quad (11)$$

где δ – толщина полоска.

$W_{\text{эфф}}$ не рассчитывалась, так как при $\delta = (5-6)$ мкм W отличается от $W_{\text{эфф}}$ в пятом знаке.

Точность расчёта по формуле (10) $\pm 2\%$ [2] в широком диапазоне ε_r и $\frac{W}{H}$.

Волновое сопротивление МПЛ с диэлектриком между полосковой линией и основанием определялось по формуле [5]

$$Z_B = \frac{1}{C_{\text{бд}} \cdot c \cdot \sqrt{\varepsilon_{\text{эфф}}}} = \frac{1}{c \cdot \sqrt{C_{\text{бд}} \cdot C_{\text{д}}}}, \quad (12)$$

где c – скорость света.

При этом справедливы следующие соотношения (13)–(15) [5]:

$$Z_B = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_{\text{эфф}}}}, \quad (13)$$

$$\text{при } \frac{W}{H} \leq 1, \quad Z_0 = 60 \ln\left(\frac{8H}{W} + \frac{W}{4H}\right), \quad (14)$$

$$\text{при } \frac{W}{H} \geq 1, \quad Z_0 = \frac{120\pi}{\frac{W}{H} + 2,42 - 0,44 \frac{H}{W} + \left(1 - \frac{H}{W}\right)^6}, \quad (15)$$

где Z_0 – волновое сопротивление МПЛ с воздухом между полосковой линией и основанием.

Приведённые выше выражения (9) и (12) являются системой уравнений относительно $C_{\text{бд}}$ и $C_{\text{д}}$. Если разрешить систему уравнений относительно $C_{\text{бд}}$ и $C_{\text{д}}$, то имеем [5]

$$C_{\text{бд}} = \frac{1}{c \cdot Z_0}, \quad (16)$$

$$C_{\text{д}} = \frac{\varepsilon_{\text{эфф}}}{c \cdot Z_0}. \quad (17)$$

Рассчитаем ёмкостные параметры для микрополосковой линии передачи, выполненной на основе брокерита с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_r = 6,6$ размером 6×4 мм² (6 мм шириной, 4 мм толщиной) и для микрополосковой линии передачи, выполненной на основе поликора с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_r = 9,6$ размером 1×1 мм² (1 мм шириной, 1 мм толщиной), полученных конформным отображением и МКЭ. Определим суммарную ёмкость при использовании метода конформного отображения (МКО) для микрополосковой линии (МПЛ) размером 6×4 мм². Суммарная ёмкость без диэлектрика равна $C_{\text{бд}} = 30,44$ пФ/м. При расчёте суммарной ёмкости МКЭ для МПЛ размером 6×4 мм² без диэлектрика ёмкость равна $C_{\text{бд}} = 32,08$ пФ/м. Разница при расчёте суммарной ёмкости составляет 1,64 пФ/м. Суммарная ёмкость при использовании метода конформного отображения для МПЛ размером 1×1 мм² без диэлектрика $C_{\text{бд}} = 24,5$ пФ/м. При использовании метода конечных элементов для МПЛ 1×1 мм² без диэлектрика $C_{\text{бд}} = 26,43$ пФ/м. Разница при расчёте суммарной ёмкости составляет 1,93 пФ/м.

Причина такой разницы в том, что расчёт МКО не учитывает взаимодействие зарядов на краях МПЛ, так как рассчитывается распределение зарядов на одном торце и прилегающих поверхностях сверху и снизу МПЛ, в то время как при расчёте МКЭ взаимодействие зарядов на краях учитывается

автоматически. Таким образом, непосредственный расчёт МКЭ (см. рис. 1) дал более точное распределение ёмкости и ее суммарное значение.

Рассчитаем ёмкость в поперечном сечении МПЛ, если МПЛ расположена на диэлектрике, с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = 6,6$ для МПЛ размером $6 \times 4 \text{ мм}^2$. Расчёт проводился конформным отображением одного торца с прилегающими отрезками верха и низа МПЛ, отображёнными в прямую линию (см. рис. 2) с последующим расчётом образовавшейся области методом конечных элементов (МКО с МКЭ). Кривая граница – это граница между воздухом и диэлектриком. Также эта задача (см. рис. 1) рассчитывалась непосредственно методом конечных элементов. Суммарная ёмкость с диэлектриком при использовании МКО с МКЭ $C_d = 151,63 \text{ пФ/м}$. При использовании МКЭ $C_d = 151,24 \text{ пФ/м}$ для МПЛ размером $6 \times 4 \text{ мм}^2$ с диэлектриком под МПЛ с $\epsilon_r = 6,6$. Разница при расчёте суммарной ёмкости составляет 0,26%.

При использовании МКО с МКЭ для МПЛ размером $1 \times 1 \text{ мм}^2$ с диэлектриком под МПЛ с $\epsilon_r = 9,6$ суммарная ёмкость равна $C_d = 169,55 \text{ пФ/м}$. При использовании МКЭ суммарная ёмкость равна $C_d = 170,07 \text{ пФ/м}$. Разница полученных значений составляет 0,31%. Столь малое отличие при расчёте суммарной ёмкости методом МКО с МКЭ и методом МКЭ объясняется тем, что увеличению ёмкости на краях поперечного сечения МПЛ при расчёте МКЭ соответствует примерно равное уменьшение ёмкости на его торцах по сравнению с расчётом МКО с МКЭ.

Для оценки точности предложенных формул (16) и (17) были рассчитаны значения $C_{бд}$ и C_d для МПЛ с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = 6,6$ размером $6 \times 4 \text{ мм}^2$ и для МПЛ с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = 9,6$ размером $1 \times 1 \text{ мм}^2$, которые были сопоставлены с аналогичными значениями, полученными МКЭ. При размере МПЛ $6 \times 4 \text{ мм}^2$, $\epsilon_r = 6,6$, эффективная диэлектрическая проницаемость, рассчитанная по формуле (10), $\epsilon_{эфф} = 4,81$. Определённая МКЭ суммарная погонная ёмкость для МПЛ с воздухом между полосковой линией и основанием $C_{бд1} = 32,077 \text{ пФ/м}$. Рассчитав по формуле (15) волновое сопротивление для МПЛ с воздухом между полосковой линией и основанием, получим $Z_0 = 103,936 \text{ Ом}$. Определённая по формуле (16) суммарная погонная ёмкость МПЛ с воздухом между полосковой линией и основанием $C_{бд2} = 32,072 \text{ пФ/м}$. Относительная разница между $C_{бд1}$ и $C_{бд2}$ равняется 0,02%. Результаты расчёта по МКЭ и по выражению (16) мало отличаются. По формуле (17) определим суммарную погонную ёмкость МПЛ с диэлектриком между полосковой линией и основанием. Ёмкость $C_{д2} = 154,3 \text{ пФ/м}$. Определённая МКЭ суммарная погонная ёмкость для МПЛ с диэлектриком между полосковой линией и основанием $C_{д1} = 151,24 \text{ пФ/м}$. Относительная разница между $C_{д2}$ и $C_{д1}$ равняется 2%.

При размере МПЛ $1 \times 1 \text{ мм}^2$, $\epsilon_r = 9,6$ эффективная диэлектрическая проницаемость, рассчитанная по формуле (10), $\epsilon_{эфф} = 6,596$. Определённая МКЭ суммарная погонная ёмкость для МПЛ с воздухом между полосковой линией и основанием $C_{д1} = 26,43 \text{ пФ/м}$. Рассчитав по формуле (14) волновое сопротивление для МПЛ с воздухом между полосковой линией и основанием, получим $Z_0 = 126,61 \text{ Ом}$. Определённая по формуле (16) суммарная погонная ёмкость МПЛ с воздухом между полосковой линией и основанием $C_{бд2} = 26,32 \text{ пФ/м}$. Относительная разница между $C_{д1}$ и $C_{бд2}$ равняется 0,4%. Результаты расчёта по МКЭ и по выражению (16) тоже мало отличаются. По формуле (17) определим суммарную погонную ёмкость МПЛ с диэлектриком между полосковой линией и основанием. Ёмкость $C_{д2} = 173,6 \text{ пФ/м}$. Определённая МКЭ суммарная погонная ёмкость для МПЛ с диэлектриком между полосковой линией и основанием $C_{д1} = 170,08 \text{ пФ/м}$. Относительная разница между $C_{д2}$ и $C_{д1}$ равняется 2%.

Меньшая относительная погрешность определения ёмкости $C_{бд}$ объясняется тем, что в формуле (16) в знаменателе стоит Z_0 , относительная погрешность определения которой около 1% [5]. Формула (17), определяющая C_d в числителе, имеет $\epsilon_{эфф}$, относительная погрешность которой [5]

2%. Относительная погрешность частного от деления $\frac{\varepsilon_{\text{эфф}}}{Z_0}$ равняется сумме относительных погрешностей $\varepsilon_{\text{эфф}}$ и Z_0 [7]. Таким образом, относительная погрешность при расчете C_d равняется 3%.

Выводы. Расчёт ёмкости методом МКО с МКЭ не учитывает взаимодействие заряда на краях микрополосковой линии. Поэтому если необходимо получать значение ёмкости с погрешностью, не превышающей 3–5%, нужно решать задачу напрямую без конформного отображения. При более мягких требованиях к ошибке определения суммарной ёмкости удобно использовать предложенные формулы (16)–(17). Для качественной оценки полученных значений расчёта суммарных ёмкостей $C_{\text{бд}}$ и C_d для микрополосковой линии передачи, выполненной на основе брокерита с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_r = 6,6$ размером 6×4 мм², и для микрополосковой линии передачи, выполненной на основе поликора с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_r = 9,6$ размером 1×1 мм², были выполнены расчёты методом конечных элементов без конформного отображения.

Полученные результаты указывают на имеющуюся систематическую погрешность МКО. Поэтому очевидно, что при более жёстких требованиях к точности расчёта парциального распределения ёмкости в поперечном сечении микрополосковой линии использовать МКО или МКО с МКЭ недопустимо. В этом случае следует предпочесть методы точного моделирования, например метод конечных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания, тема проекта: Теория построения и практическая реализация широкополосных микроволновых устройств, предназначенных для использования в измерительном оборудовании цифровых систем телевидения и телекоммуникаций, включая вычислительные системы.

Литература

1. Ковалев И.С. Теория и расчёт полосковых волноводов / И.С. Ковалев. – Минск: Наука и техника, 1967. – 233 с.
2. Кухаркин Е.С. Машинные методы расчета в инженерной электрофизике / Е.С. Кухаркин, Б.В. Сестрорецкий. – М.: Моск. энерг. ин-т, 1986. – 68 с.
3. Иоссель Ю.Я. Расчет электрической емкости / Ю.Я. Иоссель, Э.С. Кочанов, М.Г. Струнский. – Ленингр. отд.: Энергия, 1969. – 240 с.
4. Соловейчик Ю.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач / Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, М.Г. Персова. – Новосибирск: НГТУ, 2007. – 895 с.
5. Красов В.Г. Толстоплёночная технология в СВЧ-микроэлектронике / В.Г. Красов, Г.Б. Петраускас, Ю.С. Чернозубов. – М.: Радио и связь, 1985. – 168 с.
6. Справочник по расчёту и конструированию СВЧ-полосковых устройств / С.И. Бахарев, В.И. Вольман, Ю.Н. Либ и др.; под ред. В.И. Вольмана. – М.: Радио и связь, 1982. – 328 с.
7. Поршнев С.В. Вычислительная математика: курс лекций. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 302 с.

Рубанович Михаил Григорьевич

Канд. техн. наук, доцент каф. общей физики Новосибирского гос. технического университета (НГТУ)

Тел.: 8 (383) 346-08-34

Эл. почта: mihail-nstu@mail.ru

Вагин Денис Владимирович

Канд. техн. наук, доцент каф. прикладной математики НГТУ

Тел.: 8 (383) 346-27-76

Эл. почта: vdv_wk@mail.ru

Хрусталеv Владимир Александрович

Д-р техн. наук, профессор каф. электронных приборов НГТУ

Тел.: 8 (383) 346-06-64

Эл. почта: VA_Khructalev@ngs.ru

Богомолов Павел Геннадьевич

Аспирант каф. общей физики НГТУ

Тел.: 8 (383) 210-02-81

Эл. почта: rk_6-41@mail.ru

Столяренко Алексей Андреевич

Магистрант каф. радиоприёмных и радиопередающих устройств НГТУ

Тел.: 8 (383) 346-08-34

Эл. почта: mihail-nstu@mail.ru

Rubanovich M.G., Vagin D.V., Khrustalyov V.A., Bogomolov P.G., Stolyarenko A.A.

Using of the finite element method for calculating the partial capacity distribution in the microstrip line

The paper considers two methods for calculating the partial capacity distribution in the cross section of the microstrip line: 1) direct solution of two-dimensional boundary-value problem by the finite element method; 2) calculation with preliminary conformal mapping of the computational domain. In both cases, elliptic boundary-value problem with Laplace operator is solved to find the electric field potential. In the first case, rectangular finite elements with bilinear basis functions are used. In the second case, triangular finite elements with linear basis functions are used because of the complex boundary between air and dielectric in the computational domain. Upon receipt of the potential distribution, values of the electric field near the surface of the microstrip line are calculated. Then we define the charge distribution on the microstrip line surface by means of Gauss theorem. The developed algorithms are used to determine the partial capacity on any discrete interval of the asymmetric stripline cross-section disposed on a dielectric substrate. For the second method we calculated error estimation of the total capacity. The same estimation is made for the total capacity calculation by the formulas, proposed by the authors.

Keywords: microstrip, capacity, two dimensional electrostatic problem, effective permittivity, wave resistance, boundary problem, finite element method, conformal area mapping.