УДК 530.145

А.С. Задорин, Д.А. Махорин

Матричное описание трансформации квантовых состояний одиночных фотонов в последовательности разбалансированных интерферометров Маха–Цендера

Дана матричная модель описания системы из нескольких разбалансированных интерферометров Маха–Цендера (ИМЦ), предназначенная для формирования и измерения временного или ТВ-кубита (time-bin qubit) как суперпозиции из сдвинутых во времени состояний одиночного фотона в выходных портах системы. Рассмотрено влияние квантового канала на структуру ТВ-кубита.

Ключевые слова: квантовый вентиль, интерферометр Маха–Цендера, квантовый канал, ТВ-кубит («time-bin qubit»), кутрит.

Перспективы практической реализации теоретических разработок в области оптических квантовых вычислений и систем квантовой передачи информации во многом определяются уровнем развития элементной базы квантовой оптики, а также соответствующих математических и расчетных моделей квантовых вентилей [1–4]. Специфика квантовых эффектов ограничивает возможности моделирования и оптимизации указанных устройств с помощью существующих оптических CAD-систем, область применения которых лимитируется рамками традиционной волновой оптики. В данных условиях важной задачей становится разработка адекватных моделей квантовых вентилей [2, 5] (квантовых гейтов – quantum gate), т.е. набора логических квантовых устройств, изменяющих состояния кубита $|\varphi\rangle$ в регистре квантового устройства в соответствии с заданным квантовым алгоритмом.

Одним из распространенных однокубитовых квантовых вентилей вычислительных и коммуникационных квантовых схем является интерферометр Маха–Цендера (ИМЦ), предназначенный для приготовления и измерения фазовых сдвигов между амплитудами вероятности в заданном вычислительном базисе кубита [1, 2]. В ИМЦ на аппаратном уровне объединено несколько логических устройств: однокубитовые квантовые вентили Адамара, представленные волоконными сплиттерами, и фазовращающий вентиль, реализованный в виде волоконно-оптического регулятора фазы α в плечах интерферометра [2].

Модификация указанного вентиля используется также и для формирования на выходе ИМЦ суперпозиции из двух сдвинутых во времени состояний $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$, образующих новый динамический измерительный базис кубита $|\varphi\rangle$. В литературе такая суперпозиция называется time-bin qubit [6], ниже оно обозначается как временной, или ТВ-кубит. В соответствии с изложенным выше, приготовление такого ТВ-кубита сопряжено с разбалансировкой интерферометра, а именно, с введением дополнительного отрезка оптического волокна (ОВ) в одно из плеч ИМЦ и соответствующей задержкой одиночного фотона на время Δ. Интерферометр такого типа широко используется при решении многих задач квантовой оптики [1, 2 ,7–9], однако для его моделирования используются, в основном, дескриптивные подходы, плохо сочетающиеся с традиционным математическим формализмом описания квантовых систем.

Целью настоящего сообщения является обобщение известной модели симметричного ИМЦ [2] на случай одиночного разбалансированного интерферометра, а также системы из нескольких последовательно соединенных ИМЦ.

Постановка задачи. Рассмотрим вначале одиночный однокубитовый вентиль, структурная схема которого представлена на рис. 1. Будем полагать, что вектор состояния квантовой частицы $|\varphi_0\rangle$ на его входе представляет собой кубит, приготовленный в двумерном ортогональном вычислительном базисе, построенном на векторах $|0\rangle$, $|1\rangle$:

$$|\varphi_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \tag{1}$$

где α, β – комплексные амплитуды вероятности нахождения фотона в состояниях $|0\rangle$ и $|1\rangle$ соответственно.

Совместим каждый из базисных кет-векторов в (1) с одним из оптических портов ИМЦ. Состояние кубита $|\varphi_4\rangle$ на выходных оптических портах ИМЦ, как видно из рисунка, будет определяться последовательным преобразованием (1) в квантовых вентилях Адамара, фазовращающем вентиле, а также вентиле временного сдвига. Обозначим унитарные операторы указанных логических устройств через **H, P** и **D** соответственно. Тогда преобразование кубита $|\varphi_0\rangle$ в ИМЦ будет определяться уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} |\varphi_1\rangle &= \mathbf{H}|\varphi_0\rangle, \\ |\varphi_2\rangle &= \mathbf{P}|\varphi_1\rangle, \\ |\varphi_3\rangle &= \mathbf{D}|\varphi 2\rangle, \\ |\varphi_4\rangle &= \mathbf{H}|\varphi_3\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

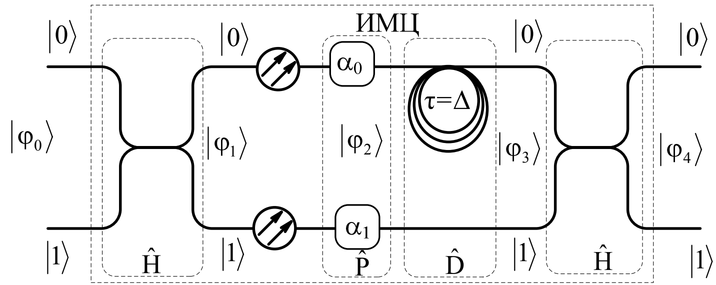

Рис. 1. Структурная схема разбалансированного интерферометра Маха–Цендера

Задача заключается в отыскании решения уравнений (2) и использовании его для исследования трансформации $|\varphi_0\rangle$ в системе из нескольких интерферометров, представленной на рис. 2.

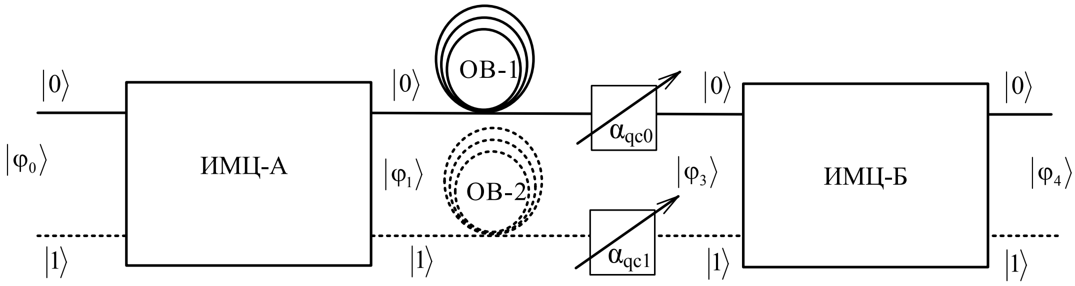

Рис. 2. Трансформация кубитов в системе из двух ИМЦ

Трансформация кубита $|\varphi_0\rangle$ в ИМЦ. Формальное решение системы линейных уравнений (2) дается как

$$|\varphi_4\rangle = \mathbf{H}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{H}\cdot|\varphi_0\rangle. \tag{3}$$

Здесь и далее знак точки между операторами означает свертку матриц по соседним индексам. Далее необходимо задать матрицы **H**, **P** и **D** соответствующих унитарных операторов. Как уже отмечалось, матрица **H** волоконного сплиттера без потерь с коэффициентом деления оптического сигнала 50/50 совпадет с квантовым вентилем Адамара [2]

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Матрица **P** фазовращающего вентиля описывает фазовые сдвиги α_0 и α_1 оптического сигнала в плечах ИМЦ и может быть представлена в виде [2]

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} e^{j\alpha_0} & 0 \\ 0 & e^{j\alpha_1} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Далее, следуя [10], введем линейный унитарный оператор временного сдвига **D**, описывающий относительный временной сдвиг одиночных фотонов в плечах интерферометра на время Δ. В дальнейшем будем полагать, что оператор **Dm**, определяющий соответствующий *m*-кратный временной сдвиг, выражается через **D** как

$$\mathbf{Dm} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}\ \mathbf{D} \ldots \mathbf{D} = \mathbf{D}^m.$$

Заметим, что при отсутствии сдвига (m=0) **Dm** представляется единичной матрицей.

С учетом сделанных замечаний матрицу **D** представим в виде

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Из соотношений (3)–(6) следует, что при $|\varphi_0\rangle = |0\rangle$ вектор состояния кубита $|\varphi_4\rangle$ на выходных портах $|0\rangle$ и $|1\rangle$ ИМЦ определится как

$$|\varphi_4\rangle = \frac{1}{2}\left[e^{j\alpha_0}D + e^{j\alpha_1}\right]|0\rangle + \frac{1}{2}\left[e^{j\alpha_0}D - e^{j\alpha_1}\right]|1\rangle. \tag{7}$$

Формула (7) показывает, что состояние $|\varphi_4\rangle$ одиночного фотона в портах $|0\rangle$ и $|1\rangle$ разбалансированного интерферометра представляется ТВ-кубитами, т.е. двумя разделенными промежутком времени Δ его возможными альтернативными состояниями.

Измерение данных временных кубитов осуществляется с помощью интерферометра Б, аналогичного ИМЦ-А, по схеме рис. 2. Формальную модель измерений можно получить путем замены в (3) состояния $|\varphi_0\rangle = |0\rangle$ на входе ИМЦ на соотношение (7). При этом следует учесть, что матрицы **P** фазовращающих вентилей интерферометров всегда различны. Эти различия в дальнейшем будем помечать нижними индексами фазовых переменных А и Б, например, как $\alpha_{\text{А}0}$ или $\alpha_{\text{Б}1}$. Кроме этого, обозначим операторы сдвига интерферометров как $\mathrm{D}_\text{А}$ и $\mathrm{D}_\text{Б}$. При расчете кет-вектора $|\varphi_4\rangle$ системы из двух ИМЦ следует также учесть фазовую матрицу $\mathbf{P}_{qc}$ квантового канала, в общем случае состоящего из двух ОВ, объединяющих соответствующие порты интерферометров (см. рис. 2). Поэтому $\mathbf{P}_{qc}$ определим аналогично (5):

$$\mathbf{P}_{qc} = \begin{bmatrix} e^{j\alpha_{qc0}} & 0 \\ 0 & e^{j\alpha_{qc1}} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

С учетом введенных обозначений, кубит $|\varphi_4\rangle$ в портах $|0\rangle$ и $|1\rangle$ ИМЦ-Б определится как

$$|\varphi_4\rangle = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{qc} \cdot \mathbf{H}_\text{Б} \cdot \mathbf{P}_\text{Б} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{H}_\text{Б} \cdot \begin{bmatrix} e^{j\alpha_{\text{А}0}}D_\text{А} + e^{j\alpha_{\text{А}1}} \\ e^{j\alpha_{\text{А}0}}D_\text{А} - e^{j\alpha_{\text{А}1}} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Воспользуемся соотношением (9) для анализа системы интерферометров, соединенных квантовым каналом, состоящим из одного оптического волокна. В данном случае один из членов (7) обращается в 0, поэтому из (9) следует

$$|\varphi_4\rangle = \frac{1}{4}\left[\left(e^{j\alpha_{\text{А}1}} + D_\text{А}e^{j\alpha_{\text{А}0}}\right)\left(e^{j\alpha_{qc0}}e^{j\alpha_{\text{Б}1}} + D_\text{Б}e^{j\alpha_{\text{Б}0}}e^{j\alpha_{qc0}}\right)\right]|0\rangle -$$
$$-\frac{1}{4}\left[\left(e^{j\alpha_{\text{А}1}} + D_\text{А}e^{j\alpha_{\text{А}0}}\right)\left(e^{j\alpha_{\text{Б}1}}e^{j\alpha_{qc1}} - D_\text{Б}e^{j\alpha_{\text{Б}0}}e^{j\alpha_{qc1}}\right)\right]|1\rangle. \tag{10}$$

Заметим, что операторы $\mathrm{D}_\text{А}$ и $\mathrm{D}_\text{Б}$ в (10) описывают сдвиги во времени наблюдаемого одиночного фотона при его распространении по длинным (Д) плечам ИМЦ-А,Б, а единичный оператор, $1 = (D_\text{А})^0 = (D_\text{Б})^0$ – отсутствие таких сдвигов для коротких (К) плеч интерферометров соответственно. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае в каждом из портов $|0\rangle$ и $|1\rangle$ ИМЦ-Б состояние $|\varphi_4\rangle$ представлено куквартами, кет-векторы которых имеют четыре допустимых динамических состояния. Одно из них в (10) представлено состоянием с нулевой задержкой (**Dm** = 1), реализуемом на оптической траектории $\text{К}_\text{А}$–$\text{К}_\text{Б}$, еще два состояния с однократной задержкой (**Dm** = $D_\text{А}$, $D_\text{Б}$), реализуемые на траекториях $\text{Д}_\text{А}$–$\text{К}_\text{Б}$ и $\text{К}_\text{А}$–$\text{Д}_\text{Б}$, а также одно состояние с двукратной задержкой (**Dm** = $D_\text{А} \cdot D_\text{Б}$) на траектории $\text{Д}_\text{А}$–$\text{Д}_\text{Б}$.

При идентичных конструкциях интерферометров, когда $\mathrm{D}_\text{А} = \mathrm{D}_\text{Б}$, слагаемые в круглых скобках оказываются вырожденными, т.е. соответствующие им состояния реализуются одновременно, размерность вектора состояний одиночного фотона на выходных портах второго ИМЦ снижается до 3. Указанный объект $|\varphi_4\rangle$ с такой размерностью в литературе называется кутритом [11]. Указанные линейно независимые динамические состояния кутрита выберем в качестве базисных векторов и обозначим как $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ и $|\gamma\rangle$. Тогда в соответствии с (10), проекции $|\varphi_4\rangle$ на векторы $|0\rangle$ и $|1\rangle$ будут:

$$\langle i|\varphi_4\rangle = \xi_{i\alpha}|\alpha\rangle + \xi_{i\beta}|\beta\rangle + \xi_{i\gamma}|\gamma\rangle, \tag{11}$$

где i = 0,1; $\xi_{i\alpha}$, $\xi_{i\beta}$, $\xi_{i\gamma}$ – комплексные амплитуды вероятности состояний $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ и $|\gamma\rangle$ кутрита в портах $|0\rangle$ и $|1\rangle$ соответственно.

Наиболее интересным информационным состоянием кутрита является состояние $|\beta\rangle$, формирующееся в условиях равенства оптических длин L_1 и L_2 траекторий $Д_А$ – $К_Б$ и $К_А$ – $Д_Б$, при которых квантовая частица способна интерферировать сама с собой [10]. Результаты этой интерференции проявляются в зависимости амплитуд вероятности $\xi_{i\beta}$ состояний $|\beta\rangle$ в выходных оптических портах ИМЦ-Б от разности фаз $\phi = (\alpha_{Б0} + \alpha_{А1}) - (\alpha_{Б1} + \alpha_{А0})$ и на практике используются для фазовых измерений комплексной амплитуды $\xi_{i\beta}$ [1, 2, 7, 8]. Действительно, из (10) видно, что при фазовом сдвиге ϕ оптического сигнала на отрезках L_1 и L_2 ИМЦ-А,Б амплитуды вероятностей состояния $|\beta\rangle$ в двух выходных портах ИМЦ-Б будут пропорциональны $\beta_1 \sim \cos(\phi/2)$, $\beta_2 \sim \sin(\phi/2)$ соответственно. Соответственно вероятности регистрации одиночных фотонов в указанных точках ИМЦ-Б $P_1 \sim \cos^2(\phi/2)$ и $P_2 \sim \sin^2(\phi/2)$ зависят от настройки значения фазового сдвига ϕ фазовращающих вентилей ИМЦ-А,Б.

Недостатком рассмотренной схемы на рис. 2 детектирования ТВ-кубитов с одним ОВ являются большие потери битрейта в квантовом канале, связанные с отбрасыванием направляемых в волоконный терминатор кубитов из порта $|1\rangle$ ИМЦ-А.

Снижение потерь можно получить в схеме рис. 2 с квантовым каналом, состоящим из двух оптических волокон. Отыщем $|\varphi_4\rangle$ для такого канала. Воспользовавшись соотношениями (4)–(10) и по-прежнему полагая, что $D_А=D_Б$, получим

$$\begin{aligned}|\varphi_4\rangle = \frac{1}{4}\Big\{&\left(e^{j\alpha_{А1}} - D_А e^{j\alpha_{А0}}\right)\left(e^{j\alpha_{Б1}} e^{j\alpha_{qc0}} - D_Б e^{j\alpha_{Б0}} e^{j\alpha_{qc0}}\right) + \\ &+\left(e^{j\alpha_{А0}} + D_А e^{j\alpha_{А0}}\right)\left(e^{j\alpha_{Б1}} e^{j\alpha_{qc0}} + D_Б e^{j\alpha_{Б0}} e^{j\alpha_{qc0}}\right)\Big\}|0\rangle - \\ -\frac{1}{4}\Big\{&\left(e^{j\alpha_{А1}} - D_А e^{j\alpha_{А0}}\right)\left(e^{j\alpha_{Б1}} e^{j\alpha_{qc1}} + D_Б e^{j\alpha_{Б0}} e^{j\alpha_{qc1}}\right) + \\ &+\left(e^{j\alpha_{А1}} + D_А e^{j\alpha_{А0}}\right)\left(e^{j\alpha_{Б1}} e^{j\alpha_{qc1}} - D_Б e^{j\alpha_{Б0}} e^{j\alpha_{qc1}}\right)\Big\}|1\rangle.\end{aligned} \quad (12)$$

Из полученной формулы следует, что в канале, построенном из волокон с одинаковыми фазовыми характеристиками, когда $\alpha_{qc0} = \alpha_{qc1}$, амплитуда $\xi_{i\beta}$ состояния $|\beta\rangle$ кутрита в (11) обращается в ноль вследствие деструктивной интерференции фотона в обоих выходных портах ИМЦ-Б, прошедшего различные альтернативные траектории рассматриваемой схемы. Из (12) видно, что для состояний $|\alpha\rangle$ и $|\gamma\rangle$ указанная интерференция является конструктивной и приводит к двойному увеличению их амплитуд.

Структурой интерференционной картины в выходных портах можно, очевидно, управлять за счет изменения разности фаз $\phi = \alpha_{qc0} - \alpha_{qc1}$ в волокнах квантового канала. Так, при $\phi = \pi$ согласно (12) условия конструктивной интерференции будут выполняться для состояния $|\beta\rangle$ кутрита, при этом состояния $|\alpha\rangle$ и $|\gamma\rangle$ окажутся подавленными.

Заключение. Изложенный выше матричный метод расчета структуры квантовых состояний одиночных фотонов в системе из двух разбалансированных ИМЦ легко обобщается на произвольное число интерферометров путем последовательного перемножения однотипных операторных матриц интерферометров и соединяющих их квантовых каналов. При этом, как было показано выше, происходит динамическая стратификация состояния фотона в выходных портах интерферометра, превращая его в многоуровневую квантовую систему – кудит (q-dit).

Литература

1. Нильсен М. Квантовые вычисления и квантовая информация: пер. с англ. / М. Нильсен, И. Чанг. – М.: Мир, 2006. – 824 с.

2. Имре Ш. Квантовые вычисления и связь. Инженерный подход / Ш. Имре, Ф. Балаж. – М.: Физматлит, 2008. – 320 с.

3. Прескилл Дж. Квантовая информация и квантовые вычисления. Т. 1. – Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2008. – 464 с.

4. Прескилл Дж. Квантовая информация и квантовые вычисления. – Т. 2. – Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2011. – 312 с.

5. Емельянов В.И. Квантовая физика: биты и кубиты: учеб. пособие / В.И. Емельянов, Ю.В. Владимирова. – М.: Физический факультет МГУ, 2012. – 176 с.

6. Gisin N. Quantum cryptography / N. Gisin, G. Ribordy, T. Wolfgang // Rev. of Modern Phys. – 2002. – Vol. 74. – P. 145–195.

7. Молотков С.Н. Квантовая криптография и теоремы В.А. Котельникова об одноразовых ключах и об отсчетах // Успехи физических наук. – 2006. – Т. 176, вып. 7. – С. 777–788.

8. Килин С.Я. Квантовая криптография: идеи и практика / С.Я. Килин, Д.Б. Хорошко, А.П. Низовцев. – Минск: Белорусская наука, 2008. – 392 с.

9. Задорин А.С. Интерферометрический контроль целостности данных в системе квантового распределения ключей с временным кодированием / А.С. Задорин, Д.А. Махорин // Доклады ТУСУРа. – 2014. – № 4 (34). – С. 85–88.

10. Дирак П. Принципы квантовой механики. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 480 с.

11. Maslennikov G. Practical realization of quantum cryptography protocol exploiting polarization encoding in qutrits / G. Maslennikov, A. Zhukov, M. Chekhova and S. Kulik // Journal of Optics B. – 2003. – Vol. 5, № 4. – P. 530–534.

Задорин Анатолий Семенович
Д-р техн. наук, профессор, зав. каф. радиоэлектроники и защиты информации (РЗИ) ТУСУРа
Тел.: 8 (382-2) 41-33-65
Эл. почта: Anatoly.Zadorin@rzi.tusur.ru

Махорин Дмитрий Алексеевич
Аспирант каф. РЗИ
Тел.: 8-913-824-11-11
Эл. почта: mda.tomsk@gmail.com

Zadorin A.S., Makhorin D.A.

Matrix description for transformation of individual photons quantum states in sequence of unbalanced Mach-Zehnder interferometers

A matrix model describing the system of several unbalanced Mach-Zehnder interferometers (MZI) used for forming and measuring time-bin qubit as superposition of time-shifted states of a single photon in output ports of system has been proposed. A quantum channel effect on time-bin qubit structure has been studied.
Keywords: quatnum gates, Mach-Zehnder interferometer, quantum channel, time-bin qubit, qutrit.
