УДК 537.876.22+535.56

В.В. Фисанов

Электромагнитные волны в изотропной метакиральной среде

Выполнена декомпозиция электромагнитного поля в прозрачной метакиральной биизотропной среде на два поля Бельтрами, которые характеризуются неравными положительными волновыми числами и общим волновым импедансом. Знак волнового импеданса определяется знаками диэлектрической и магнитной проницаемостей среды. Получено условие различения прямых и обратных нормальных волн круговой поляризации.

Ключевые слова: метакиральная среда, диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, параметр киральности, электромагнитные поля Бельтрами, волновой импеданс, положительные волновые числа, прямые и обратные плоские волны.

Искусственным композитным электромагнитным материалам с экстремальными (в том числе отрицательными) значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей в настоящее время уделяется повышенное внимание вследствие многообразия связанных с ними необычных волновых явлений, таких как отрицательное преломление, плоская линза, маскировка объектов. При наличии дополнительного параметра киральности такие материалы называют метакиральными средами. В отличие от обычных киральных сред в них допускается возможность существования не только прямых, но и обратных нормальных волн круговой поляризации. Обратная волна возникает даже при неотрицательных значениях проницаемостей [1, 2]. Следуя В.Г. Веселаго [3], в электродинамике метаматериалов при описании обратных волн применяют термины «отрицательный коэффициент (показатель) преломления», «отрицательное волновое число». Между тем, согласно каноническому определению, волновое число является длиной (модулем) волнового вектора и по этой причине не может принимать отрицательные значения. Налицо присутствует методический парадокс, который требует разрешения.

С этой целью в данной работе для исследования прямых и обратных нормальных волн в биизотропной метакиральной среде применяется новый подход, при котором волновые числа в отсутствие диссипативных потерь полагаются безусловно положительными величинами и применяется уточнённая трактовка волнового импеданса.

Постановка задачи, декомпозиция уравнений поля. Для феноменологической характеристики киральных сред используют различные системы материальных уравнений, но применительно к метакиральной среде наиболее употребительным является **EH**-представление (представление Теллегена), согласно которому векторы индукций $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ выражаются через векторы напряжённостей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ электрического и магнитного поля в среде (например, [1, 4, 5]). Это представление происходит от предложенных Кондоном [6, 7] и усовершенствованных Силверманом [8] уравнений, предназначенных для описания явления оптической активности. В случае монохроматического поля круговой частоты ω и временного фактора $\exp(-i\omega t)$ система материальных уравнений имеет вид

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+i\kappa\mathbf{H}, \quad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}-i\kappa\mathbf{E}, \tag{1}$$

где параметр киральности $\kappa=\omega g$ пропорционален коэффициенту гирации g Кондона–Силвермана, $i=\sqrt{-1}$. Диэлектрическая проницаемость ε, магнитная проницаемость μ и параметр κ принимаются здесь и далее действительными величинами. Энантиоморфные разновидности киральной среды различаются по знаку параметра киральности κ. Уравнения Максвелла после подстановки в них уравнений (1) принимают вид

$$\nabla\times\mathbf{E}=i\omega(\mu\mathbf{H}-i\kappa\mathbf{E}), \quad \nabla\times\mathbf{H}=-i\omega(\varepsilon\mathbf{E}+i\kappa\mathbf{H}), \quad \nabla\cdot\mathbf{E}=0, \quad \nabla\cdot\mathbf{H}=0. \tag{2}$$

Далее обычно переходят к дифференциальным уравнениям второго порядка относительно вектора $\mathbf{E}$ или вектора $\mathbf{H}$ [4]. Борен [9] предложил иной подход: перейти к уравнениям первого порядка для волновых полей левой круговой поляризации (комплексная амплитуда $\mathbf{Q}_1$) и правой круговой поляризации (комплексная амплитуда $\mathbf{Q}_2$) посредством линейного преобразования

$$\mathbf{E}=\mathbf{Q}_1-i\eta\mathbf{Q}_2, \quad \mathbf{H}=\mathbf{Q}_2-i\zeta\mathbf{Q}_1, \tag{3}$$

где $\eta = \zeta^{-1}$ – волновой импеданс. Поля $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ пропорциональны своим роторам, т.е. подчиняются дифференциальным уравнениям

$$\nabla \times \mathbf{Q}_1 = \tilde{\gamma}_1 \mathbf{Q}_1,\ \nabla \cdot \mathbf{Q}_1 = 0,\ \nabla \times \mathbf{Q}_2 = -\tilde{\gamma}_2 \mathbf{Q}_2,\ \nabla \cdot \mathbf{Q}_2 = 0 \qquad (4)$$

и поэтому называются электромагнитными полями Бельтрами. В обычной киральной среде положительные величины $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ являются волновыми числами соответствующих полей Бельтрами. Действительно, в силу своей соленоидальности поля Бельтрами удовлетворяют уравнению Гельмгольца вида $\nabla^2 \mathbf{Q}_j + \tilde{\gamma}_j^2 \mathbf{Q}_j = 0$, где $j = 1,2$. В метакиральной среде величины $\tilde{\gamma}_j$ могут изменить знак, поэтому их следует считать просто собственными значениями дифференциального оператора вихря. В терминах гидродинамики величины $\tilde{\gamma}_j$ являются постоянными коэффициентами пропорциональности между завихренностью ($\nabla \times \mathbf{Q}_j$) и скоростью ($\mathbf{Q}_j$) векторных потоков Бельтрами–Тркала. Волновые числа γ_j определим через них по формулам

$$\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1 \operatorname{sgn} \tilde{\gamma}_1,\ \gamma_2 = \tilde{\gamma}_2 \operatorname{sgn} \tilde{\gamma}_2. \qquad (5)$$

Для отыскания волновых чисел подставим формулы (3) в вихревые уравнения Максвелла (2), заменим роторы согласно (4) и перегруппируем слагаемые так, чтобы однотипные поля располагались по разные стороны от знака равенства:

$$(\tilde{\gamma}_1 - \omega\kappa - \omega\mu\zeta)\mathbf{Q}_1 = -i(\eta\tilde{\gamma}_2 - \omega\mu + \omega\kappa\eta)\mathbf{Q}_2, \qquad (6)$$

$$-i(\zeta\tilde{\gamma}_1 - \omega\varepsilon - \omega\kappa\zeta)\mathbf{Q}_1 = (\tilde{\gamma}_2 + \omega\kappa - \omega\varepsilon\eta)\mathbf{Q}_2. \qquad (7)$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при полях $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$, получим следующие соотношения:

$$\tilde{\gamma}_1 = \omega(\kappa + \mu\zeta) = \omega(\kappa + \varepsilon\eta), \quad \tilde{\gamma}_2 = -\omega(\kappa - \varepsilon\eta) = -\omega(\kappa - \mu\zeta). \qquad (8)$$

Из формул (8) следует, что $\varepsilon\eta = \mu\zeta$ и $\eta^2 = \mu/\varepsilon$. Далее, при $\kappa = 0$ (некиральная среда) величины $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ становятся равными волновому числу для полей круговой поляризации в обычной изотропной среде, которое обозначим символом k, так что

$$k = \omega\varepsilon\eta = \omega\mu\zeta. \qquad (9)$$

Так как волновое число k является положительной величиной, из формулы (9) непосредственно следует, что знак волнового импеданса η (и волнового адмитанса ζ) определяется знаком проницаемостей. В обычном диэлектрике (положительные ε и μ) волновой импеданс положительный, равен арифметическому квадратному корню из отношения проницаемостей: $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$. Однако в среде Веселаго (т.е. в среде с проницаемостями $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$) импеданс является отрицательной величиной. Обобщённо он вычисляется по формуле

$$\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon} \operatorname{sgn} \varepsilon = \sqrt{\mu/\varepsilon} \operatorname{sgn} \mu, \qquad (10)$$

при этом имеется в виду, что в прозрачной среде знаки диэлектрической и магнитной проницаемостей совпадают. Формула (10) является справедливой не только для изотропной среды, но и для биизотропной метакиральной среды с материальными уравнениями вида (1). С учётом (9) формулы (8) принимают вид

$$\tilde{\gamma}_1 = k + \omega\kappa,\ \tilde{\gamma}_2 = k - \omega\kappa. \qquad (11)$$

Как следует из формулы (11), случай метакиральности реализуется при выполнении неравенства $\varepsilon\mu < \kappa^2$: при любом знаке параметра киральности κ одна из величин $\tilde{\gamma}_j$ оказывается отрицательной. Вводя показатель преломления $n = k/k_0$, где k_0 – волновое число для вакуума, указанное неравенство можно преобразовать к виду $n < |\kappa| / \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, что соответствует либо сильной киральности, либо малому значению показателя преломления эквивалентной некиральной среды (ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные).

Электромагнитные поля Бельтрами $\mathbf{Q}_j$ распространяются без взаимодействия в однородной и безграничной среде. Переносимая ими энергия характеризуется векторами Пойнтинга

$\mathbf{S}_j = S_j\hat{\mathbf{s}}_j = (1/2)\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}_j \times \mathbf{H}_j^*\right)$, где S_j – длина вектора Пойнтинга j-го поля (положительная величина), $\hat{\mathbf{s}}_j$ – его орт. Определим плоские волны Бельтрами как $\mathbf{Q}_j(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}_{0j}\exp\left(i\gamma_j\hat{\gamma}_j \cdot \mathbf{r}\right)$, где $\hat{\gamma}_j$ – орт волнового вектора γ_j в направлении движения фазового фронта волны, $\mathbf{Q}_{0j}$ – комплексная амплитуда. Вместо системы (4) получается совокупность векторных алгебраических уравнений

$$\hat{\gamma}_1 \times \mathbf{Q}_{01} = -i\mathbf{Q}_{01}\,\mathrm{sgn}\,\tilde{\gamma}_1,\ \hat{\gamma}_1 \cdot \mathbf{Q}_{01} = 0;\ \hat{\gamma}_2 \times \mathbf{Q}_{02} = i\mathbf{Q}_{02}\,\mathrm{sgn}\,\tilde{\gamma}_2,\ \hat{\gamma}_2 \cdot \mathbf{Q}_{02} = 0.$$

Для действительных значений импеданса η вектор Пойнтинга левой волны Бельтрами $\mathbf{S}_1 = S_1\hat{\mathbf{s}}_1$ определяется выражением

$$\mathbf{S}_1 = (1/2)\mathrm{Re}\left(i\zeta\mathbf{Q}_{01} \times \mathbf{Q}_{01}^*\right) = (1/2)\zeta|\mathbf{Q}_{01}|^2\,\hat{\gamma}_1\,\mathrm{sgn}\,\tilde{\gamma}_1. \quad (12)$$

Соответственно для вектора Пойнтинга правой волны Бельтрами $\mathbf{S}_2 = S_2\hat{\mathbf{s}}_2$ имеем

$$\mathbf{S}_2 = (1/2)\mathrm{Re}\left(-i\eta\mathbf{Q}_{02} \times \mathbf{Q}_{02}^*\right) = (1/2)\eta|\mathbf{Q}_{02}|^2\,\hat{\gamma}_2\,\mathrm{sgn}\,\tilde{\gamma}_2. \quad (13)$$

В метакиральной изотропной среде направления переноса энергии (луча) и движения фронта волны могут либо совпадать (прямая волна), либо быть противоположными (обратная волна), т.е. $\hat{\gamma}_j = \left(\hat{\mathbf{s}}_j \cdot \hat{\gamma}_j\right)\hat{\mathbf{s}}_j$. Подставляя это соотношение в (12) и (13) и учитывая, что $S_j > 0$, получим универсальное неравенство $\eta\left(\hat{\mathbf{s}}_j \cdot \hat{\gamma}_j\right)\mathrm{sgn}\,\tilde{\gamma}_j > 0$. Из него сразу следует ключевая формула

$$\hat{\mathbf{s}}_j \cdot \hat{\gamma}_j = \mathrm{sgn}\left(\eta\tilde{\gamma}_j\right) \quad (14)$$

для определения типа плоских волн Бельтрами: прямой волне соответствует значение знаковой функции $+1$, обратной волне – значение -1. Следует учитывать, что согласно (8) оба числа $\tilde{\gamma}_j$ с номерами $j = 1$ и $j = 2$ не могут одновременно принимать отрицательные значения. Формула (14) даёт возможность уточнить классификацию нормальных волн круговой поляризации в изотропной киральной среде. В обычной киральной среде с положительными проницаемостями, называемой также средой Пастера [10], положительными являются волновой импеданс η и оба числа $\tilde{\gamma}_j = \gamma_j$. Метакиральную среду с двумя отрицательными проницаемостями было предложено назвать средой Пастера–Веселаго [11]. Она характеризуется отрицательным волновым импедансом η и допускает режим с двумя обратными волнами, если оба числа $\tilde{\gamma}_j$ являются положительными. Смешанные режимы с прямой и обратной нормальными волнами реализуются как при положительном, так и отрицательном волновом импедансе при условии, что числа $\tilde{\gamma}_j$ имеют противоположные знаки. Если в среде изменяется только знак параметра киральности, то смешанный режим сохраняется, но каждая нормальная волна изменяет свой первоначальный тип противоположным образом.

Отказ от концепции отрицательного волнового числа позволяет устранить отмеченное ранее [11, 12] различие в знаках диэлектрической и магнитной проницаемостей при переходе от системы материальных уравнений в представлении Теллегена к уравнениям в форме Друде–Борна–Фёдорова, которое происходит при достижении сильной киральности.

Заключение. Описание обратной волны в метакиральной среде не требует введения для неё нового понятия «отрицательное волновое число», но нуждается в уточнении трактовки волнового импеданса в случае отрицательных значений и диэлектрической, и магнитной проницаемостей. Также следует делать различие между волновым числом и соответствующим ему параметром (собственным числом) уравнения для поля Бельтрами. Плоская волна Бельтрами является обратной при условии, что знаки у волнового импеданса и у собственного числа оказываются противоположными.

Литература

1. Waves and energy in chiral nihility / S. Tretyakov, I. Nefedov, A. Sihvola, S. Maslovski, C. Simovski // J. of Electromagn. Waves and Appl. – 2003. –Vol. 17, № 5. – P. 695–706.

2. Pendry J. A chiral route to negative refraction // Science. – 2004. – Vol. 306, № 5700. – P. 1353–1355.

3. Веселаго В.Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ // УФН. – 1967. – Т. 92, вып. 3. – С. 517–526.

4. Chern R.-L. Wave propagation in chiral media: composite Fresnel equations // J. Opt. – 2013. – Vol. 15, № 7. – P. 075702-1–075702-7.

5. Cao Y. Complete band gaps in one-dimensional photonic crystals with negative refraction arising from strong chirality / Y. Cao, J. Li // Phys. Rev. B. – 2014. – Vol. 89, № 11. – P. 115420-1–115420-5.

6. Condon E.U. Theories of optical rotatory power // Rev. Mod. Phys. – 1937. – Vol. 9, № 4. – P. 432–457.

7. Кондон Е. Теория оптической вращающей способности // УФН. – 1938. – Т. 19, вып. 3. – С. 380–430.

8. Silverman M.P. Reflection and refraction at the surface of a chiral medium: comparison of gyrotropic constitutive relations invariant or noninvariant under a duality transformation // J. Opt. Soc. Am. A. – 1986. – Vol. 3, № 6. – P. 830–837.

9. Bohren C.F. Light scattering by an optically active sphere // Chem. Phys. Lett. – 1974. – Vol. 21, № 3. – P. 458–462.

10. Sihvola A.H. Bi-isotropic constitutive relations / A.H. Sihvola, I.V. Lindell // Microwave Opt. Technol. Lett. – 1991. – Vol. 4, № 8. – P. 295–297.

11. Фисанов В.В. Инварианты изотропной киральной среды // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52, № 9. – С. 1089–1091.

12. Zhang C. Spatial dispersion and energy in a strong chiral medium / C. Zhang, T.J. Cui // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, № 8. – P. 5114–5119.

Фисанов Василий Васильевич
Д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник СФТИ при НИТГУ, профессор каф. радиофизики
Национального исследовательского Томского государственного университета
Тел.: 8 (382-2) 41-20-78
Эл. почта: fisanov@mail.tsu.ru

Fisanov V.V.
Electromagnetic waves in an isotropic metachiral medium

Electromagnetic-field decomposition in a transparent metachiral bi-isotropic medium is performed onto two Beltrami fields, which are characterized by unequal positive wave numbers and common wave impedance. Sign of the wave impedance is determined by signs of permittivity and permeability of the medium. The condition of distinction between forward and backward circularly polarized eigenwaves is obtained.
Keywords: metachiral medium, dielectric permittivity, magnetic permeability, chirality parameter, electromagnetic Beltrami fields, wave impedance, positive wave numbers, forward and backward plane waves.
