УДК 519.865.5

**А.А. Мицель, Н.П. Красненко**

# Динамическая модель управления инвестиционным портфелем с линейным критерием качества

Рассматривается система со случайными параметрами в дискретном времени на примере инвестиционного портфеля ценных бумаг, включающего рисковые и безрисковые активы. Портфель представляется в виде двух подпортфелей – рискового и безрискового. Для построения модели управления в задаче слежения за эталонным портфелем используется линейный критерий качества, что позволяет получить линейную динамическую модель. Модель относится к классу моделей линейного программирования и позволяет учитывать ограничения как на состояние системы, так и на управление. Для уменьшения размерности задачи используется метод управления с прогнозирующей моделью.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, динамическая система со случайными параметрами, линейное программирование, инвестиционный портфель, слежение за эталонным портфелем.

Многие реальные системы описываются линейными моделями со случайными параметрами. Применительно к инвестиционному портфелю эта задача достаточно подробно исследовалась в цикле работ [1–10]. Так, в работе [1] рассматривается задача управления по квадратичному критерию дискретными стохастическими системами со случайными параметрами и аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояний и управлений, получены уравнения для оптимальных линейных статического и динамического регуляторов по выходу. Результаты применяются для решения задачи динамической оптимизации инвестиционного портфеля в дискретном времени, включающего рисковые бумаги со случайными волатильностями цен финансовых активов. В работе [3] рассматривается задача синтеза стратегий управления с прогнозирующей моделью для дискретных систем со случайными параметрами, возмущенных аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояний и управлений. Синтезированы стратегии прогнозирующего управления замкнутого и разомкнутого типов. Результаты применяются для решения задачи динамической оптимизации инвестиционного портфеля при ограничениях на объемы торговых операций. В работе [9] задача управления портфелем ценных бумаг, состоящим из рисковых и безрискового вложений, формулируется как динамическая задача слежения за эталонным (гипотетическим) портфелем, имеющим заданную желаемую эффективность. Предполагается, что динамика цен рисковых финансовых активов описывается стохастическими уравнениями с гауссовскими и импульсными пуассоновскими возмущениями.

Предлагается подход к определению оптимальной стратегии управления с обратной связью по квадратичному критерию. Модель управления инвестиционным портфелем (ИП), учитывающая ограничения на объемы торговых операций представлена в работе [10]. Цены рисковых финансовых активов подчиняются стохастическим разностным уравнениям со случайной волатильностью. Целью управления ИП является отслеживание гипотетического эталонного портфеля с заданной траекторией роста. Получены уравнения, определяющие оптимальные стратегии прогнозирующего управления ИП с обратной связью при ограничениях. В работе [11] состояние портфеля описывается суммарным капиталом, вкладываемым в рисковые и безрисковые активы, и показана задача слежения с квадратичным критерием. Двухэтапная стратегия построения инвестиционного портфеля на основе теоремы разделения исследуется в работе [12]. На первом этапе рисковая структура находится с использованием оценок ожидаемой доходности и матрицы ковариаций доходности рисковых активов. Оценки находятся методом скользящего окна. На втором этапе производится разделение капитала между рисковой и безрисковой структурами портфеля с использованием принципа максимума Понтрягина. В статье [13] решена задача формирования оптимального инвестиционного портфеля в условиях неопределенности с минимальным уровнем допустимого риска. Предложена модель, позволяющая учесть гетероскедастичность исходных данных и нестационарность элемен-

тов корреляционной матрицы. Во всех рассмотренных работах [1–13] безрисковая часть портфеля представлена в виде одного совокупного безрискового актива.

В данной работе также рассматривается система со случайными параметрами в дискретном времени на примере инвестиционного портфеля ценных бумаг, включающего рисковые и безрисковые активы. В отличие от упомянутых выше работ мы будем использовать линейный критерий качества в задаче слежения за эталонным портфелем, что позволяет получить линейную динамическую модель, которую удается преобразовать в модель линейного программирования. Другим отличием предлагаемой модели является представление портфеля в виде двух подпортфелей – рискового и безрискового. Модель позволяет учитывать ограничения как на состояние системы, так и на управление. Для уменьшения размерности задачи используется метод управления с прогнозирующей моделью.

**Динамическая модель в дискретном времени.** Рассмотрим портфель, состоящий из $N$ рисковых активов и $K$ безрисковых активов. Обозначим объемы вложений в момент времени $t$ в рисковые активы $V_i''(t)$ ($i=1,...,N$), а в безрисковые активы – $V_j'(t)$ ($j=1,...,K$).

Задача управления заключается в перераспределении капитала между включенными в портфель активами таким образом, чтобы сформированный портфель следовал капиталу эталонного инвестиционного портфеля на горизонте управления $T$.

Стоимость инвестиционного портфеля $V(t)$ в момент времени $t$ равна

$$V(t)=\sum_{i=1}^{N}V_i''(t)+\sum_{j=1}^{K}V_i'(t). \tag{1}$$

Заметим, что доля вложения в $i$-й рисковый актив в момент времени $t$ равна $x_i''(t)=V_i''(t)/V(t)$, а в безрисковый актив – $x_j'(t)=V_j'(t)/V(t)$ $x_j'(t)=V_j'(t)/V(t)$.

Динамику капитала инвестиционного портфеля в дискретном времени можно описать уравнением (см. например, [1–3, 9, 10])

$$\begin{aligned} &V_i''(t+1)=\left[1+\mu_i(t)+\eta_i(t)\right]\left(V_i''(t)+u_i(t)\right),\ i=1,...,N;\\ &V_j'(t+1)=\left[1+v_j(t)\right]\left(V_j'(t)+u_j(t)\right),\ j=1,...,K. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $u_i(t)$ – капитал, вкладываемый в покупку рискового актива ($u_i(t)>0$) либо вырученный от продажи рискового актива ($u_i(t)<0$); $\mu_i(t)$ – среднее значение ставки $i$-й рисковой ценной бумаги; $\eta_i(t)$ – случайная составляющая ставки рисковой ценной бумаги с параметрами $M\left(\eta_i(t)\right)=0,\ M\left(\eta_i(t)\eta_k(t)\right)=\Sigma_{ik}(t),\ i,k=1,...,N$, где $\Sigma_{ik}(t)$ – матрица ковариации доходностей рисковых ценных активов; $v_j(t)$ – ставка $j$-го безрискового актива.

В отличие от работ [1–3] безрисковый актив мы представляем в виде подпортфеля. Кроме того, предполагаем, что рыночная ставка доходности безрисковых ценных бумаг может изменяться мгновенно для всех периодов на одну и ту же величину. Это обстоятельство приводит к необходимости иммунизации безрискового подпортфеля.

Уравнение эталонного портфеля определим уравнением:

$$V^0(t+1)=\left(1+\mu_0(t)\right)V^0(t), \tag{3}$$

где $\mu_0(t)$ – заданная ставка эталонного портфеля. Начальное условие $V^0(0)=V(0)$ (в начальный момент времени капитал эталонного портфеля совпадает с капиталом реального инвестиционного портфеля).

Введем вектор $\mathbf{y}(t)=\left(V_1''(t),V_2''(t),...,V_N''(t),V_1'(t),V_2'(t),...V_K'(t)\right)^T$ и вектор $\mathbf{z}(t)=(\mathbf{y}(t),\ V^0(t))^T$.

Тогда уравнения (2), (3) можно переписать в виде

$$\mathbf{z}(t+1)=\mathbf{A}(t)\,\mathbf{z}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \tag{4}$$

где $\mathbf{A}(t)=\mathbf{A1}(t)+\mathbf{A2}(t)$; $\mathbf{A1}(t)$, $\mathbf{A2}(t)$ – диагональные матрицы размерности $(N+K+1)\times(N+K+1)$ с элементами

$A1_{ii}(t)=1+\mu_i(t),\ i=1,...,N;$ $\quad A2_{ii}(t)=\eta_i(t),\ i=1,...,N;$

$A1_{N+j,N+j}(t)=1+v_j(t),\ j=1,...,K;$ $\quad A2_{N+j,N+j}(t)=0,\ j=1,...,K.$

$A1_{N+K+1,N+K+1}(t)=1+\mu_0(t).$

Матрица $\mathbf{B}(t)$ размерности $(N+K+1)\times(N+K)$ имеет следующую структуру:

$$\mathbf{B}(t)=\begin{pmatrix} A_{11}(t) & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_{22}(t) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_{N+K}(t) \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{u}(t)$ – вектор управления.

В качестве целевой функции выберем линейный функционал

$$J=M\Big\{\sum_{t=1}^{T-1}\Big(V(t)-V^0(t)\Big)-\sum_{t=0}^{T-1}(\mathbf{b}^T(t)\mathbf{u}(t))+\Big(V(T)-V^0(T)\Big)\Big\}, \tag{5}$$

где $\mathbf{b}(t)=\big(\mu_1(t),...,\mu_N(t),v_1(t),...,v_K(t)\big)^T$; $M\{\cdot\}$ – оператор математического ожидания.

Второе слагаемое в функционале (5) определяет доходность портфеля и его минимизация означает максимизацию доходности.

Используя $z(t)$, представим $\Big(V(t)-V^0(t)\Big)$ в форме $\Big(V(t)-V^0(t)\Big)=\mathbf{C}\mathbf{z}(t)$, где $\mathbf{C}=(1,1,...,1,-1)\in R^{N+K+1}$. Критерий качества $J$ примет вид

$$J=M\Big\{\sum_{t=1}^{T-1}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{z}(t))-\sum_{t=1}^{T-1}(\mathbf{b}^T(t)\mathbf{u}(t))+\mathbf{C}\cdot\mathbf{z}(T)\Big\}\to\min_{\mathbf{u}(t)}. \tag{6}$$

Итак, имеем задачу оптимального управления, в которой уравнение состояния описывается многошаговым процессом (4), а функционал качества – выражением (6). Управление задается вектором $\mathbf{u}(t)$. Задача решается при ограничении $V(t)\ge V^0(t)$ или $\mathbf{C}\cdot\mathbf{z}(t)$.

В общем виде ограничения, связанные с формированием портфеля, в том числе иммунизированного безрискового подпортфеля, запишем в виде

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{z}(t)\le\mathbf{\Gamma}(t),\ \ t=1,...,T,$$

где $\mathbf{P}$ – матрица, размерность которой определяется количеством ограничений задачи и размерностью вектора $\mathbf{z}(t)$; $\mathbf{\Gamma}(t)$ – вектор соответствующей размерности.

Ограничение, связанное с запретом продажи без покрытия, имеет вид $\mathbf{y}(t)+\mathbf{u}(t)\ge 0$, $t=0,1,...,T-1$. В терминах $\mathbf{z}(t)$ это ограничение примет форму

$$\mathbf{z}(t)+\mathbf{Y}\cdot\mathbf{u}(t)\ge 0,\ \ t=0,1,...,T-1,$$

где $\mathbf{Y}$ – матрица размерности $(N+K+1)\times(N+K)$ с элементами

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения задачи слежения необходимо задать начальное состояние системы $\mathbf{z}(0)=(\mathbf{y}(0), V^0(0))^T$, где $\mathbf{y}(0)$ – начальное распределение капитала. Стоимость эталонного портфеля в начальный момент времени считаем известной $V^0(0)=V_0^0$. Кроме того, как уже отмечалось, $V(0)=V^0(0)$. В качестве $\mathbf{y}(0)$ используем решение следующей задачи формирования смешанного портфеля [14]:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}y_i(0)\Sigma_{ij}(0)y_j(0)\to\min_{y}, \tag{7}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N+K} b_i(0)y_i(0) \ge m_p, \\ \sum\limits_{j=k_{p-1}+1}^{k_p} y_j(0) \ge c, \\ \sum\limits_{j=N+1}^{N+K} D_j(0)y_j(0) = T \cdot V(0), \\ \sum\limits_{j=1}^{N+K} y_j(0) = V(0), \\ \sum\limits_{i=1}^{N} y_i(0) \le mV(0), \\ \sum\limits_{j=N+1}^{N+K} y_j(0) = (1-m)V(0), \end{cases} \tag{8}$$

$$0 \le y_i(0) \le y_i^{\max}.$$

Величина $\sum\limits_{j=k_{p-1}+1}^{k_p} y_j(0)$ определяет суммарную долю финансовых активов группы $p$ в портфеле; $k_0 = 0,\ p = 1,...,M$; $c$ – ограничение на суммарную долю финансовых активов наименования $p$; $y^{\max}$ – максимально допустимый объем вложений в ценные бумаги; $m$ – ограничение на объем вложений в рисковые ценные бумаги; $m_p$ – желаемая доходность портфеля; $D_j(0)$ – дюрация безрисковой ценной бумаги.

Итак, сформулируем окончательно задачу управления портфелем:

$$J = M\left\{ \sum_{t=1}^{T-1} (\mathbf{C}\cdot\mathbf{z}(t)) - \sum_{t=0}^{T-1} (\mathbf{b}^T(t)\mathbf{u}(t)) + \mathbf{C}\cdot\mathbf{z}(T) \right\} \to \min_{\mathbf{u}(t)}, \tag{9}$$

$$\mathbf{z}(t+1) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \tag{10}$$

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{z}(t) \le \mathbf{\Gamma}(t),\ t = 1,...,T, \tag{11}$$

$$\mathbf{z}(t) + \mathbf{Y}\cdot\mathbf{u}(t) \ge 0,\ t = 0,1,...,T-1, \tag{12}$$

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{Q}(t)\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{z}(t). \tag{13}$$

Здесь $\mathbf{Q}(t)$ – диагональная матрица размерности $(N+K+1)\times(N+K+1)$ с элементами:

$$Q_{ii}(t) = 0,\ i = 1,...,N;$$

$$Q_{N+J,N+j}(t) = \frac{D_j(t)}{T-t},\ j = 1,...,K;$$

$$Q_{N+K+1,N+K+1}(t) = 1.$$

Последнее ограничение используется в том случае, если период управления достаточно велик, так что на нем может изменяться безрисковая процентная ставка, и по этой причине необходимо проводить иммунизацию подпортфеля безрисковых ценных бумаг.

**Решение задачи.** Имеем линейную задачу динамического программирования. Ее можно решать методом Беллмана. Однако численная реализация этого метода достаточно трудоемкая задача. Рассмотрим другой способ.

Преобразуем нашу задачу к эквивалентной задаче линейного программирования. Подставим (10) в (9). В результате целевая функция примет вид

$$J = Z_0 + \sum_{t=0}^{T-1} (\mathbf{Z}(t)\mathbf{u}(t)) \to \min_{\mathbf{u}(t)},$$

где

$$Z_0 = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A1}(0) + \mathbf{A1}(0)\,\mathbf{A1}(1) + \ldots + \mathbf{A1}(0)\,\mathbf{A1}(1)\,\mathbf{A1}(2)\cdots\mathbf{A1}(T-1))\cdot M(\mathbf{z}(0)),$$

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{cases} -\mathbf{b}^T(t) + \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A1}(t+1) + \mathbf{A1}(t+1)\,\mathbf{A1}(t+2) + \ldots + \mathbf{A1}(t+1)\,\mathbf{A1}(t+2)\cdots\mathbf{A1}(T-1))\cdot\mathbf{B1}(t), \\ t = 0,1,\ldots,T-2, \\ \mathbf{J}(T-1) = -\mathbf{b}^T(T-1) + \mathbf{C}\cdot\mathbf{B1}(T-1). \end{cases}$$

Преобразуем ограничения (11), (13). Введем блочную матрицу **G** с элементами

$$G_{is}^k = \mathbf{H}_k\cdot\prod_{j=s}^{i-1}(\mathbf{A}(j)\mathbf{B}(s-1)),\ i > s;$$

$$G_{is}^k = \mathbf{H}_k\cdot\mathbf{B}(i-1),\ i = s;\ i,s = 1,\ldots,T;$$

$$G_{is}^k = \mathbf{0},\ i < s;\ k = 1,2,$$

где $\mathbf{H}_1 = \mathbf{P}$; $\mathbf{H}_2 = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{Q} - \mathbf{I})$.

Введем блочные составные вектора $\mathbf{\Psi}$ и **U** с компонентами

$$\Psi_k(i) = \Gamma_k(i) - \mathbf{H}_k\prod_{j=0}^{i-1}(\mathbf{A}(j)\mathbf{z}(0)),\ i = 1,\ldots,T,$$

$$\mathbf{U} = \left(u(0),u(1),\ldots,u(T-1)\right)^T.$$

В результате ограничения (11), (13) примут вид $\mathbf{G}^k\cdot\mathbf{U} \le \mathbf{\Psi}_k$.

Рассмотрим ограничение (12). Введем блочную матрицу $\mathbf{\Phi}$:

$$\Phi_{is} = -\mathbf{Y}\cdot\prod_{j=s}^{i-2}(\mathbf{A}(j)\mathbf{B}(s-1)),\ i > s;$$

$$\Phi_{is} = -\mathbf{Y},\ i = s;\ i,s = 1,\ldots,T;\ \prod_{j=l}^{l-1}(\mathbf{A}(j) = \mathbf{I}$$

$$\Phi_{is} = \mathbf{0},\ i < s.$$

и

$$\Lambda_i = \prod_{j=s}^{i-2}(\mathbf{A}(j)\mathbf{z}(0)),\ i = 2,\ldots,T-1;\ \Lambda_1 = 1;\ \prod_{j=l}^{l-1}(\mathbf{A}(j) = \mathbf{I}.$$

После преобразования ограничения (13) получим $\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{U} \le \mathbf{\Lambda}$.

В результате задача слежения примет вид

$$J = J_0 + \mathbf{Z}^T\mathbf{U} \to \min_{\mathbf{u}(t)}, \tag{14}$$

$$\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{U} \le \mathbf{\Lambda}, \tag{15}$$

$$\mathbf{G}^k\cdot\mathbf{U} \le \mathbf{\Psi}_k,\ k = 1,2. \tag{16}$$

Здесь вектор **Z** с компонентами: $\mathbf{Z} = \left(Z(0),Z(1),\ldots,Z(T-1)\right)^T$.

**Управление с прогнозирующей моделью.** Задача (14)–(16) может быть решена стандартным симплекс-методом с помощью любого математического пакета (например, Mathcad). Однако следует отметить, что на практике задачи линейного программирования большой размерности решаются очень плохо. В нашем случае размерность задачи составляет $(N+K)\times T$, и при $N+K = 10$ и $T = 10$ уже получим число переменных 100.

Для преодоления этой трудности воспользуемся методом управления с прогнозирующей моделью [3]. Суть метода состоит в следующем. Задается горизонт прогнозирования $q_0 < T$. Для заданного начального состояния $z(0)$ вычисляется последовательность управляющих воздействий $u_i(0),\ t = 0,\ldots,q_0 - 1$. На следующем шаге горизонт управления сдвигается на один шаг ($q_1 = q_0 + 1$), а в качестве начального состояния берется $z(1)$, найденное на предыдущем шаге. Процедура повторяется до тех пор, пока $q_n = q_{n-1} + 1 = T$, где $n$ – число шагов. Размерность каждой подзадачи равна $(N+K)\times q_0$.

**Заключение.** В работе получена линейная модель управления инвестиционным портфелем, включающим два подпортфеля – рисковый и безрисковый. Модель представляет собой задачу линейного программирования. Для уменьшения размерности задачи предлагается использовать управление с прогнозирующей моделью. Если безрисковая ставка не меняется после формирования подпортфеля безрисковых ценных бумаг, то задача слежения за портфелем описывается соотношениями (14)–(16), при этом в ограничении (16) $k=1$. В результате имеем стохастическую задачу, так как в ограничениях (15), (16) матрицы $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$ случайны. Поэтому оптимальное управление будет также случайным. На практике, как правило, именно такая ситуация имеет место.

Для моделирования задачи слежения необходимо задать закон распределения случайной составляющей доходности рисковых ценных бумаг $\boldsymbol{\eta}(t)$. Будем полагать, что случайный вектор $\boldsymbol{\eta}(t)$ имеет первые два момента: $M(\boldsymbol{\eta}(t)) = \mathbf{0}$, $M(\boldsymbol{\eta}(t)\ (\boldsymbol{\eta}^T(t)) = \boldsymbol{\Sigma}(t)$. Матрица ковариации $\boldsymbol{\Sigma}(t)$ случайной ставки доходности рисковых активов симметрична и положительно определена. В общем случае она представляет собой сумму матриц ковариации гауссовского шума и пуассоновской составляющей, описывающей скачки ставки доходности ценных бумаг

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \boldsymbol{\Sigma}_1(t) + \boldsymbol{\Sigma}_2(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)\,\boldsymbol{\sigma}^T(t) + \boldsymbol{\delta}(t)\,\boldsymbol{\delta}^T(t).$$

Матрицу $\boldsymbol{\Sigma}(t)$ можно представить в виде произведения матриц $\boldsymbol{\Sigma}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^T(t)$, где $\mathbf{W}(t) = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}(t)$. Если скачки отсутствуют, то $\mathbf{W}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)$ и случайная составляющая ставки доходности рисковых активов $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{w}(t)$, где $\boldsymbol{\sigma}(t)$ – матрица, определяющая влияние гауссовского шума; $\mathbf{w}(t) = \left(w_1,...,w_N\right)^T$ – вектор нормализованного гауссовского шума с параметрами $M(\mathbf{w}(t)) = \mathbf{0}$, $M(\mathbf{w}(t)\ \mathbf{w}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})) = \mathbf{I}$ (здесь $\mathbf{I}$ – единичная матрица). Если необходимо учесть скачки, тогда $\boldsymbol{\Sigma}(t) = \boldsymbol{\Sigma}_1(t) + \boldsymbol{\Sigma}_2(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)\,\boldsymbol{\sigma}^T(t) + \boldsymbol{\delta}(t)\,\boldsymbol{\delta}^T(t)$. Здесь $\boldsymbol{\Sigma}_1(t)$ – матрица гауссовского шума, $\boldsymbol{\Sigma}_2(t)$ – матрица скачков. В этом случае $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{w}(t) + \boldsymbol{\delta}(t)\boldsymbol{\xi}(t)$, где $\boldsymbol{\xi}(t) = \left(\xi_1,...,\xi_N\right)^T$ – случайный вектор скачков ставки доходности с пуассоновским распределением с параметрами $M(\boldsymbol{\xi}(t)) = \mathbf{0}$, $M(\boldsymbol{\xi}(t)(\boldsymbol{\xi}^T(t)) = = diag\left(\lambda_1(t)\theta_1(t),...,\lambda_n(t)\theta_n(t)\right)$. Здесь $\lambda_i(t)$ – интенсивность скачков; $\theta_i(t)$ – величина скачка.

*Литература*

1. Домбровский В.В. Линейно-квадратичное управление дискретными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами с применением к оптимизации инвестиционного портфеля / В.В. Домбровский, Е.А. Ляшенко // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 10. – С. 50–65.

2. Домбровский В.В. Динамическая модель управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке со стохастической волатильностью / В.В. Домбровский, Е.А. Ляшенко // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №5. – С. 12–21.

3. Домбровский В.В. Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля / В.В. Домбровский, Д.В. Домбровский, Е.А. Ляшенко // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 4. – С. 84–97.

4. Герасимов Е.С. Динамическая сетевая модель управления инвестициями при квадратичной функции риска / Е.С. Герасимов, В.В. Домбровский // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 2. – С. 119–128.

5. Домбровский В.В. Модель управления инвестиционным портфелем в пространстве состояний на нестационарном диффузионно-скачкообразном финансовом рынке / В.В. Домбровский, Е.Н. Федосов // Автоматика и вычислительная техника. – 2002. – № 6. – С. 13–24.

6. Домбровский В.И. Динамическая модель управления инвестиционным портфелем при квадратической функции риска / В.В. Домбровский, В.А. Гальперин // Вестник ТГУ. – 2000. – № 269. – С. 75–77.

7. Гальперин В.А. Динамическое управление самофинансируемым инвестиционным портфелем при квадратической функции риска в дискретном времени / В.А. Гальперин, В.В. Домбровский // Вестник ТГУ. Приложение. – 2002. – №1(I). – С. 141–146.

8. Гальперин В.А. Управление инвестиционным портфелем в непрерывном времени при квадратической функции риска / В.А. Гальперин, В.В. Домбровский // Труды Десятого юбилейного

симп. по непараметрическим и робастным статистическим методам в кибернетике. – Томск: ТГУ, 2003. – С. 201–207.

9. Гальперин В.А. Динамическое управление инвестиционным портфелем с учетом скачкообразного изменения цен финансовых активов / В.А. Гальперин, В.В. Домбровский // Вестник ТГУ. – 2003. – № 280. – С. 112–117.

10. Домбровский В.В. Динамическая оптимизация инвестиционного портфеля при ограничениях на объемы вложений в финансовые активы / В.В. Домбровский, Д.В. Домбровский, Е.А. Ляшенко // Вестник ТГУ. – 2008. – № 1(12). – С. 13–17.

11. Параев Ю.И. Управление инвестиционным портфелем / Ю.И. Параев, С.А. Цветницкая // Вестник ТГУ. – 2004. – № 284. – С. 77–79.

12. Параев Ю.И. Исследование инвестиционных стратегий управления портфелем ценных бумаг / Ю.И. Параев, С.А. Цветницкая // Вестник ТГУ. – 2009. – № 4(9). – С. 17–25.

13. Крицкий О.Л. Оптимизация портфеля финансовых инструментов / О.Л. Крицкий, О.А. Бель-снер // Финансы и кредит. – 2013. – № 36(564). – С. 35–40.

14. Мицель А.А. Инвестиционный портфель пенсионных накоплений / А.А. Мицель, О.И. Рекундаль // Финансовая аналитика: проблемы и решения. – М.: Финанспресс, 2011. – № 40(82). – С. 2–5.

**Мицель Артур Александрович**
Д-р техн. наук, профессор каф. автоматизированных систем управления ТУСУРа,
профессор каф. информационных систем (ИС) Юргинского технологического института (ЮТИ) НИТПУ
Тел.: (382-2) 70-15-36
Эл. почта: maa@asu.tusur.ru

**Красненко Николай Петрович**
Д-р физ.-мат. наук, профессор каф. радиотехнических систем ТУСУРа, каф. ИС ЮТИ НИТПУ
Тел.: (382-2) 49-24-18
Эл. почта: krasnenko@imces.ru

Mitsel A.A., Krasnenko N.P.

**Dynamic model of management of an investment portfolio with linear criterion of quality**

The paper considers the system with casual parameters in discrete time on the example of the investment portfolio of securities including risk and risk-free assets. The portfolio is presented in the form of two subportfolios – risky and risk-free. The linear criterion of quality is used for creation of model of management in a problem of tracking a reference portfolio. The linear criterion of quality allows to receive linear dynamic model which represents model of linear programming. The model allows to consider restrictions both on a condition of a system, and on management. For reduction of dimension of a task the method of management with the predicting model is used.

**Keywords:** optimum control, dynamic system with casual parameters, linear programming, an investment portfolio, tracking a reference portfolio.