УДК 62-192

А.А. Ефремов

Вычисление нечеткой вероятности безотказной работы систем с нечеткими параметрами моделей надежности

Предложен подход к определению эксплуатационной надежности оборудования по имеющимся наработкам до отказа при неполной информации об условиях эксплуатации изделий. Для задания нечетких параметров моделей надежности предложено использовать полиномиальные кусочно-непрерывные функции принадлежности второго порядка. Приведен пример вычисления значений нечеткой вероятности безотказной работы и определения нечеткого времени гамма-процентной наработки.

Ключевые слова: надежность, вероятность безотказной работы, гамма-процентная наработка, нечеткое множество, нечеткое число, нечеткая вероятность, полиномиальные функции принадлежности.

При оценке эксплуатационной надежности оборудования по имеющимся наработкам до отказа зачастую не учитываются факторы, связанные с влиянием на надежность окружающей среды и условий эксплуатации конкретных изделий. Анализ данных об отказах позволяет выбрать адекватную модель надежности в виде аналитического выражения либо для функции вероятности безотказной работы (ВБР), либо для функции распределения времени отказов [1] и получить оценки значений параметров модели [2]. При этом наработки до отказа идентичного оборудования рассматриваются как случайные числа, принадлежащие одной генеральной совокупности. Однако в течение времени работы различные экземпляры изделий могли испытывать различные нагрузки и эксплуатироваться при разных условиях окружающей среды. В целом подобные факторы могли оказать как отрицательное, так и положительное влияние на надежность оборудования. Принимая во внимание неопределенность и неполноту сведений об условиях эксплуатации конкретных экземпляров изделий, представляется обоснованным использовать модели надежности с нечеткими параметрами [3].

Задача определения нечеткой ВБР. В работе [4] предлагается рассматривать точечные оценки параметров распределений в качестве ядер соответствующих нечетких параметров, а интервальные оценки с доверительной вероятностью $(1-\alpha)$ как α-сечения нечетких параметров. При этом, поскольку получить интервальную оценку при $\alpha=0$ невозможно, в [4] предлагается использовать в качестве носителя нечеткого множества α-сечение при наименьшем доступном значении α (например, $\alpha=0{,}01$).

На рис. 1, *а* приведен типовой результат оценки нечеткого параметра модели надежности. Для получения аналитически заданной функции принадлежности нечеткого параметра предлагается использовать аппроксимацию результата оценки следующей функцией принадлежности, введенной в [5, 6]:

$$\mu(x)=f_L(x)\cdot H\left(x-S^L\right)\cdot H(K-x)+f_R(x)\cdot H(x-K)\cdot H\left(S^R-x\right), \quad (1)$$

где $H(x)$ – единичная функция Хэвисайда, K – ядро нечеткого числа с основанием $\left[S^L, S^R\right]$, а $f_L(x)=\sum_{i=0}^{2}a_i x^i$ и $f_R(x)=\sum_{i=0}^{2}b_i x^i$ – полиномы второго порядка, чьи коэффициенты связаны с характерными точками нечеткого числа $\left\langle S^L, K, S^R\right\rangle$ следующими соотношениями:

$$a_0=\frac{\left(S^L\right)^2}{\left(S^L-K\right)^2};\ a_1=\frac{-2S^L}{\left(S^L-K\right)^2};\ a_2=\frac{1}{\left(S^L-K\right)^2};\quad b_0=\frac{\left(S^R\right)^2}{\left(S^R-K\right)^2};\ b_1=\frac{-2S^R}{\left(S^R-K\right)^2};\ b_2=\frac{1}{\left(S^R-K\right)^2}. \quad (2)$$

Результат аппроксимации (рис. 1, *б*) позволяет однозначно задать нечеткое значение параметра модели надежности в виде аналитического выражения для функции принадлежности. Из рис. 1, *б* видно, что ошибка аппроксимации незначительна. Кроме того, использование функции принадлежности (1) позволяет найти более реалистичные границы $\left[S^L,\, S^R\right]$ основания нечеткого числа, а определение границ его α-сечений сводится к решению пары квадратных уравнений [5].

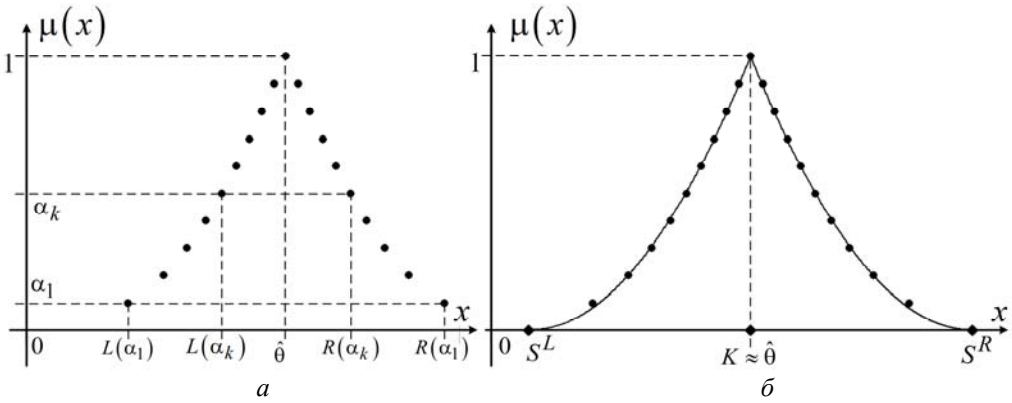

Рис. 1. Оценка нечеткого параметра модели надежности:
а – заданная α-сечениями; *б* – заданная функцией принадлежности

Способ расчета нечеткой ВБР. Исходными данными для построения функции нечеткой вероятности безотказной работы (ВБР) является массив $\mathbf{T}=\{\tau_1,\tau_2,...,\tau_m\}$ наработок до отказа m идентичных изделий. Предполагается, что данные изделия эксплуатировались при различных и изменяющихся условиях окружающей среды и в процессе эксплуатации нагрузка (загруженность) изделий непредсказуемо менялась. Пусть по имеющимся данным получены оценки значений ВБР p_i в моменты $\tau_i, i=1...m$. Также предположим, что для данного изделия была выбрана определенная *n*-параметрическая модель надежности $P(t,\mathbf{\Theta})$, где $\mathbf{\Theta}=\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_n\}$ – вектор параметров. Точечные оценки $\hat{\theta}_j$ значений параметров $\theta_j, j=1,...,n$ были получены методом наименьших квадратов или методом максимального правдоподобия [2]. Для произвольных значений $0<\alpha<1$ получены интервальные оценки параметров θ_j с доверительной вероятностью $(1-\alpha)$:

$$I_{\theta_j}(1-\alpha)=\left[L_{\theta_j}(\alpha),\, R_{\theta_j}(\alpha)\right], \tag{3}$$

где $L_{\theta_j}(\alpha)$ и $R_{\theta_j}(\alpha)$ – соответственно левая и правая границы доверительного интервала.

Согласно [4] полученные доверительные интервалы рассматриваются как α-сечения нечетких параметров $\tilde{\theta}_j$:

$$\tilde{\theta}_j[\alpha]=I_{\theta_j}(1-\alpha), \tag{4}$$

а точечные оценки $\hat{\theta}_j$ – как их ядра.

При условии, что получены не менее двух интервальных оценок для каждого из параметров, выполним аппроксимацию имеющихся α-сечений нечетких параметров с помощью функций принадлежности (1).

Таким образом, параметры модели надежности задаются нечеткими числами $\tilde{\theta}_j=\left\{\left(x,\, \mu_{\theta_j}(x)\right)|\, x\in\Re\right\}$ и однозначно определяются своими характерными точками $\tilde{\theta}_j=\left\langle S^L_{\theta_j}, K, S^R_{\theta_j}\right\rangle$.

С учетом этого α-сечения нечетких параметров $\tilde{\theta}_j$ представляют собой интервалы

$$\tilde{\theta}_j[\alpha]=\left\{x\in\Re|\mu_{\theta_j}(x)\geq\alpha\right\}=\left[L_{\theta_j}(\alpha), R_{\theta_j}(\alpha)\right]. \tag{5}$$

Образуем двухэлементные множества, содержащие границы этих интервалов:

$$\Psi_{j,\alpha} = \left\{ L_{\theta_j}(\alpha),\ R_{\theta_j}(\alpha) \right\}. \quad (6)$$

Элементами декартового произведения $D_\alpha = \Psi_{1,\alpha} \times \Psi_{2,\alpha} \times ... \times \Psi_{n,\alpha}$ являются кортежи $d_\alpha = \left(\psi_{1,\alpha}, \psi_{2,\alpha}, ..., \psi_{n,\alpha}\right)$, представляющие всевозможные комбинации из левых и правых границ α-сечений нечетких параметров $\tilde{\theta}_j$. Тогда функция ВБР $\tilde{P}\left(t, \tilde{\boldsymbol{\Theta}}\right)$ с нечеткими параметрами $\tilde{\boldsymbol{\Theta}} = \left\{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, ... \tilde{\theta}_n\right\}$ в каждый момент времени t^* принимает значения из класса нечетких множеств $F = \left\{\tilde{A}\right\}$, $\tilde{A} = \left\{\left(p, \mu_A(p)\right) | \, p \in [0,1]\right\}$, являющихся нечеткими вероятностями. Границы α-сечений $\tilde{P}\left(t^*, \tilde{\boldsymbol{\Theta}}\right)_\alpha = \left[L_P(\alpha), R_P(\alpha)\right]$ нечеткой ВБР в произвольный момент времени t^* определяются следующим образом:

$$\begin{cases} L_P(\alpha) = \min\limits_{D_\alpha} P\left(t^*, d_\alpha\right); \\ R_P(\alpha) = \max\limits_{D_\alpha} P\left(t^*, d_\alpha\right). \end{cases} \quad (7)$$

Способ определения нечеткой гамма-процентной наработки. Гамма-процентная наработка до отказа $T_{\gamma\%}$ определяет интервал времени с начала работы, в течение которого отказ объекта не возникнет с вероятностью γ, выраженной в процентах [1], и определяется из уравнения

$$P\left(T_{\gamma\%}\right) = \frac{\gamma}{100}, \quad (8)$$

где $P(x)$ – функция ВБР.

Данный показатель позволяет, используя задаваемый уровень безотказности, определить момент времени $T_{\gamma\%}$, после которого необходимо выполнить комплекс профилактических мер: техническое обслуживание, плановый ремонт оборудования и т.п. В случае систем, вероятность безотказной работы которых представляет собой функцию вида $\tilde{P}\left(t, \tilde{\boldsymbol{\Theta}}\right)$, решение уравнения (8) приведет к тому, что искомое значение гамма-процентной наработки будет представлять собой нечеткое число $\tilde{T}_{\gamma\%}$. С учетом (7) границы α-сечений $\tilde{T}_{\gamma\%}[\alpha] = \left[L_{T_{\gamma\%}}(\alpha),\ R_{T_{\gamma\%}}(\alpha)\right]$ можно определить из следующих уравнений:

$$\begin{cases} \min\limits_{D_\alpha} P\left(L_{T_{\gamma\%}}, d_\alpha\right) = \dfrac{\gamma}{100}; \\ \max\limits_{D_\alpha} P\left(R_{T_{\gamma\%}}, d_\alpha\right) = \dfrac{\gamma}{100}. \end{cases} \quad (9)$$

Полученное нечеткое число $\tilde{T}_{\gamma\%}$ можно подвергнуть процедуре дефаззификации, например методом центра тяжести [7] с целью получения конкретных рекомендаций по времени проведения планово-профилактических мероприятий.

Пример расчета нечеткой ВБР. Предположим, что для анализа предоставлен массив значений наработок до отказа однотипного оборудования, эксплуатировавшегося при различных не вполне определенных условиях. Процедуры первичной обработки данных об отказах, выбора модели надежности, определения ее параметров подробно рассмотрены в работах [2, 4]. Пусть по результатам проведенного анализа выбрана модель надежности Вейбулла [2] и получены нечеткие значения ее параметров $\tilde{\eta} = \langle 7690,\ 8172,\ 8654 \rangle$, $\tilde{\beta} = \langle 1{,}09;\ 1{,}28;\ 1{,}47 \rangle$. Функции принадлежностей параметров однозначно определяются характерными точками нечетких величин и имеют вид (1). Используя выражения (5)–(7), для каждого момента времени $i\Delta t,\ i = 0,1,2,...$ и каждого значения $k\Delta\alpha,\ k = 0, 1, 2, ..., \dfrac{1}{\Delta\alpha}$, определяются левые и правые границы α-сечений нечеткой ВБР (значения $\Delta t, \Delta\alpha$ задаются заранее). Результатом является трехмерная поверхность в пространстве $\{t, P, \mu\}$ (рис. 3).

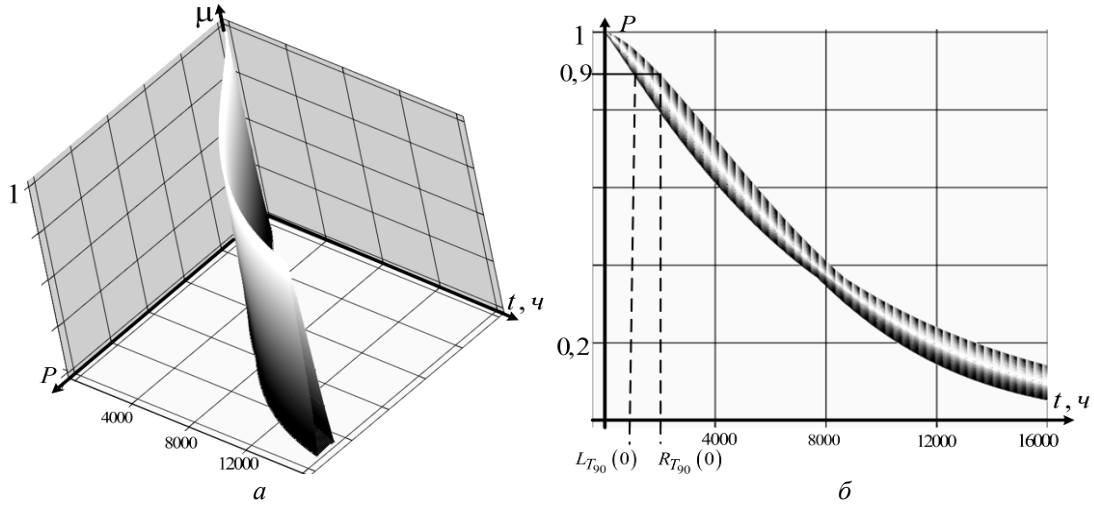

Рис. 2. Внешний вид функции нечеткой вероятности безотказной работы:
а – изометрическая проекция; *б* – вид сверху

Определение нечеткой гамма-процентной наработки по сути сводится к определению контура сечения функции нечеткой ВБР плоскостью $P = \frac{\gamma}{100}$. Так, для рассматриваемого примера при $\gamma = 90\%$ результатом будет нечеткое число $\tilde{T}_{90\%} = \langle 964,\ 1406,\ 1875 \rangle$ (см. рис. 3).

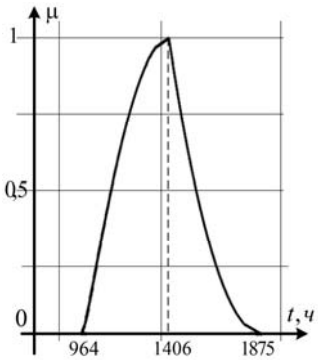

Рис. 3. Нечеткая гамма-процентная наработка при γ = 90%

Следует отметить, что сечение функции нечеткой ВБР плоскостью $t = t^*$ позволит найти нечеткую вероятность безотказной работы в течение времени t^*. Проведение процедуры дефаззификации полученных сечений для моментов времени $i\Delta t,\ i = 0, 1, 2, ...$ позволит получить аппроксимированную «четкую» функцию ВБР.

Все расчеты и построение графиков нечетких характеристик выполнены с использованием ПО PTC Mathcad 14.

Заключение. Математический аппарат нечетких множеств позволяет учитывать различного рода неопределенности при описании систем, неполноту информации об условиях эксплуатации технического оборудования. Разработанные в ходе настоящего исследования способы вычисления нечеткой вероятности безотказной работы и гамма-процентной наработки позволяют учитывать неполноту информации об условиях эксплуатации технического оборудования. Новизна предложенного подхода заключается в использовании кусочно-непрерывных полиномиальных функций принадлежности второго порядка для аппроксимации совокупности интервальных оценок параметров. Это позволило повысить точность при задании нечетких величин, сохранив при этом простоту вычисления границ α-сечений.

Нечеткие значения параметров надежности могут быть использованы в системах нечеткого вывода при оценке параметров безотказности оборудования, для планово-профилактичес-ких мероприятий и определения условий гарантийного обслуживания изделий. Также результаты данного исследования могут быть использованы для представления в нечеткой форме иных функциональных зависимостей с параметрами, определенными не полностью.

Литература

1. Острейковский В.А. Теория надежности: учеб. для вузов / В.А. Острейковский. – М.: Высш. школа, 2003. – 463 с.

2. Life Data Analysis Reference Book [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://reliawiki.com/index.php/Life_Data_Analysis_Reference, свободный (дата обращения: 05.05.2015).

3. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 167 с.

4. Buckley J.J. Simulating Fuzzy Systems. – Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2005. – 208 p.

5. Ефремов А.А., Кориков А.М. О применении кусочно-непрерывных функций к заданию функций принадлежности нечетких чисел (L-R)-типа [Электронный ресурс] // Вестник науки Сибири. – 2011. – № 1(1). – Режим доступа: http://sjs.tpu.ru/journal/article/view/70/117, свободный (дата обращения: 10.05.2015).

6. Ефремов А.А. Новые операции над нечеткими числами и интервалами // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2013. – № 1(27). – С. 95–99.

7. Zhang H. Fuzzy Modeling and Fuzzy Control / H. Zhang, D. Liu. – Boston: Birkhäuser, 2006. – 416 p.

Ефремов Александр Александрович
Ассистент каф. автоматики и компьютерных систем НИ ТПУ
Тел.: 8 (383-2) 60-63-81
Эл. почта: AlexYefremov@tpu.ru

Yefremov A.A.

On calculating fuzzy reliability function for systems with fuzzy reliability model parameters

The paper proposes an approach for evaluating performance reliability of technical equipment by available sample of failure times given when information on actual operating conditions is incomplete. It is suggested to define fuzzy reliability model parameters with piecewise continuous second-order polynomial membership functions. The article provides an example of fuzzy survival function and gamma-percentile life evaluating.

Keywords: reliability, survival function, gamma-percentile life, fuzzy set, fuzzy number, fuzzy probability, polynomial membership functions.
